

# Synthèse d'un observateur de dimension finie pour un système de dimension infinie

Mathieu BAJODEK

encadré par Alexandre Seuret et Frédéric Gouaisbaut

M2 Automatique et Traitement du Signal et des Images (ATSI)  
Laboratoire d'analyse et d'architecture des systèmes (LAAS-CNRS)

Le 19 septembre 2019

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Méthodes génériques
- 3 Application à l'équation de transport
- 4 Exemples applicatifs
- 5 Conclusion

# Plan

- 1 Introduction
  - Observation
  - Dimension finie
  - Dimension infinie
- 2 Méthodes génériques
- 3 Application à l'équation de transport
- 4 Exemples applicatifs
- 5 Conclusion

# Système et état

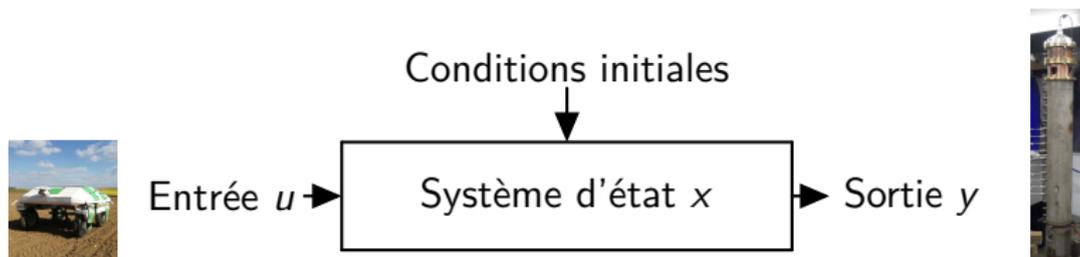


Figure 1: Système à observer

- Contexte : Système d'**état**  $x$  **non mesurable**.

# Observateur d'état d'un système

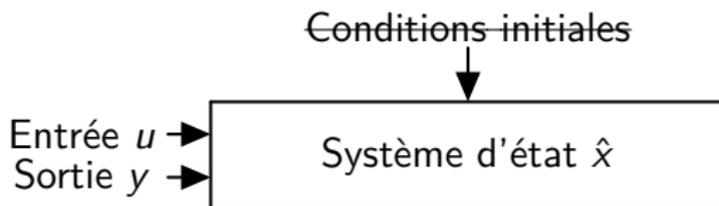


Figure 2: Observateur d'état

- Contexte : Système d'état  $x$  **non mesurable**.
- Définition : Système d'état  $\hat{x}$  destiné à **reconstruire l'état**  $x$  d'un système **sans connaître ses conditions initiales**.

# Observateur d'état d'un système

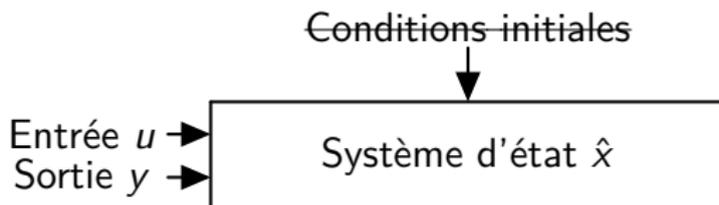


Figure 2: Observateur d'état

- Contexte : Système d'état  $x$  **non mesurable**.
- Définition : Système d'état  $\hat{x}$  destiné à **reconstruire l'état**  $x$  d'un système **sans connaître ses conditions initiales**.
- Cadre applicatif :
  - Synthèse de lois de commandes ( $u = -Kx$ ).
  - Diagnostic ( $\tilde{x} = x - \hat{x} \simeq 0?$ ).

## Système de dimension finie

- Système de **dimension finie** : état  $W_N(t) \in \mathbb{R}^N$ .

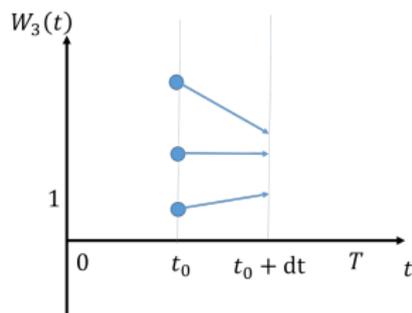
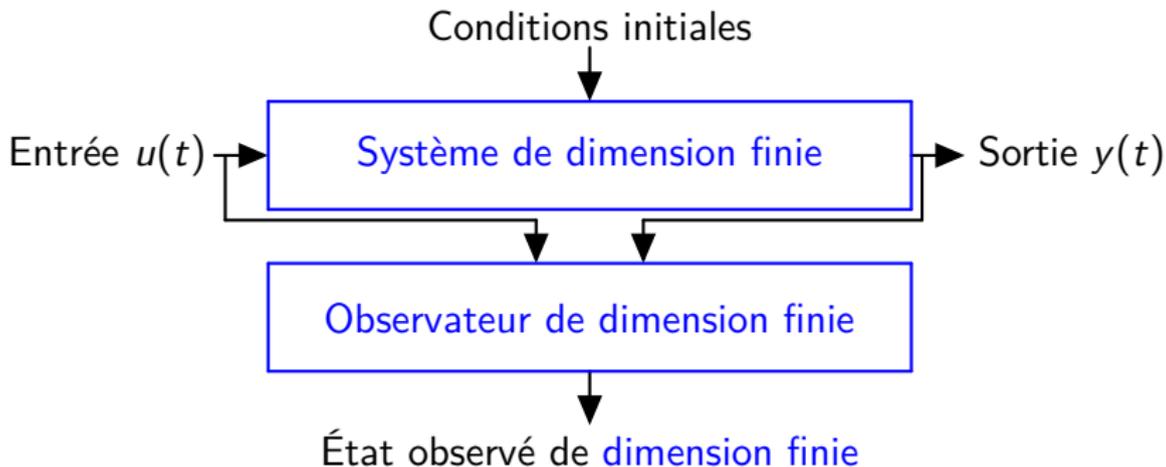


Figure 3: Dynamique d'un état de **dimension finie**

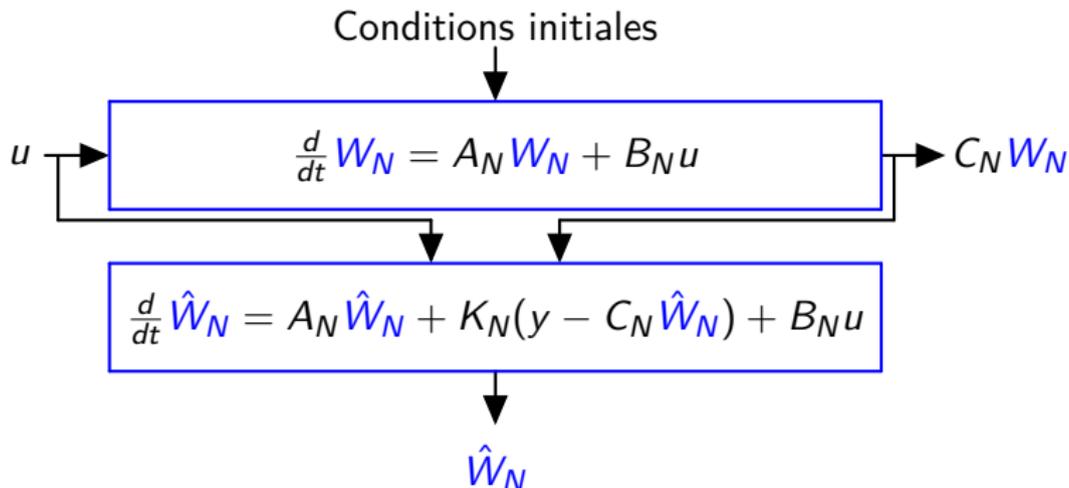
# Observateur pour un système de dimension finie

- Système de **dimension finie** : état  $W_N(t) \in \mathbb{R}^N$ .
  - **Données** : entrée/sortie, dynamique de **dimension finie**.
  - **Objectif** : réaliser un observateur [Lue71]; [APA08].



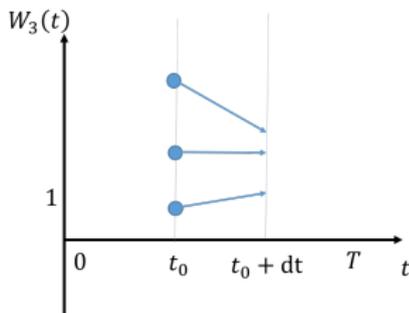
# Observateur pour un système de dimension finie

- Système de **dimension finie** : état  $W_N(t) \in \mathbb{R}^N$ .
  - **Données** : entrée/sortie, dynamique de **dimension finie**.
  - **Objectif** : réaliser un observateur [Lue71]; [APA08].

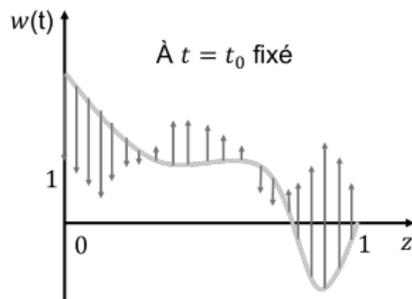


# Système de dimension infinie

- Système de **dimension finie** : état  $W_N(t) \in \mathbb{R}^N$ .
  - Système de **dimension infinie** : état  $w(t) \in \mathcal{W}$ .
- Exemple :  $\mathcal{W} = \mathcal{L}^2(0, 1; \mathbb{R})$ .



(a) Dynamique d'état **finie**

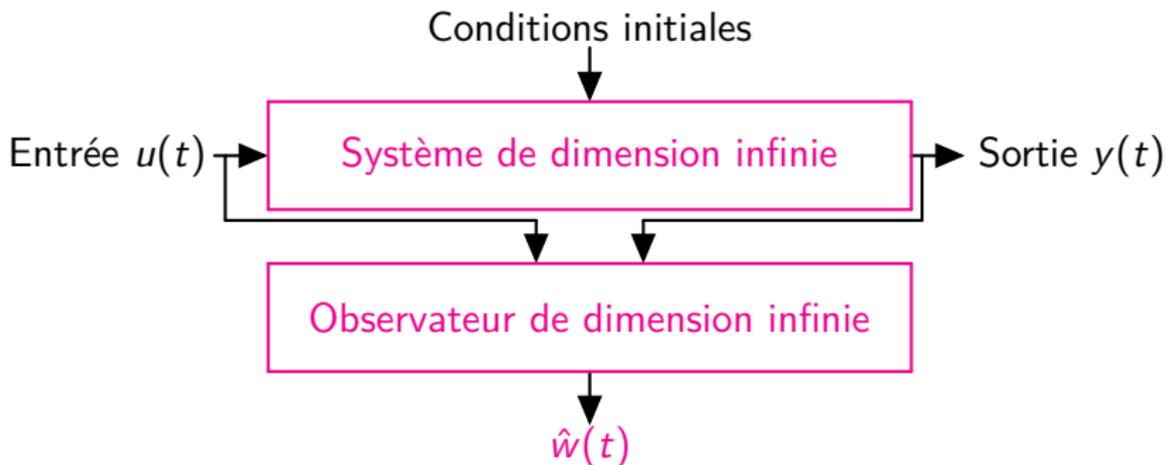


(b) Dynamique d'état **infinie**

Figure 4: Dynamiques d'état

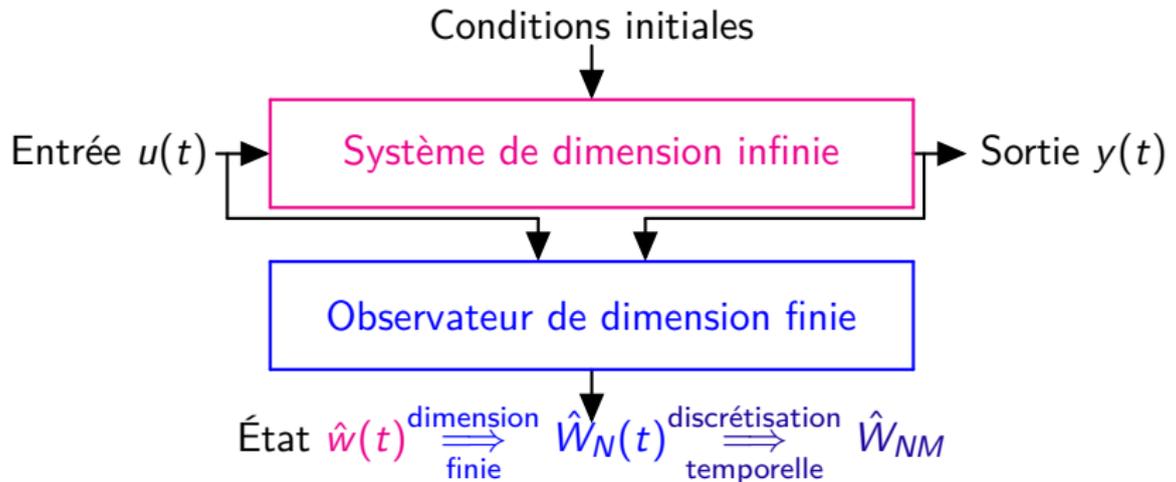
# Observateur pour un système de dimension infinie

- Système de **dimension infinie** : état  $w(t) \in \mathcal{W}$ .
  - **Données** : entrée/sortie, dynamique de **dimension infinie**.
  - **Objectif** : réaliser un observateur [HR11]; [Ram+13].



# Observateur pour un système de dimension infinie

- Système de **dimension infinie** : état  $w(t) \in \mathcal{W}$ .
  - **Données** : entrée/sortie, dynamique de **dimension infinie**.
  - **Objectif** : réaliser un observateur [HR11]; [Ram+13].



# Problématique

- Contexte : Système dynamique continu de **dimension infinie**.
- Hypothèses : linéaire et à temps invariant.

Comment synthétiser  
un observateur de **dimension finie** associé?

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Méthodes génériques
  - De la dimension infinie à la dimension finie
  - Méthode choisie
- 3 Application à l'équation de transport
- 4 Exemples applicatifs
- 5 Conclusion

## Comment passer à la dimension finie?

$$\begin{array}{l} \text{Paramètres distribués : } w(t) : \left\{ \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m \\ z \mapsto w(t, z) \end{array} \right. \in \mathcal{W}(0, 1; \mathbb{R}^m) \\ \text{Paramètres localisés : } W_N(t) \in \mathbb{R}^{m(N+1)} \end{array}$$

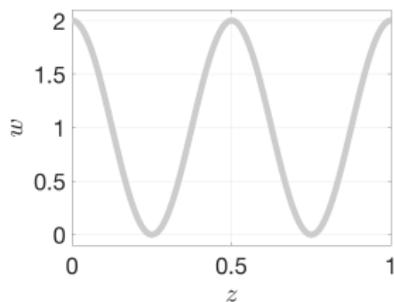
## Comment passer à la dimension finie?

$$\begin{aligned} \text{Paramètres distribués : } w(t) \in \mathcal{W}(0, 1; \mathbb{R}^m) &\leftrightarrow \{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}(t) \\ \text{Paramètres localisés : } W_N(t) \in \mathbb{R}^{m(N+1)} &\leftrightarrow \{W_n\}_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}(t) \end{aligned}$$

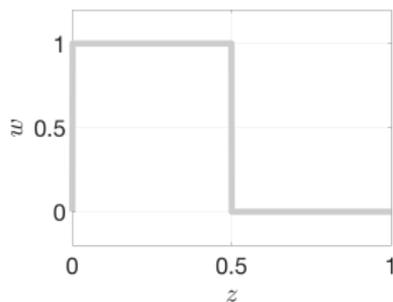
Choix de :

- la nature (échantillons ou projections),
- la classification,
- la troncature (ordre  $N$ ).

## Exemples de méthodes de passage à la dimension finie



(a) Cosinus



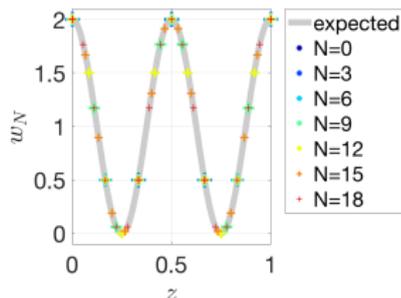
(b) Créneau

Figure 5: Exemples à  $t$  fixé

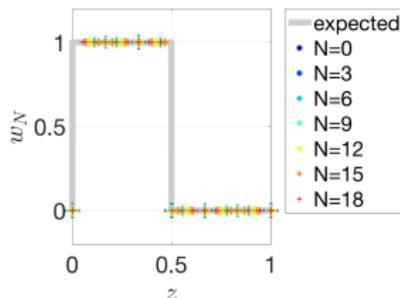
# Exemples de méthodes de passage à la dimension finie

Échantillons : projection sur un peigne de Dirac [Zua05].

$$W_N = \left[ w(z_0) \quad \dots \quad w(z_N) \right]^T \rightarrow w_N$$



(a) Cosinus discrétisé



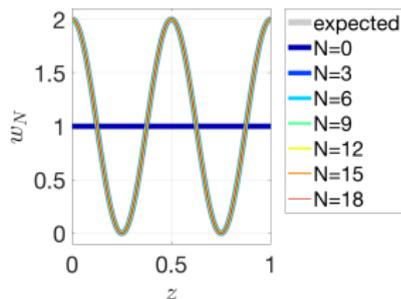
(b) Créneau discrétisé

Figure 6: Méthode d'échantillonnage avec un pas uniforme  $dz = \frac{1}{N}$

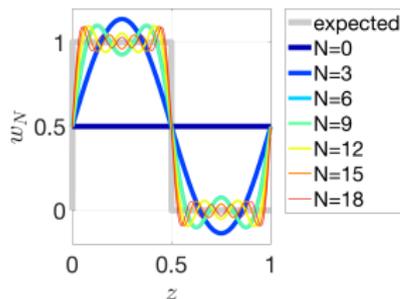
# Exemples de méthodes de passage à la dimension finie

**Modes** : projection sur la base modale [Sch83].

$$W_N = \left[ \dots \quad a_k \quad b_k \quad \dots \right]^T \rightarrow w_N \text{ série de Fourier tronquée.}$$



(a) Cosinus discrétisé



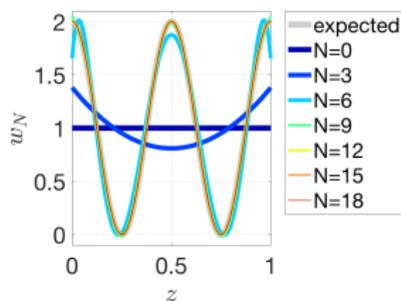
(b) Créneau discrétisé

Figure 7: Méthode de projection sur la base de Fourier

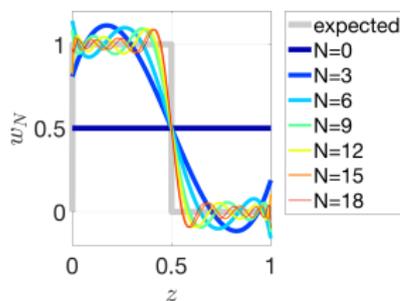
## Exemples de méthodes de passage à la dimension finie

**Polynômes** : projection sur une base polynomiale [Ser18].

$W_N = [\dots \bar{a}_k \dots]^T \rightarrow w_N = \mathbf{L}_N W_N$  série de Fourier-Legendre tronquée.



(a) Série tronquée d'un cosinus



(b) Série tronquée d'un créneau

Figure 8: Méthode de projection sur la base polynômiale de Legendre  $\mathbf{L}_N$

## Résumé des méthodes de passage à la dimension finie

- **Échantillons** : projection sur un peigne de Dirac [Zua05].

$$W_N = [w(z_0) \quad \dots \quad w(z_N)]^T \rightarrow w_N$$

- **Modes** : projection sur la base modale [Sch83].

$$W_N = [\dots \quad a_k \quad b_k \quad \dots]^T \rightarrow w_N \text{ série de Fourier tronquée.}$$

- **Polynômes** : projection sur une base polynomiale [Ser18].

$$W_N = [\dots \quad \bar{a}_k \quad \dots]^T \rightarrow w_N \text{ série de Fourier-Legendre tronquée.}$$

Méthode	Échantillons	Modes	Polynômes
Précision (ordre $N$ )	–	+++	+
Dynamique	–	+++	+

## Résumé des méthodes de passage à la dimension finie

- **Échantillons** : projection sur un peigne de Dirac [Zua05].

$$W_N = \left[ w(z_0) \quad \dots \quad w(z_N) \right]^T \rightarrow w_N$$

- **Modes** : projection sur la base modale [Sch83].

$$W_N = \left[ \dots \quad a_k \quad b_k \quad \dots \right]^T \rightarrow w_N \text{ série de Fourier tronquée.}$$

- **Polynômes** : projection sur une base polynomiale [Ser18].

$$W_N = \left[ \dots \quad \bar{a}_k \quad \dots \right]^T \rightarrow w_N \text{ série de Fourier-Legendre tronquée.}$$

Méthode	Échantillons	Modes	Polynômes
Précision (ordre $N$ )	-	++	+
Dynamique	-	++	+

## À quel moment passer à la dimension finie?

- **En aval** [SK05]; [TW09] (late-lumping).
- **En amont** [MNB12]; [HD11]; [SF16] (early-lumping).

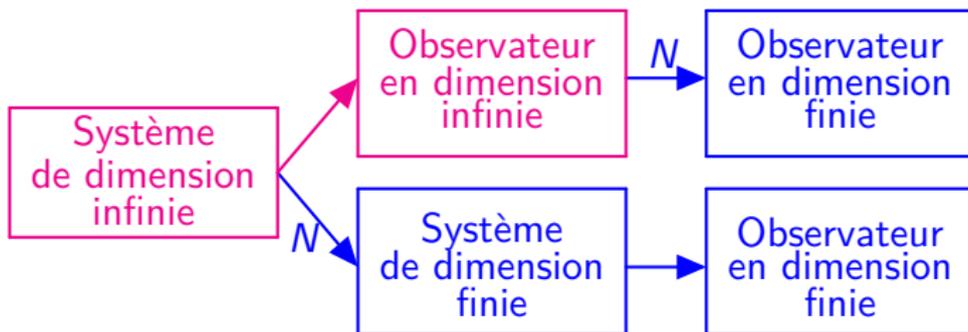
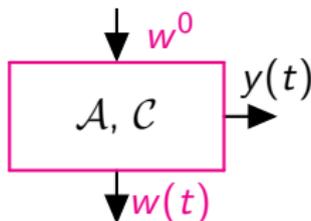


Figure 9: Approches existantes

# Étapes de la synthèse d'un observateur de dimension finie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} w(t) = \mathcal{A}w(t) \\ w(0) = w^0 \in \mathcal{W} \\ y(t) = \mathcal{C}w(t) \in \mathbb{R}^p \end{array} \right.$$

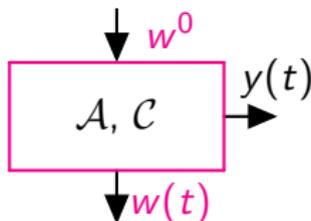


(a) Système

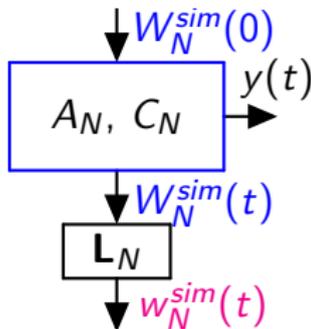
# Étapes de la synthèse d'un observateur de dimension finie

choix de  $N$  composantes  $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} W_N(t) = A_N W_N(t) + p_N(t) \\ W_N(0) = W_N^0 \in \mathbb{R}^{m(N+1)} \\ y(t) = C_N W_N(t) + b_N(t) \end{array} \right.$$



(a) Système



(b) Système réduit

# Étapes de la synthèse d'un observateur de dimension finie

par recopie  $\Rightarrow$  [Lue71]  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \hat{W}_N(t) = A_N \hat{W}_N(t) + K_N (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_N \hat{W}_N(t) \end{array} \right.$

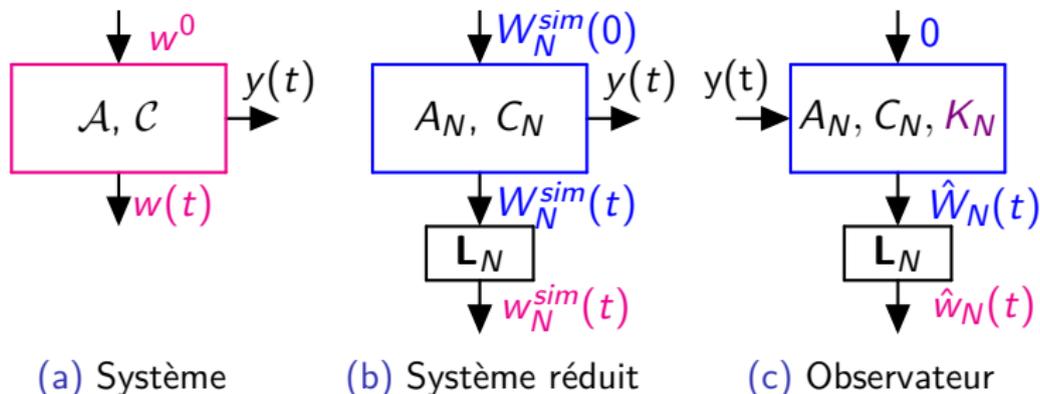
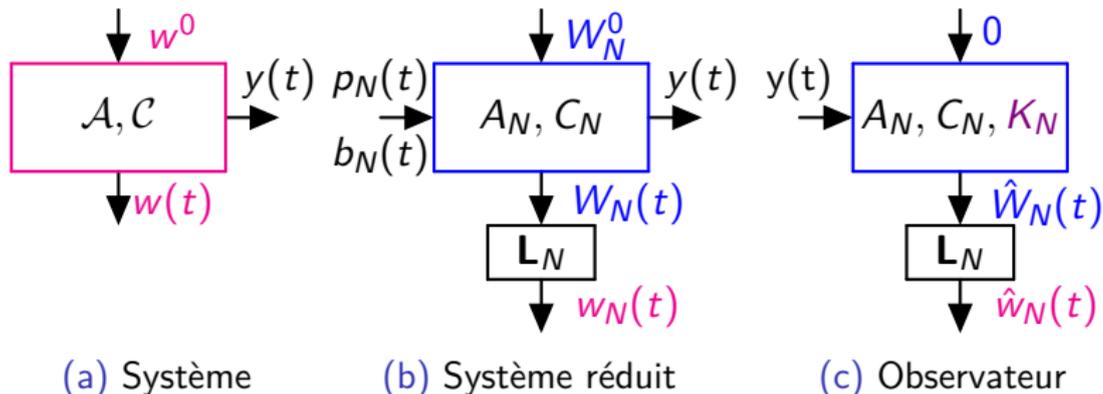


Figure 10: Schémas blocs des étapes

## Choix du gain d'observation



### Proposition

Si le système est stable, on aura  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|w(t) - \hat{w}_N(t)\|_{\mathcal{W}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

Choix du gain d'observation  $K_N \in \mathbb{R}^{m(N+1) \times p}$ .

Minimisation de  $\tilde{w}_N(t) = w_N(t) - \hat{w}_N(t)$  [LP95]; [FC03].

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Méthodes génériques
- 3 Application à l'équation de transport**
  - L'équation de transport
  - Projection sur la base de Legendre tronquée
  - Construction de l'observateur de dimension finie associé
- 4 Exemples applicatifs
- 5 Conclusion

## Équation de transport bouclée linéairement

Système de **dimension infinie** :

- un **phénomène de transport** de vitesses  $\Gamma \in \mathbb{D}^m$  (EDP).
- un **bouclage** par  $D \in \mathbb{R}^m$  (CB).

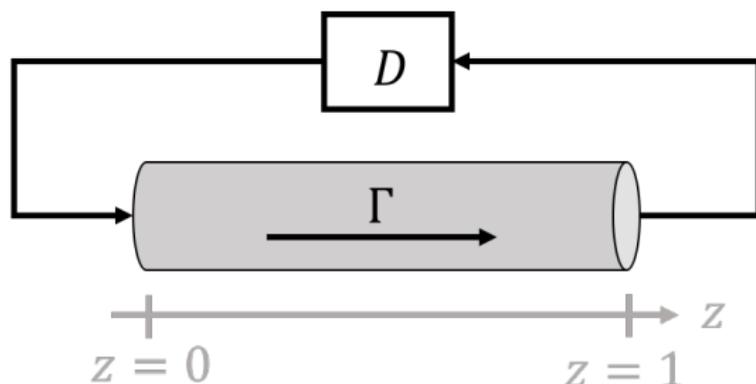


Figure 12: Système de transport amorti

## Équation de transport bouclée linéairement

Système de **dimension infinie** :

- un **phénomène de transport** de vitesses  $\Gamma \in \mathbb{D}^m$  (EDP).
- un **bouclage** par  $D \in \mathbb{R}^m$  (CB).

$$\forall (t, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 1] \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} w(t, z) = -\Gamma \frac{\partial}{\partial z} w(t, z) & \text{(EDP)} \\ w(t, 0) = D w(t, 1) & \text{(CB)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w(0, \cdot) &= w^0 \in \mathcal{L}^2(0, 1; \mathbb{R}^m) & \text{(CI)} \\ y(t) &= C w(t, 1) \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

## Système régi par la dynamique des projetés

Projetés dans la **base polynômiale de Legendre**  $W_N \in \mathbb{R}^{m(N+1)}$  :

$$W_N(t) = \begin{bmatrix} W_{n=0} \\ \vdots \\ W_{n=N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 w(t, z) dz \\ \vdots \\ \int_0^1 w(t, z) L_N(z) dz \end{bmatrix}$$

## Système régi par la dynamique des projetés

Projetés dans la **base polynômiale de Legendre**  $W_N \in \mathbb{R}^{m(N+1)}$  :

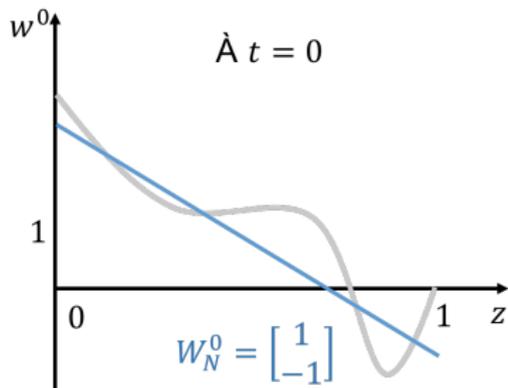
$$\frac{d}{dt} W_N(t) = A_N W_N(t) + B_N \rho_N(t, 1) \quad (\text{EDO})$$

$$W_N(0) = W_N^0 \in \mathbb{R}^{m(N+1)} \quad (\text{CI})$$

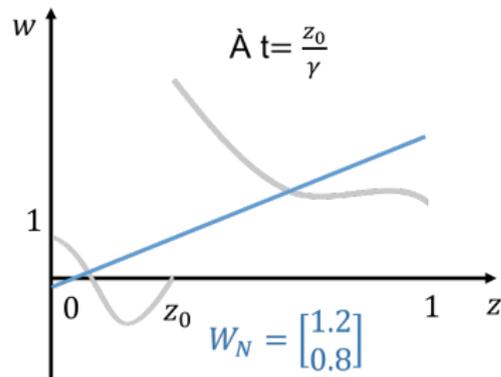
$$y(t) = C_N W_N(t) + C \rho_N(t, 1)$$

- Les matrices de **dimension finie**  $A_N$ ,  $B_N$  et  $C_N$  dépendent de  $D$ ,  $\Gamma$  et  $C$  (*annexe*).
- Le reste  $\rho_N(t, 1) = w(t, 1) - w_N(t, 1)$  de la série Fourier-Legendre avec  $w_N(t, 1) = [1 \dots 1] W_N(t)$

## Représentation des états pour $m = 1$



(a)  $w$  et  $w_N$  à  $t = 0$

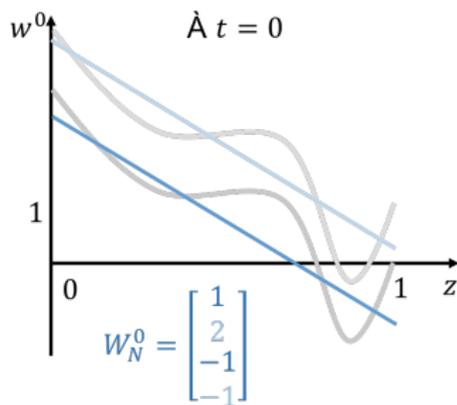


(b)  $w$  et  $w_N$  à  $t$

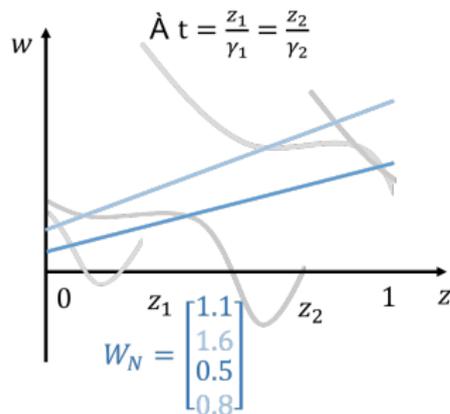
Figure 13: Interprétation graphique des états du système réduit ( $N = 1$ ) pour  $m = 1$  et  $\Gamma = \gamma$

Sortie :  $y(t) = w(t, 1)$

## Représentation des états pour $m = 2$



(a)  $w$  et  $w_N$  à  $t = 0$



(b)  $w$  et  $w_N$  à  $t$

Figure 14: Interprétation graphique des états du système réduit ( $N = 1$ ) pour  $m = 2$  et  $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2)$

Sortie :  $y(t) = [1 \ 1]w(t, 1)$

## Observateur de dimension finie des projetés

Observateur de dimension finie :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{W}_N(t) = A_N \hat{W}_N(t) + K_N (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_N \hat{W}_N(t) \end{cases}$$

avec  $\hat{W}_N(0) = 0$ .

## Observateur de dimension finie des projetés

Observateur de dimension finie :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{W}_N(t) = A_N \hat{W}_N(t) + K_N(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_N \hat{W}_N(t) \end{cases}$$

avec  $\hat{W}_N(0) = 0$ .

Erreur d'observation  $\tilde{W}_N(t) = \hat{W}_N(t) - W_N(t)$ .

$$\frac{d}{dt} \tilde{W}_N(t) = (A_N - K_N C_N) \tilde{W}_N(t) + (K_N C - B_N) \rho_N(t, 1)$$

## Synthèse du gain d'observation

Choix de  $K_N$  par :

- **convergence exponentielle** de vitesse  $\mu$  fixée.
- **minimisation** du **gain**  $\bar{\sigma}(S)$  **vis-à-vis de l'erreur**  $\rho_N(t, 1)$

## Synthèse du gain d'observation

Choix de  $K_N$  par :

- **convergence exponentielle** de vitesse  $\mu$  fixée.
- **minimisation** du **gain**  $\bar{\sigma}(S)$  **vis-à-vis de l'erreur**  $\rho_N(t, 1)$

Minimisation  $\epsilon_2 + \bar{\sigma}(S)$  sous contrainte (LMI) avec  $\epsilon_1 > 0$  fixé.

$$\begin{cases} \epsilon_1 I_{m(N+1)} < P_N < \epsilon_2 I_{m(N+1)} \\ \begin{bmatrix} \mathcal{H}[P_N(A_N - K_N C_N)] - \mu P_N & P_N(K_N C - B_N) \\ * & -S \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (\text{LMI})$$



## Démonstration du théorème de convergence

Encadrement de l'erreur en norme  $\mathcal{L}^2$

$$\text{Soit } E(t) = \|(w - \hat{w}_N)(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = |\tilde{V}_N(t)|^2 + \|\rho_N(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}^2}^2.$$

## Démonstration du théorème de convergence

Encadrement de l'erreur en norme  $\mathcal{L}^2$

Soit  $E(t) = \| (w - \hat{w}_N)(t, \cdot) \|_{\mathcal{L}^2}^2 = |\tilde{W}_N(t)|^2 + \|\rho_N(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}^2}^2$ .

$$\begin{aligned}
 E(t) &\leq \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} |\tilde{W}_N^0|^2 e^{-\mu t} + \frac{\bar{\sigma}(S)}{\epsilon_1} \int_0^t e^{\mu(\tau-t)} |\rho_N(\tau, 1)|^2 d\tau + \|\rho_N(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \\
 &\leq \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} |\tilde{W}_N^0|^2 e^{-\mu t} + \frac{\bar{\sigma}(S)}{\epsilon_1 \mu} \sup_{\tau \in [0, t]} |\rho_N(\tau, 1)|^2 \\
 &\quad - \frac{\bar{\sigma}(S)}{\epsilon_1 \mu} e^{-\mu t} \sup_{\tau \in [0, t]} |\rho_N(\tau, 1)|^2 + \|\rho_N(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}^2}^2
 \end{aligned}$$

## Démonstration du théorème de convergence

### Encadrement de l'erreur en norme $\mathcal{L}^2$

Soit  $E(t) = \| (w - \hat{w}_N)(t, \cdot) \|_{\mathcal{L}^2}^2 = |\tilde{W}_N(t)|^2 + \|\rho_N(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}^2}^2$ .

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} |\tilde{W}_N^0|^2 e^{-\mu t} + \frac{\bar{\sigma}(S)}{\epsilon_1} \int_0^t e^{\mu(\tau-t)} |\rho_N(\tau, 1)|^2 d\tau + \|\rho_N(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \\ &\leq \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} |\tilde{W}_N^0|^2 e^{-\mu t} + \frac{\bar{\sigma}(S)}{\epsilon_1 \mu} \sup_{\tau \in [0, t]} |\rho_N(\tau, 1)|^2 \\ &\quad - \frac{\bar{\sigma}(S)}{\epsilon_1 \mu} e^{-\mu t} \sup_{\tau \in [0, t]} |\rho_N(\tau, 1)|^2 + \|\rho_N(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \end{aligned}$$

### Théorème

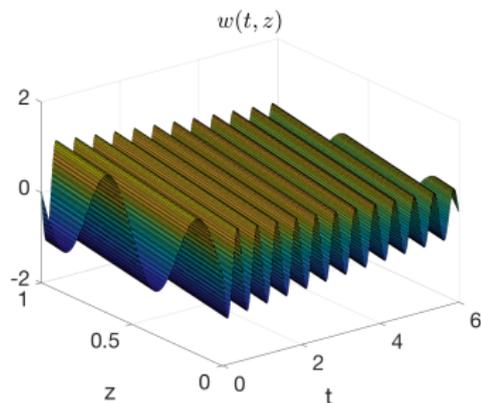
On a  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\| (w - \hat{w}_N) \|_{\mathcal{L}^2}^2) = \frac{\bar{\sigma}(S)}{\epsilon_1 \mu} \sup_{\tau \in [0, \infty[} |\rho_N(\tau, 1)|^2 + \lim_{t \rightarrow \infty} \|\rho_N\|_{\mathcal{L}^2}^2$ .

# Plan

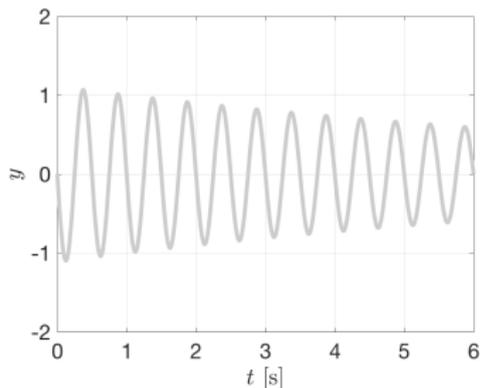
- 1 Introduction
- 2 Méthodes génériques
- 3 Application à l'équation de transport
- 4 Exemples applicatifs
  - Observation de l'équation de transport amortie 1
  - Observation de l'équation de transport amortie 2
  - Observation de l'équation de transport amortie 3
- 5 Conclusion

## Système avec une condition initiale sinusoïdale

Données :  $\Gamma = 1$ ,  $D = 0.9$  et  $y(t) = w(t, 1)$ .



(a) État  $w(t, z)$

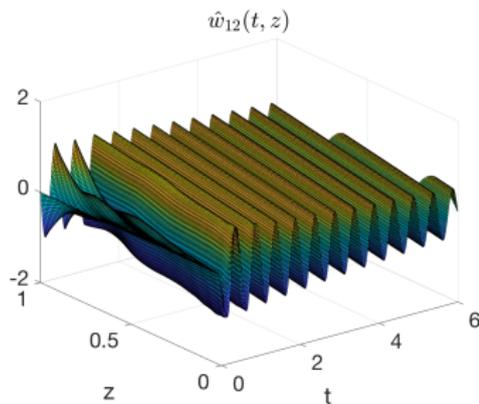


(b) Mesure  $y(t)$

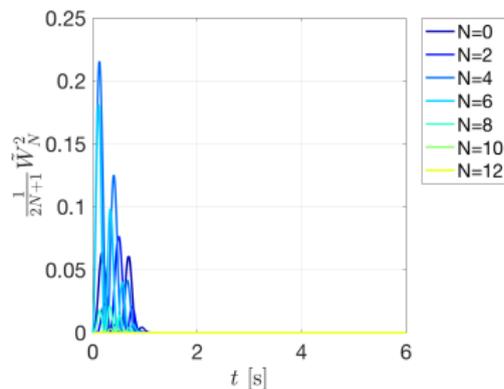
Figure 15: Système de dimension infinie

## Observation avec une condition initiale sinusoïdale

- Compromis :
- Précision-complexité  $\rightarrow N = 12$
  - Rapidité-robustesse  $\rightarrow \mu = 5$



(a) État reconstitué  $\hat{w}_N(t, z)$

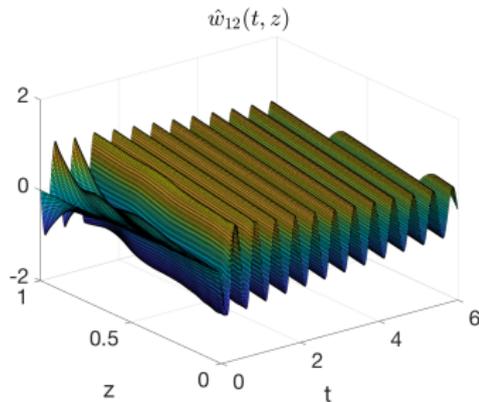


(b) Erreur due à l'estimation de chaque projeté  $\tilde{W}_{n=N}$

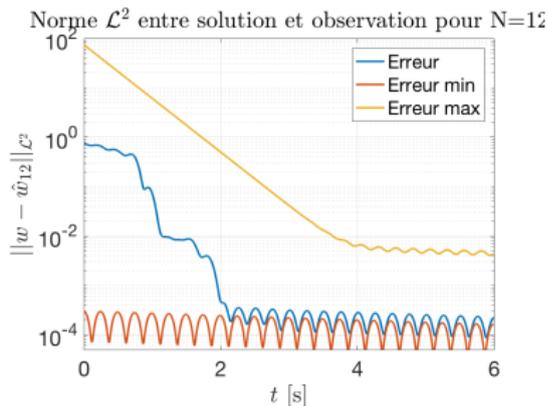
Figure 16: Observation de dimension finie du système de dimension infinie

# Observation avec une condition initiale sinusoïdale

- Compromis :
- Précision-complexité  $\rightarrow N = 12$
  - Rapidité-robustesse  $\rightarrow \mu = 5$



(a) État reconstitué  $\hat{w}_N(t, z)$

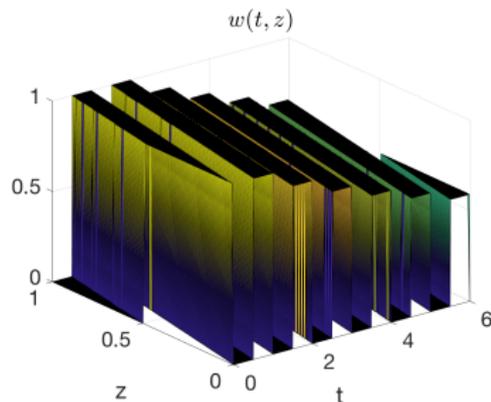


(c) Erreur entre  $w$  et  $\hat{w}_N$  en norme  $L^2$

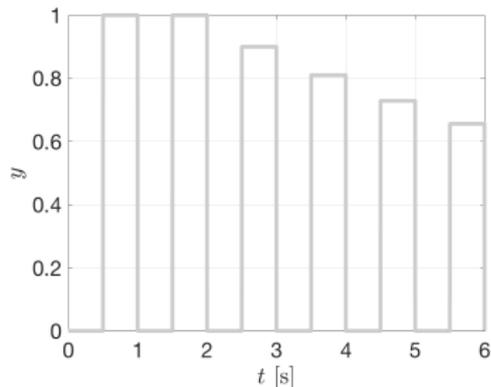
Figure 16: Observation de dimension finie du système de dimension infinie

## Système avec une condition initiale en créneau

Données :  $\Gamma = 1$ ,  $D = 0.9$  et  $y(t) = w(t, 1)$ .



(a) État  $w(t, z)$

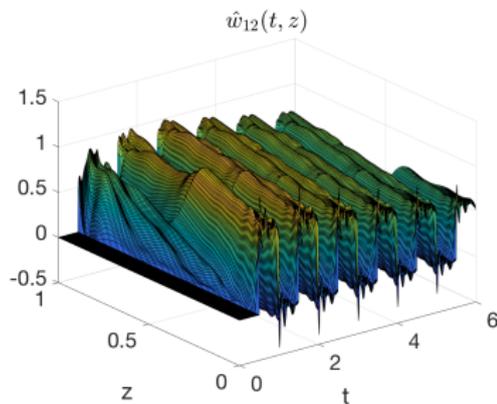


(b) Mesure  $y(t)$

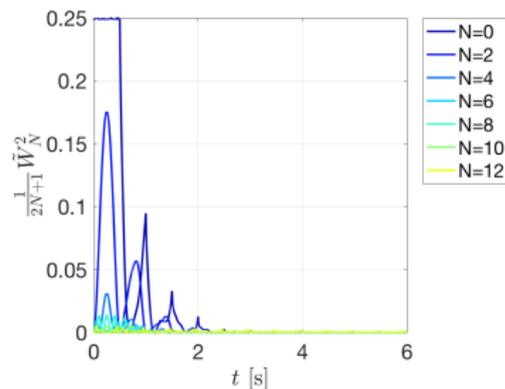
Figure 17: Système de dimension infinie

## Observation avec une condition initiale en créneau

- Compromis :
- Précision-complexité  $\rightarrow N = 12$
  - Rapidité-robustesse  $\rightarrow \mu = 1$



(a) État reconstitué  $\hat{w}_N(t, z)$

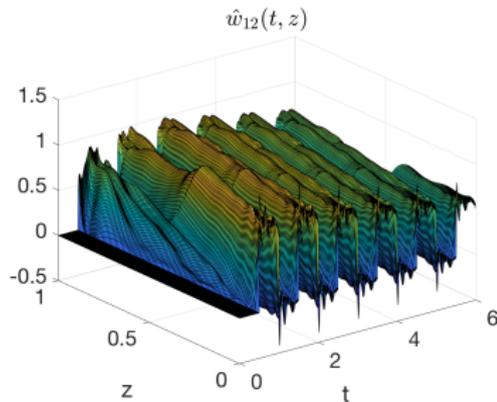


(b) Erreur due à l'estimation de chaque projeté  $\tilde{W}_{n=N}$

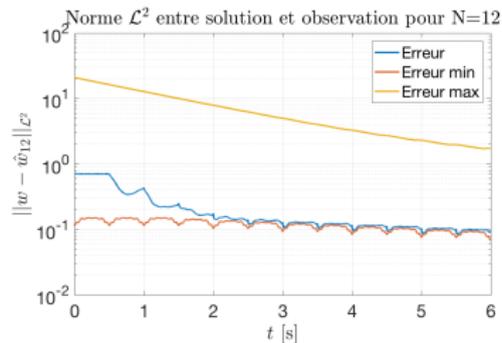
Figure 18: Observation de dimension finie du système de dimension infinie

## Observation avec une condition initiale en créneau

- Compromis :
- Précision-complexité  $\rightarrow N = 12$
  - Rapidité-robustesse  $\rightarrow \mu = 1$



(a) État reconstitué  $\hat{w}_N(t, z)$

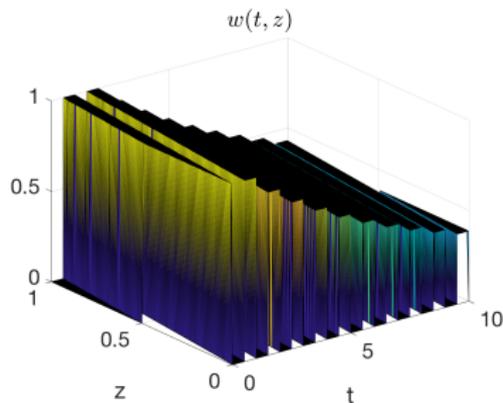


(c) Erreur entre  $w$  et  $\hat{w}_N$  en norme  $\mathcal{L}^2$

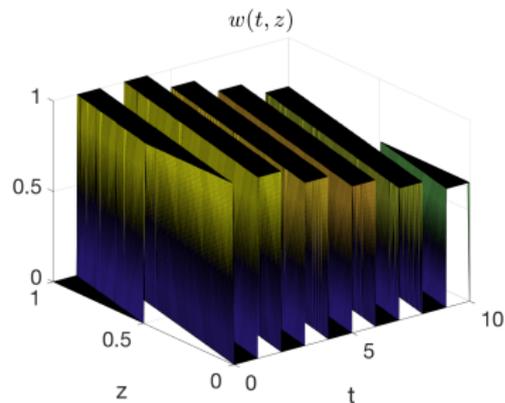
Figure 18: Observation de dimension finie du système de dimension infinie

## Système avec pour condition initiale deux créneaux

**Données :**  $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$  et  
 $y(t) = w\{1\}(t, 1) + w\{2\}(t, 1)$  ( $C = [1 \ 1]$ )



(a)  $w\{1\}(t, z)$



(b)  $w\{2\}(t, z)$

Figure 19: État  $w$  du système de dimension infinie

# Observation avec pour condition initiale deux créneaux

- Compromis :
- Précision-complexité  $\rightarrow N = 12$
  - Rapidité-robustesse  $\rightarrow \mu = 0.1$



Figure 20: État reconstitué  $\hat{w}_N$  à différents instants  $t_i \in \{0; 5; 5.5; 10\}$ s



Figure 21: Erreur due à l'estimation de chaque projeté  $\tilde{W}_{n=N}$

# Observation avec pour condition initiale deux créneaux

- Compromis :
- Précision-complexité  $\rightarrow N = 12$
  - Rapidité-robustesse  $\rightarrow \mu = 0.1$



Figure 20: État reconstitué  $\hat{w}_N$  à différents instants  $t_i \in \{0; 5; 5.5; 10\}$ s

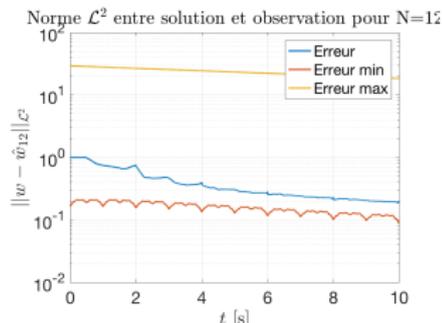


Figure 22: Erreur entre  $w$  et  $\hat{w}_N$  en norme  $\mathcal{L}^2$

# Bilan

**Travail** réalisé et **compétences** développées :

- Espace des solutions d'EDP (analyse fonctionnelle).
- Structure des observateurs (automatique, dimension finie/infinie).
- Critères de convergence d'erreur d'observation (théorie de Lyapunov, mise sous forme LMI).

**Résultat** obtenu : Synthèse d'un **observateur** de **dimension finie** pour l'**équation de transport** (simulation *Matlab*).

# Perspectives

Autres synthèses d'observateurs de **dimension finie** :

- **contraintes** plus fines pour  $K_N$ ,
- **base de projection** (Tchebychev, Riesz [Deu16], ondelettes [CH96]),
- autres **EDP**,
- systèmes couplés **ODE-EDP** [SBS17]; [BSG17]; [Bar+18].

Merci pour votre attention.  
Des questions?

## Annexe 1 : Dynamiques de dimension finie

- **Échantillonnage** : projection sur un peigne de Dirac

$$W_N = [w(z_0) \quad \dots \quad w(z_N)]^T \rightarrow w_N \quad A_N = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

- **Modes** : projection sur la base modale

$$W_N = [\dots \quad a_k \quad b_k \quad \dots]^T \rightarrow w_N \text{ série de Fourier tronquée.}$$

$$A_N = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix} \lambda_k \text{ valeurs propres à connaître}$$

- **Polynômes** : projection sur une base polynomiale [SG15]

$$W_N = [\dots \quad \bar{a}_k \quad \dots]^T \rightarrow w_N \text{ série de Fourier-Legendre tronquée.}$$

$$A_N = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

## Annexe 2 : Système de dimension finie approchant

Projetés dans la **base polynômiale de Legendre**  $W_N \in \mathbb{R}^{m(N+1)}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} W_N(t) = A_N W_N(t) + B_N \rho_N(t, 1) \quad (\text{EDO}) \\ W_N(0) = W_N^0 \in \mathbb{R}^{m(N+1)} \quad (\text{CI}) \\ y(t) = C_N W_N(t) + C \rho_N(t, 1) \end{array} \right.$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A}_N = \mathbb{I}_N (\mathbb{L}_N + (-\mathbf{1}_N + \mathbf{1}_N^* D) \mathbf{1}_N^T) \\ \mathbb{B}_N = \mathbb{I}_N (-\mathbf{1}_N + \mathbf{1}_N^* D) \\ \mathbb{C}_N = C \mathbf{1}_N^T \end{array} \right.$$

## Annexe 2 : Système de dimension finie approchant

Projetés dans la **base polynômiale de Legendre**  $W_N \in \mathbb{R}^{m(N+1)}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} W_N(t) = A_N W_N(t) + B_N \rho_N(t, 1) \quad (\text{EDO}) \\ W_N(0) = W_N^0 \in \mathbb{R}^{m(N+1)} \quad (\text{CI}) \\ y(t) = C_N W_N(t) + C \rho_N(t, 1) \end{array} \right.$$

Système de **dimension finie** approchant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} W_N^{sim}(t) = A_N W_N^{sim}(t) \quad (\text{EDO}) \\ W_N^{sim}(0) = W_N^0 \in \mathbb{R}^{m(N+1)} \quad (\text{CI}) \\ y^{sim}(t) = C_N W_N^{sim}(t) \end{array} \right.$$

## Annexe 3 : Conditions d'observabilité

La paire  $(C_N, A_N)$  est observable ssi (critère de Hautus [Hau69]) :  
 Pour tout  $s \in \mathbb{C}$ ,

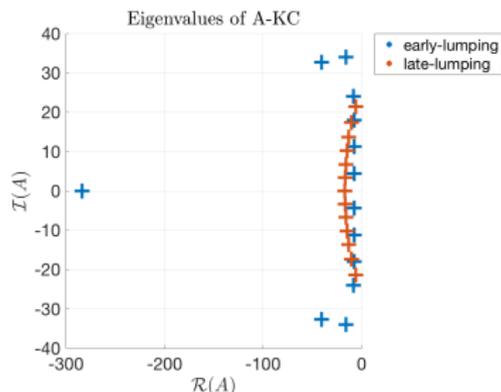
$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} sI_{m(N+1)} - A_N \\ C_N \end{bmatrix} = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} sI_m + \Gamma(I_m - D) & -sI_m & O_m & O_m \\ 3sI_m & 2(3\Gamma - sI_m) & -sI_m & O_m \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ O_m & O_m & \frac{2N+1}{2N-1} sI_m & 2\left((2N+1)\Gamma - \frac{s}{2N-1} I_m\right) \\ C & O_{pm} & \dots & O_{pm} \end{bmatrix}$$

$$= m(N+1)$$

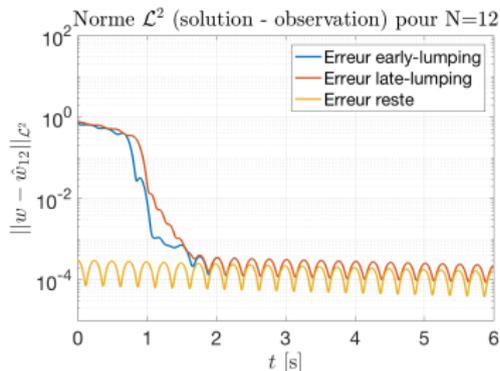
Pour  $\Gamma = \gamma I_m$ ,  $(C_N, A_N)$  observable ssi  $(C, D)$  observable.

# Annexe 4 : Comparaison avec un observateur connu

- Compromis :
- Précision-complexité  $\rightarrow N = 12$
  - Rapidité-robustesse  $\rightarrow \mu = 10$



(a) Placement des pôles de  $A_N - K_N C_N$

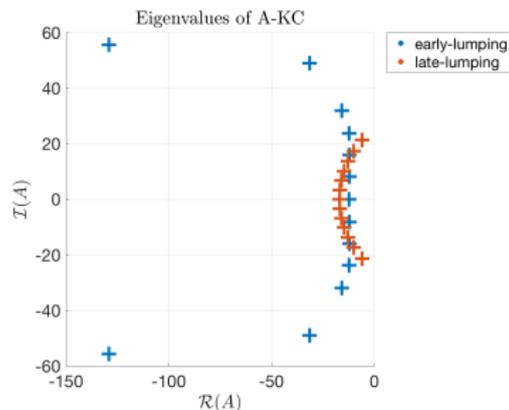


(c) Erreur entre  $w$  et  $\hat{w}_N$  en norme  $\mathcal{L}^2$

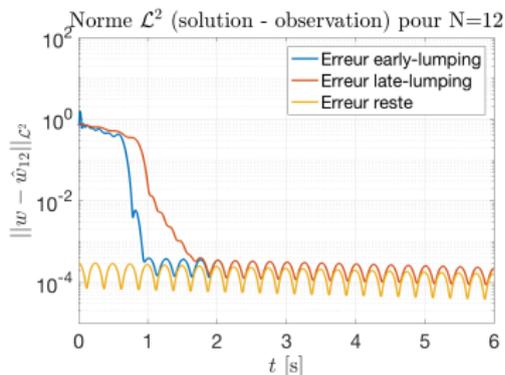
Figure 23: Observation de dimension finie par late-lumping et early-lumping

# Annexe 4 : Comparaison avec un observateur connu

- Compromis :
- Précision-complexité  $\rightarrow N = 12$
  - Rapidité-robustesse  $\rightarrow \mu = 20$



(b) Placement des pôles de  $A_N - K_N C_N$



(d) Erreur entre  $w$  et  $\hat{w}_N$  en norme  $\mathcal{L}^2$

Figure 23: Observation de dimension finie par late-lumping et early-lumping