Réponse fréquentielle des systèmes linéaires invariants

Yassine Ariba

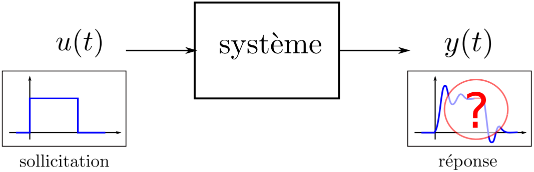
Dpt GEI - INSA, Toulouse.

Automatique des systèmes linéaires

Pré-requis

Pour cette leçon, il est nécessaire d'être à l'aise avec les notions de :

- transformée de Laplace
- représentation des systèmes LTI par fonction de transfert
- réponse temporelle



Il est conseillé d'avoir en tête

- dans le cours d'électronique : régime sinusoïdal

Intérêt ?

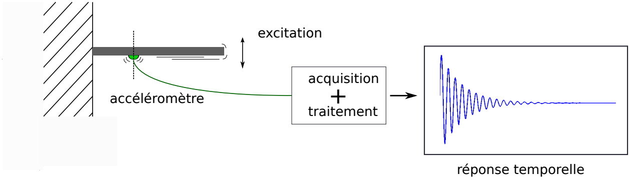
Réponse fréquentielle $\Rightarrow$ comment réagit le système en fonction des caractéristiques fréquentielles du signal d'entrée ?

Intérêt ?

Réponse fréquentielle $\Rightarrow$ comment réagit le système en fonction des caractéristiques fréquentielles du signal d'entrée ?

Exemple : analyse modale de structures

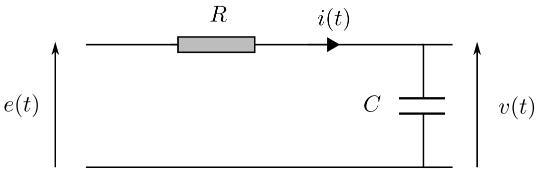
Mesure de la réponse d'une structure mécanique à une excitation.



$\Rightarrow$ Objectif : estimer les fréquences de résonance d'une structure mécanique.

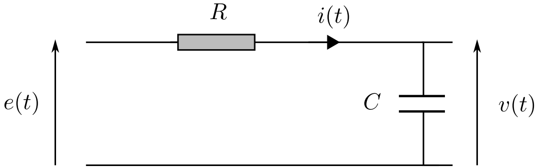
Exemple introductif

Soit un circuit RC



Exemple introductif

Soit un circuit RC



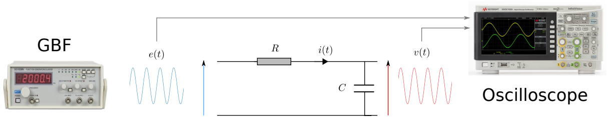
Régime sinusoïdal :

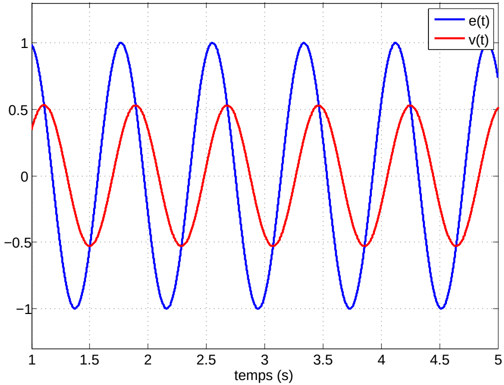
$$\begin{cases} e(t) = e_m \sin(\omega t) \\ v(t) = v_m \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

- Sinusoïde en entrée $\Rightarrow$ sinusoïde en sortie de même pulsation

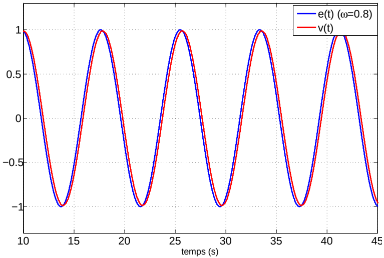
  mais d'amplitude et de phase différentes

Pour $R = 1k\Omega$ et $C = 200\mu F$, appliquons une tension $e(t) = \sin(8t)$

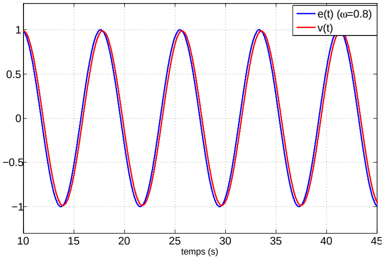


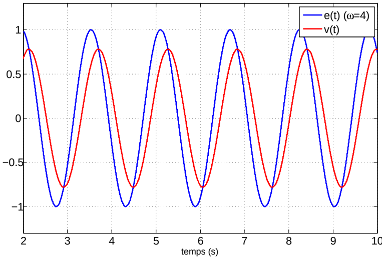


Testons les réponses du circuit pour les pulsations $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$ en rad/s

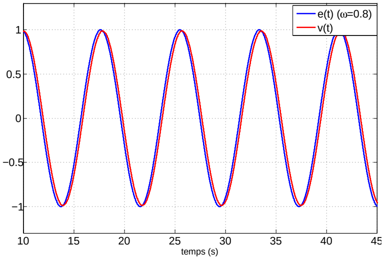


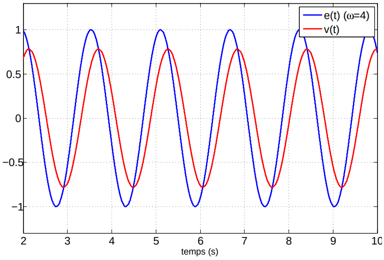
Testons les réponses du circuit pour les pulsations $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$ en rad/s

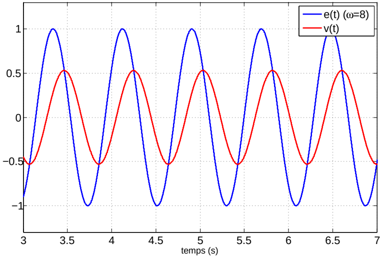




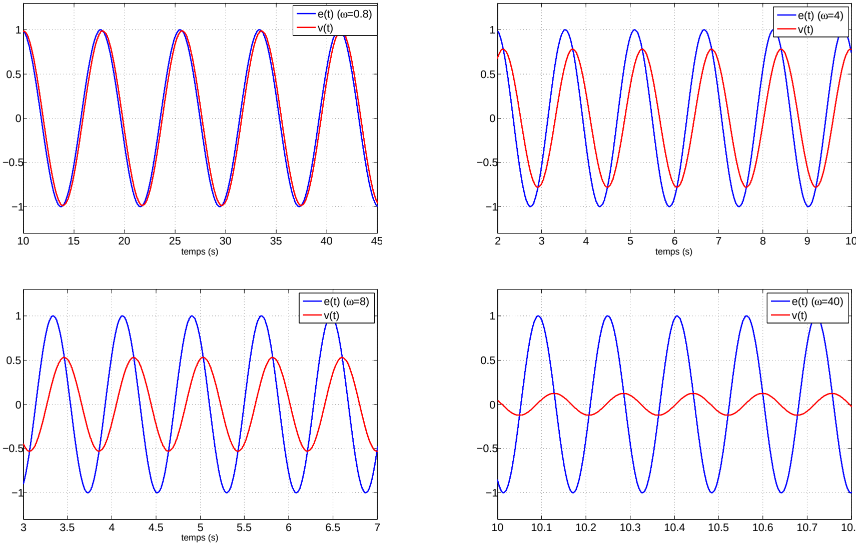
Testons les réponses du circuit pour les pulsations $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$ en rad/s







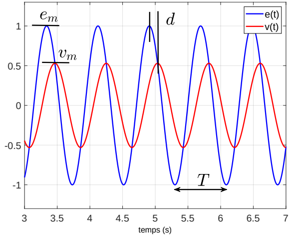
Testons les réponses du circuit pour les pulsations $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$ en rad/s



Selon la pulsation, l'amplitude et la phase changent

Traçons :

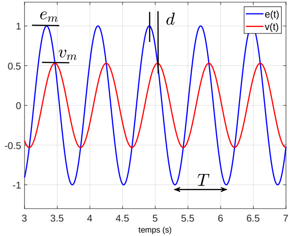
- le **gain** (en dB) : $\text{gain}_{dB} = 20 \log \left| \frac{v_m}{e_m} \right|$
- le **déphasage** (en deg) : $\phi = \frac{d}{T} 360$

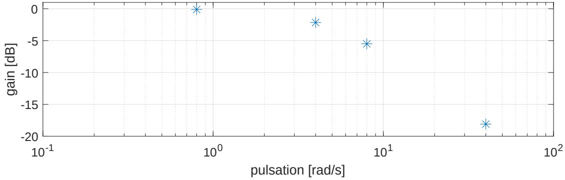


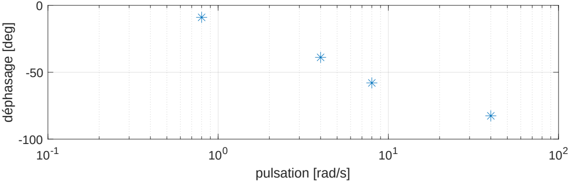
Selon la pulsation, l'amplitude et la phase changent

Traçons :

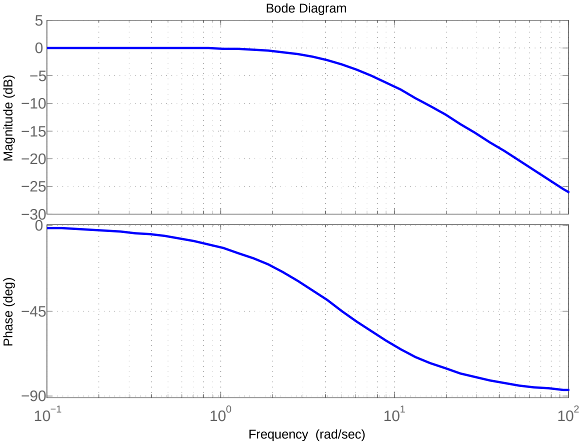
- le **gain** (en dB) : $\text{gain}_{dB} = 20 \log \left| \dfrac{v_m}{e_m} \right|$
- le **déphasage** (en deg) : $\phi = \dfrac{d}{T} 360$







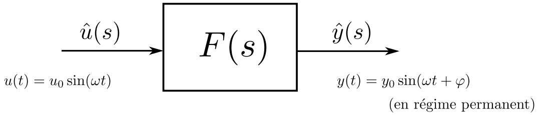
En répétant l'opération pour toutes les pulsations entre $0.1 rad/s$ et $100 rad/s$



$\Rightarrow$ Cette représentation graphique est le diagramme de Bode

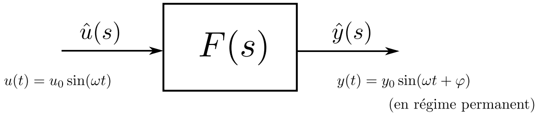
Cas général des systèmes LTI

Définition : la réponse fréquentielle d'un système LTI est définie comme l'ensemble des réponses du système en régime permanent à des entrées sinusoïdales en fonction de la pulsation



Cas général des systèmes LTI

Définition : la réponse fréquentielle d'un système LTI est définie comme l'ensemble des réponses du système en régime permanent à des entrées sinusoïdales en fonction de la pulsation



La réponse fréquentielle est caractérisée par

- son amplification : $\dfrac{y_0}{u_0} = |F(j\omega)|$ (sans unité)
- son déphasage : $360\dfrac{d}{T} = \arg F(j\omega)$ (en deg)

Calculons la réponse d'une fonction de transfert stable

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)} \quad \text{à l'entrée} \quad \hat{u}(s) = u_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Calculons la réponse d'une fonction de transfert stable

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)} \quad \text{à l'entrée} \quad \hat{u}(s) = u_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

La sortie s'écrit :

$$\hat{y}(s) = F(s) u_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{A_1}{s+p_1} + \cdots + \frac{A_n}{s+p_n} + \frac{B_1}{s+j\omega} + \frac{B_2}{s-j\omega}$$

Calculons la réponse d'une fonction de transfert stable

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)} \quad \text{à l'entrée} \quad \hat{u}(s) = u_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

La sortie s'écrit :

$$\hat{y}(s) = F(s) u_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{A_1}{s+p_1} + \cdots + \frac{A_n}{s+p_n} + \frac{B_1}{s+j\omega} + \frac{B_2}{s-j\omega}$$

Quelle est l'expression temporelle de la fonction $\hat{f}(s) = \dfrac{1}{s+a}$?
($\forall t \geq 0$)

(A) $f(t) = a\,t$

(B) $f(t) = e^{-at}$

(C) $f(t) = \sin(a\,t)$

(D) $f(t) = t^a$

Calculons la réponse d'une fonction de transfert stable

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)} \quad \text{à l'entrée} \quad \hat{u}(s) = u_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

La sortie s'écrit :

$$\hat{y}(s) = F(s) u_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{A_1}{s+p_1} + \cdots + \frac{A_n}{s+p_n} + \frac{B_1}{s+j\omega} + \frac{B_2}{s-j\omega}$$

Quelle est l'expression temporelle de la fonction $\hat{f}(s) = \dfrac{1}{s+a}$?
$(\forall t \geq 0)$

(A) $f(t) = a\,t$

(B) $f(t) = e^{-at}$

(C) $f(t) = \sin(a\,t)$

(D) $f(t) = t^a$

Calculons la réponse d'une fonction de transfert stable

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)} \qquad \text{à l'entrée} \qquad \hat{u}(s) = u_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

La sortie s'écrit :

$$\hat{y}(s) = F(s) u_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{A_1}{s+p_1} + \cdots + \frac{A_n}{s+p_n} + \frac{B_1}{s+j\omega} + \frac{B_2}{s-j\omega}$$

En temporel :

$$y(t) = A_1 e^{-p_1 t} + \cdots + A_2 e^{-p_n t} + B_1 e^{-j\omega t} + B_2 e^{j\omega t}$$

Pour un système stable, en régime permanent :

$$y_{RP}(t) = B_1 e^{-j\omega t} + B_2 e^{j\omega t} \qquad \text{avec} \qquad \left\{ \begin{array}{l} B_1 = F(s) \dfrac{u_0 \omega}{s^2+\omega^2}(s+j\omega)\Big|_{s=-j\omega} = \dfrac{u_0 F(-j\omega)}{-2j} \\ B_2 = F(s) \dfrac{u_0 \omega}{s^2+\omega^2}(s-j\omega)\Big|_{s=j\omega} = \dfrac{u_0 F(j\omega)}{2j} \end{array} \right.$$

Calculons la réponse d'une fonction de transfert stable

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)} \qquad \text{à l'entrée} \qquad \hat{u}(s) = u_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

La sortie s'écrit :

$$\hat{y}(s) = F(s) u_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{A_1}{s+p_1} + \cdots + \frac{A_n}{s+p_n} + \frac{B_1}{s+j\omega} + \frac{B_2}{s-j\omega}$$

En temporel :

$$y(t) = A_1 e^{-p_1 t} + \cdots + A_2 e^{-p_n t} + B_1 e^{-j\omega t} + B_2 e^{j\omega t}$$

Pour un système stable, en régime permanent :

$$y_{RP}(t) = B_1 e^{-j\omega t} + B_2 e^{j\omega t} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} B_1 = F(s) \dfrac{u_0 \omega}{s^2+\omega^2}(s+j\omega)\Big|_{s=-j\omega} = \dfrac{u_0 F(-j\omega)}{-2j} \\ B_2 = F(s) \dfrac{u_0 \omega}{s^2+\omega^2}(s-j\omega)\Big|_{s=j\omega} = \dfrac{u_0 F(j\omega)}{2j} \end{cases}$$

$$y_{RP}(t) = u_0 |F(j\omega)| \left(\frac{e^{j\phi} e^{j\omega t} - e^{-j\phi} e^{-j\omega t}}{2j} \right) = \underbrace{u_0 |F(j\omega)|}_{y_0} \sin(\omega t + \varphi)$$

Représentations graphiques

$F(j\omega)$ est une fonction complexe de la pulsation ω

- le diagramme de Bode,

  $\hookrightarrow$ 2 graphes, gain et phase en fonction de ω

- le diagramme de Black-Nichols.

  $\hookrightarrow$ gain en fonction de la phase

- le diagramme de Nyquist,

  $\hookrightarrow$ plan complexe

Représentations graphiques

$F(j\omega)$ est une fonction complexe de la pulsation ω

- le diagramme de Bode,

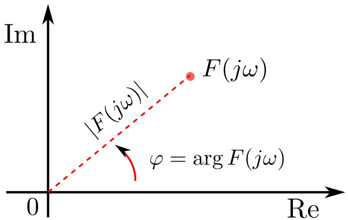
  $\hookrightarrow$ 2 graphes, gain et phase en fonction de ω

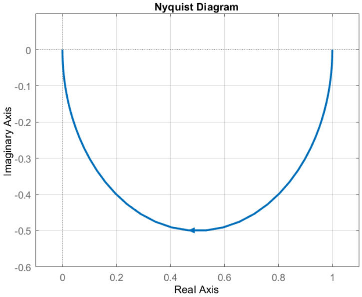
- le diagramme de Black-Nichols.

  $\hookrightarrow$ gain en fonction de la phase

- le diagramme de Nyquist,

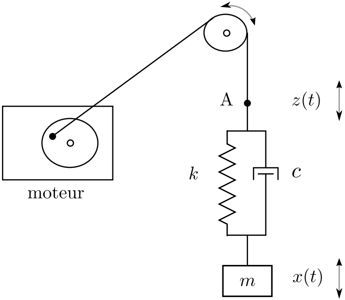
  $\hookrightarrow$ plan complexe





Exemple

Oscillations forcées d'un pendule

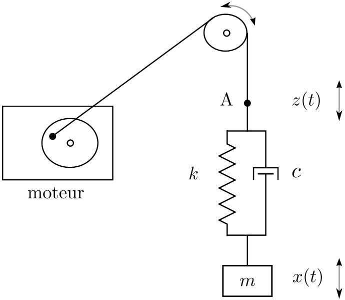


Fonction de transfert :

$$\frac{\hat{x}(s)}{\hat{z}(s)} = \frac{60}{s^2 + 3s + 60}$$

Exemple

Oscillations forcées d'un pendule



Fonction de transfert :

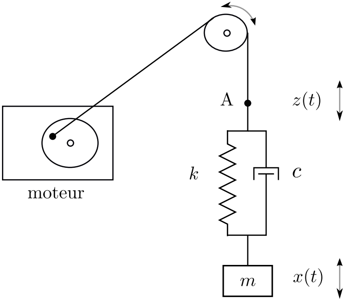
$$\frac{\hat{x}(s)}{\hat{z}(s)} = \frac{60}{s^2 + 3s + 60}$$

$s \to j\omega$

$$F(j\omega) = \frac{60}{-\omega^2 + 3\omega j + 60}$$

Exemple

Oscillations forcées d'un pendule



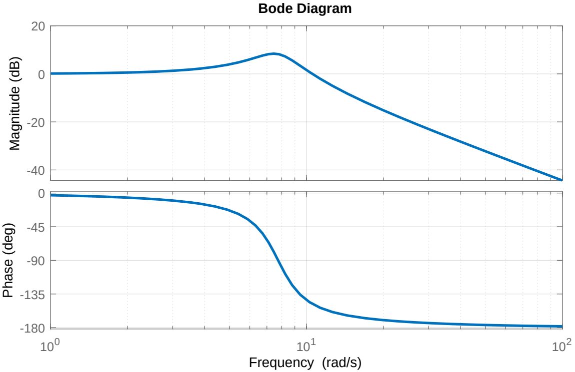
Fonction de transfert :

$$\frac{\hat{x}(s)}{\hat{z}(s)} = \frac{60}{s^2 + 3s + 60}$$

$s \to j\omega$

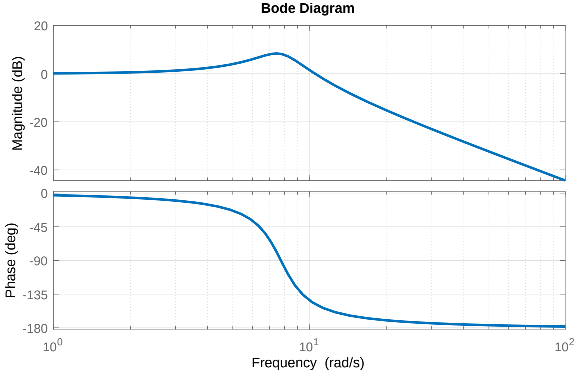
$$F(j\omega) = \frac{60}{-\omega^2 + 3\omega j + 60}$$

$$\text{gain} = \frac{60}{\sqrt{(60-\omega^2)^2 + 9\omega^2}} \qquad \text{et} \qquad \text{déphasage} = \arg \frac{60}{60 - \omega^2 + 3\omega j}$$



Tracé facile avec MATLAB :

```
>> G = tf(60,[1 3 60]);
>> bode(G)
```



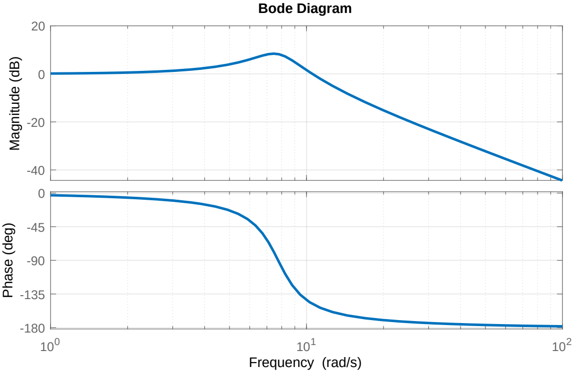
Comment se comporte la masse pour une excitation à $\omega = 7$ rad/s ?

(A) la masse et le point A ont la même amplitude d'oscillation

(B) la masse ne bouge pas

(C) les oscillations de la masse sont plus amples que celle du point A

(D) la masse et le point A sont en phase



Comment se comporte la masse pour une excitation à $\omega = 7$ rad/s ?

(A) la masse et le point A ont la même amplitude d'oscillation

(B) la masse ne bouge pas

(C) les oscillations de la masse sont plus amples que celle du point A

(D) la masse et le point A sont en phase

Pour la prochaine fois...

Reprendre l'exemple du système mécanique avec oscillations forcées

- Calculer le gain et le déphasage en $\omega = 7$ rad/s
- Vérifier vos calculs en simulant (Simulink) la réponse à $z(t) = \sin(7t)$
- Tracer et interpréter le diagramme de Nyquist correspondant

Des ressources sur moodle

Des exemples sur MATLAB Central

Des questions ?

ariba@insa-toulouse.fr