

# Candidature aux fonctions de Maître de Conférences

**Yassine ARIBA**

Audition, 10 mai 2021

Mise en situation

**Leçon : Réponse fréquentielle**

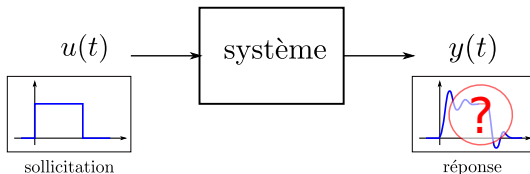
# Réponse fréquentielle

## des systèmes linéaires invariants

# Pré-requis

Pour cette leçon, il est nécessaire d'être à l'aise avec les notions de :

- ▶ transformée de Laplace
- ▶ représentation des systèmes LTI par fonction de transfert
- ▶ réponse temporelle



Il est conseillé d'avoir en tête

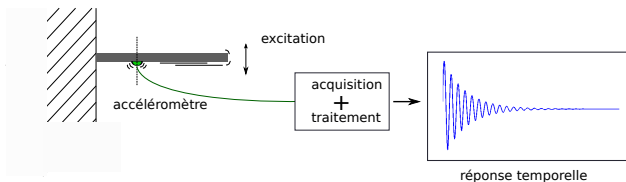
- ▶ dans le cours d'électronique : régime sinusoïdal

## Intérêt ?

Réponse fréquentielle  $\Rightarrow$  comment réagit le système en fonction des caractéristiques fréquentielles du signal d'entrée ?

Exemple : analyse modale de structures

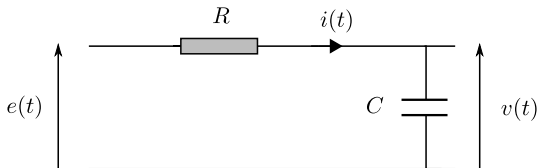
Mesure de la réponse d'une structure mécanique à une excitation.



$\Rightarrow$  Objectif : estimer les fréquences de résonance d'une structure mécanique.

## Exemple introductif

Soit un circuit RC

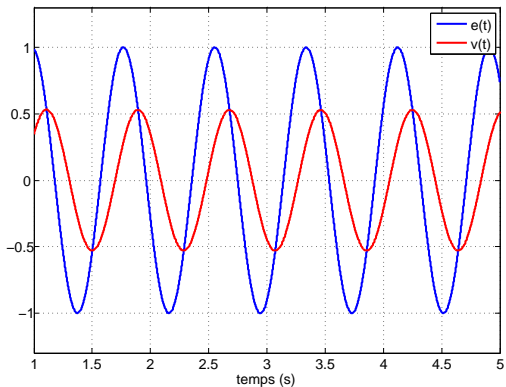
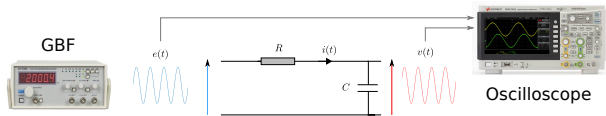


Régime sinusoïdal :

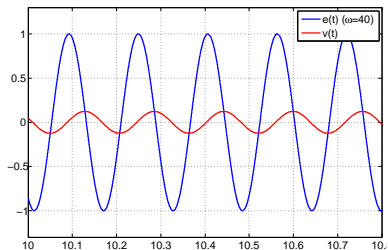
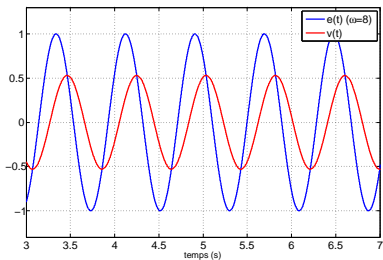
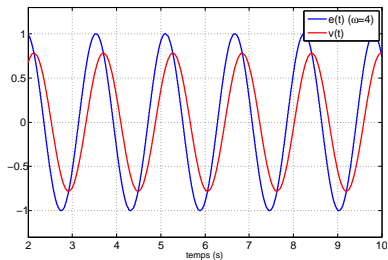
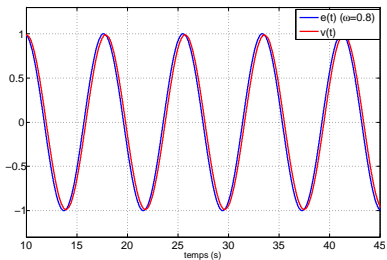
$$\begin{cases} e(t) = e_m \sin(\omega t) \\ v(t) = v_m \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

- Sinusoïde en entrée  $\Rightarrow$  sinusoïde en sortie de même pulsation  
mais d'amplitude et de phase différentes

Pour  $R = 1k\Omega$  et  $C = 200\mu F$ , appliquons une tension  $e(t) = \sin(8t)$



Testons les réponses du circuit pour les pulsations  $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$  en rad/s

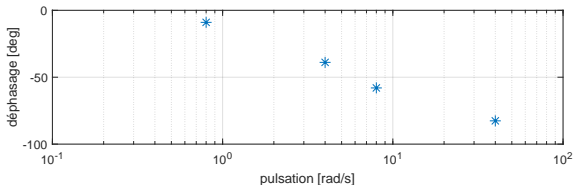
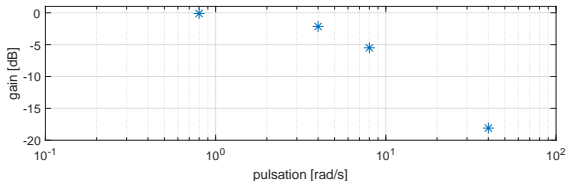
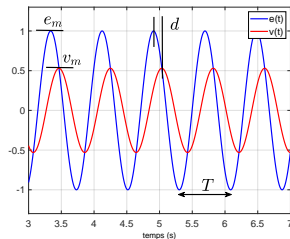


Selon la pulsation, l'amplitude et la phase changent

Traçons :

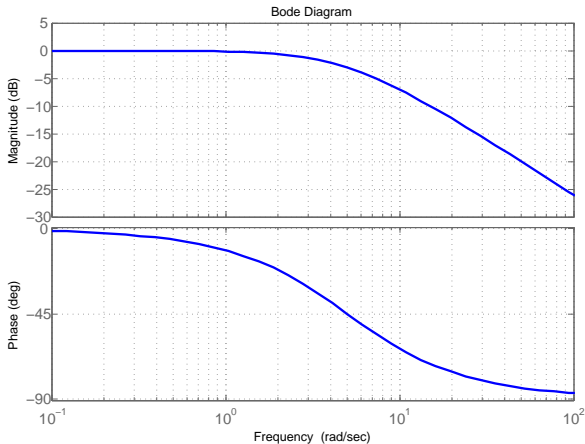
► le **gain** (en dB) :  $\text{gain}_{dB} = 20 \log \left| \frac{v_m}{e_m} \right|$

► le **déphasage** (en deg) :  $\phi = \frac{d}{T} 360$



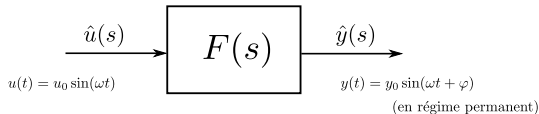


En répétant l'opération pour toutes les pulsations entre  $0.1\text{rad/s}$  et  $100\text{rad/s}$



⇒ Cette représentation graphique est le diagramme de Bode

**Définition** : la réponse fréquentielle d'un système LTI est définie comme l'ensemble des réponses du système en régime permanent à des entrées sinusoïdales en fonction de la pulsation



La réponse fréquentielle est caractérisée par

- ▶ son amplification :  $\frac{y_0}{u_0} = |F(j\omega)|$  (sans unité)
- ▶ son déphasage :  $360 \frac{d}{T} = \arg F(j\omega)$  (en deg)



Calculons la réponse d'une fonction de transfert stable

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s + p_1) \cdots (s + p_n)} \quad \text{à l'entrée} \quad \hat{u}(s) = u_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

La sortie s'écrit :

$$\hat{y}(s) = F(s)u_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A_1}{s + p_1} + \cdots + \frac{A_n}{s + p_n} + \frac{B_1}{s + j\omega} + \frac{B_2}{s - j\omega}$$

En temporel :

$$y(t) = A_1 e^{-p_1 t} + \cdots + A_n e^{-p_n t} + B_1 e^{-j\omega t} + B_2 e^{j\omega t}$$

Pour un système stable, en régime permanent :

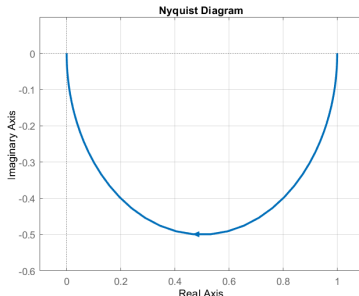
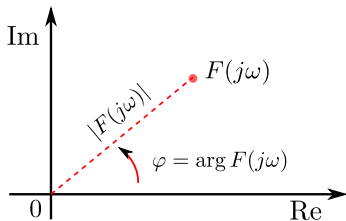
$$y_{RP}(t) = B_1 e^{-j\omega t} + B_2 e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} B_1 = F(s) \frac{u_0 \omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = \frac{u_0 F(-j\omega)}{-2j} \\ B_2 = F(s) \frac{u_0 \omega}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{u_0 F(j\omega)}{2j} \end{cases}$$

$$y_{RP}(t) = u_0 |F(j\omega)| \left( \frac{e^{j\phi} e^{j\omega t} - e^{-j\phi} e^{-j\omega t}}{2j} \right) = \underbrace{u_0 |F(j\omega)|}_{y_0} \sin(\omega t + \varphi)$$

## Représentations graphiques

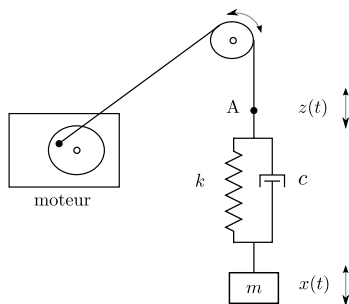
$F(j\omega)$  est une fonction complexe de la pulsation  $\omega$

- ▶ le diagramme de Bode,
  - ↪ 2 graphes, gain et phase en fonction de  $\omega$
- ▶ le diagramme de Black-Nichols.
  - ↪ gain en fonction de la phase
- ▶ le diagramme de Nyquist,
  - ↪ plan complexe



## Exemple

### Oscillations forcées d'un pendule



Fonction de transfert :

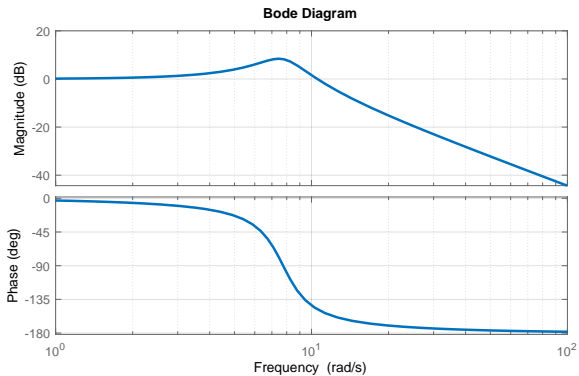
$$\frac{\hat{x}(s)}{\hat{z}(s)} = \frac{60}{s^2 + 3s + 60}$$

$$s \rightarrow j\omega$$

$$F(j\omega) = \frac{60}{-\omega^2 + 3j\omega + 60}$$

$$\text{gain} = \frac{60}{\sqrt{(60 - \omega^2)^2 + 9\omega^2}} \quad \text{et}$$

$$\text{déphasage} = \arg \frac{60}{60 - \omega^2 + 3j\omega}$$



Tracé facile avec MATLAB :

```
>> G = tf(60,[1 3 60]);  
>> bode(G)
```

## Pour la prochaine fois...

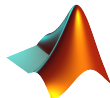
Reprendre l'exemple du système mécanique avec oscillations forcées

- ▶ Calculer le gain et le déphasage en  $\omega = 7$  rad/s
- ▶ Vérifier vos calculs en simulant (Simulink) la réponse à  $z(t) = \sin(7t)$
- ▶ Tracer et interpréter le diagramme de Nyquist correspondant

Des ressources sur  
moodle



Des exemples sur  
MATLAB Central



Des questions?

`ariba@insa-toulouse.fr`