L'art et la manière de faire monde

Recherche Opérationnelle

Yassine ARIBA

Sommaire

Introduction

Sommaire

Introduction

Recherche opérationnelle

$\Leftrightarrow$

résolution de problèmes d'**optimisation**

Introduction

Recherche opérationnelle

$\Leftrightarrow$

résolution de problèmes d'**optimisation**

$\Leftrightarrow$

aide à la décision

Origine

En 1940, au cours de la seconde guerre mondiale, le gouvernement anglais charge Patrick Blackett de diriger une équipe de *recherche* pour résoudre certains problèmes tels que

- l'implantation optimale de radars de surveillance,
- la gestion des convois d'approvisionnement.

Le terme *opérationnelle* vient du fait que le travail du groupe était lié à des *opérations* militaires.

Origine

En 1940, au cours de la seconde guerre mondiale, le gouvernement anglais charge Patrick Blackett de diriger une équipe de *recherche* pour résoudre certains problèmes tels que

- l'implantation optimale de radars de surveillance,
- la gestion des convois d'approvisionnement.

Le terme *opérationnelle* vient du fait que le travail du groupe était lié à des *opérations* militaires.

Après la guerre, ces techniques se sont considérablement développées du fait de

- la multiplication des domaines d'application,
- l'explosion des capacités de calcul des ordinateurs.

La RO est généralement est liée à plusieurs domaines :

Mathématiques appliquées, Informatique, Économie

La RO est généralement est liée à plusieurs domaines :

Mathématiques appliquées, Informatique, Économie

Les applications sont nombreuses :

- les chaînes logistiques, la planification,
- la gestion de production, l'ordonnancement, la gestion des stocks,
- les problèmes d'ingénierie, les réseaux de télécommunication,
- etc...

Programmation linéaire

Sommaire

Exemples introductifs

Exemple 1 : problème de production

Un boulanger prépare tous les matins des croissants et des pains au chocolat

il utilise 3 matières premières : farine, beurre et sucre

	farine (kg)	beurre (kg)	sucre (kg)
croissant ($1kg$)	0.4	0.4	0
pain au chocolat ($1kg$)	0.4	0.2	0.1

- La vente de 1kg de croissants rapporte 15€.
- La vente de 1kg de pains au chocolat rapporte 10€.

Le boulanger possède en stock chaque jour :

- 12kg de farine,
- 8kg de beurre,
- 2.5kg de sucre.

- La vente de 1kg de croissants rapporte 15€.
- La vente de 1kg de pains au chocolat rapporte 10€.

Le boulanger possède en stock chaque jour :

- 12kg de farine,
- 8kg de beurre,
- 2.5kg de sucre.

★ Question : combien faut-il fabriquer de croissants et pains au chocolat pour avoir le maximum de bénéfice ?

Analysons le problème :

variables :

$x_1 \quad \rightarrow \quad$ nombre de kilo de croissants

$x_2 \quad \rightarrow \quad$ nombre de kilo de pains au chocolat

le bénéfice est donné par : $z = 15x_1 + 10x_2$

On est contraint par les stocks de matières

- quantité de farine utilisable : $0.4x_1 + 0.4x_2 \leq 12$
- quantité de beurre utilisable : $0.4x_1 + 0.2x_2 \leq 8$
- quantité de sucre utilisable : $0.1x_2 \leq 2.5$

Analysons le problème :

variables :

$x_1 \rightarrow$ nombre de kilo de croissants

$x_2 \rightarrow$ nombre de kilo de pains au chocolat

le bénéfice est donné par : $z = 15x_1 + 10x_2$

On est contraint par les stocks de matières

- quantité de farine utilisable : $0.4x_1 + 0.4x_2 \leq 12$
- quantité de beurre utilisable : $0.4x_1 + 0.2x_2 \leq 8$
- quantité de sucre utilisable : $0.1x_2 \leq 2.5$

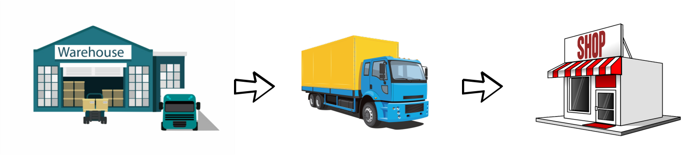
formulation du problème :

$$\max \quad z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} 0.4x_1 + 0.4x_2 &\leq 12 \\ 0.4x_1 + 0.2x_2 &\leq 8 \\ 0.1x_2 &\leq 2.5 \end{aligned}$$

Exemple 2 : problème de transport

Considérons 3 magasins, A, B et C, ayant commandés 200 containers de marchandises chacun.



Ces magasins sont approvisionnés par 2 dépôts :

- 250 containers sont disponibles au dépôt D_1,
- 450 containers sont disponibles au dépôt D_2.

Magasins et dépôts sont distants géographiquement.

Les coûts de transport par containers sont :

magasin	A	B	C
dépôt D_1	3.4	2.2	2.9
dépôt D_2	3.4	2.4	2.5

par exemple : le transport d'un container de D_1 vers A coute 3.4€

Magasins et dépôts sont distants géographiquement.

Les coûts de transport par containers sont :

magasin	A	B	C
dépôt D_1	3.4	2.2	2.9
dépôt D_2	3.4	2.4	2.5

par exemple : le transport d'un container de D_1 vers A coute 3.4€

★ Question : comment organiser le transport des dépôts vers les magasins pour minimiser le coût total ?

Analysons le problème :

variables :

$x_{1A} \quad \rightarrow \quad$ nombre de containers depuis le dépôt D_1 vers le magasin A
$x_{2A} \quad \rightarrow \quad$ nombre de containers depuis le dépôt D_2 vers le magasin A

(idem pour B et C : x_{1B}, x_{2B}, x_{1C}, x_{2C})

le coût total de transport est donné par :

$$z = 3.4x_{1A} + 3.4x_{2A} + 2.2x_{1B} + 2.4x_{2B} + 2.9x_{1C} + 2.5x_{2C}$$

les contraintes sont liées à la disponibilité des dépôts et à la demande des magasins

Analysons le problème :

variables :

$x_{1A} \rightarrow$ nombre de containers depuis le dépôt D_1 vers le magasin A
$x_{2A} \rightarrow$ nombre de containers depuis le dépôt D_2 vers le magasin A

(idem pour B et C : x_{1B}, x_{2B}, x_{1C}, x_{2C})

le coût total de transport est donné par :

$$z = 3.4x_{1A} + 3.4x_{2A} + 2.2x_{1B} + 2.4x_{2B} + 2.9x_{1C} + 2.5x_{2C}$$

les contraintes sont liées à la disponibilité des dépôts et à la demande des magasins

formulation du problème :

$$\min \quad z = 3.4x_{1A} + 3.4x_{2A} + 2.2x_{1B} + 2.4x_{2B} + 2.9x_{1C} + 2.5x_{2C}$$

$$\begin{aligned} x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} &\leq 250 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} &\leq 450 \\ x_{1A} + x_{2A} &= 200 \\ x_{1B} + x_{2B} &= 200 \\ x_{1C} + x_{2C} &= 200 \end{aligned}$$

2 problèmes différents $\rightarrow$ même formulation

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & z & = & 15x_1 + 10x_2 \\
 & & & \\
 & 0.4x_1 + 0.4x_2 & \leq & 12 \\
 & 0.4x_1 + 0.2x_2 & \leq & 8 \\
 & 0.1x_2 & \leq & 2.5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & z & = & 3.4x_{1A} + 3.4x_{2A} + 2.2x_{1B} \\
 & & & +2.4x_{2B} + 2.9x_{1C} + 2.5x_{2C} \\
 & & & \\
 & x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} & \leq & 250 \\
 & x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} & \leq & 450 \\
 & x_{1A} + x_{2A} & = & 200 \\
 & x_{1B} + x_{2B} & = & 200 \\
 & x_{1C} + x_{2C} & = & 200
\end{array}
$$

2 problèmes différents → même formulation

$$\max \quad z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\begin{array}{rcl} 0.4x_1 + 0.4x_2 & \leq & 12 \\ 0.4x_1 + 0.2x_2 & \leq & 8 \\ 0.1x_2 & \leq & 2.5 \end{array}$$

$$\min \quad z = 3.4x_{1A} + 3.4x_{2A} + 2.2x_{1B} + 2.4x_{2B} + 2.9x_{1C} + 2.5x_{2C}$$

$$\begin{array}{rcl} x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} & \leq & 250 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} & \leq & 450 \\ x_{1A} + x_{2A} & = & 200 \\ x_{1B} + x_{2B} & = & 200 \\ x_{1C} + x_{2C} & = & 200 \end{array}$$

- une fonction à optimiser (valeur min ou max)
- un ensemble d'inégalités / égalités

★ Question : existe-t-il une méthode générique pour résoudre ce problème ?

Formulation du problème

Optimisation d'une fonction $f(\cdot)$, dépendant de variables x_i devant satisfaire un ensemble de d'inégalités et/ou égalités.

$$opt \quad z = \quad f(x)$$

$$\begin{array}{rcl} g(x) & \leq & d \\ h(x) & = & b \end{array}$$

avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Formulation du problème

Optimisation d'une fonction $f(\cdot)$, dépendant de variables x_i devant satisfaire un ensemble de d'inégalités et/ou égalités.

$$
\begin{array}{rcl}
opt \quad z = & f(x) & \\
 & g(x) & \leq \quad d \\
 & h(x) & = \quad b
\end{array}
$$

avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Vocabulaire

- x_i : variables de décision,
- $f(\cdot)$: fonction coût, ou économique,
- $g(\cdot)$ et $h(\cdot)$: contraintes, donnent les solutions admissibles.

Problème de **programmation linéaire**

fonction économique

$$\left\{ \quad opt \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n \right.$$

contraintes inégalités

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \ldots + t_{1n}x_n & \leq & d_1 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \ldots + t_{2n}x_n & \leq & d_2 \\ & \vdots & \\ t_{m1}x_1 + t_{m2}x_2 + \ldots + t_{mn}x_n & \leq & d_m \end{array} \right.$$

contraintes égalités

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \ldots + a_{qn}x_n & = & b_q \end{array} \right.$$

non-négativité

$$\left\{ \quad x_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \right.$$

ou sous forme matrielle

$$\text{fonction économique} \quad \left\{ \quad opt \quad z = Cx \right.$$

$$\text{contraintes inégalités} \quad \left\{ \quad Tx \leq d \right.$$

$$\text{contraintes égalités} \quad \left\{ \quad Ax = b \right.$$

ou sous forme matrielle

$$\text{fonction économique} \quad \left\{ \quad opt \quad z = Cx \right.$$

$$\text{contraintes inégalités} \quad \left\{ \quad Tx \leq d \right.$$

$$\text{contraintes égalités} \quad \left\{ \quad Ax = b \right.$$

- *Programmation* = planification, organisation, plan d'action ($\neq$ informatique)
- *Linéaire* = les fonctions (objectif et contraintes) sont linéaires en x

Problème de **programmation linéaire**, retour sur l'exemple 1

$$\max \quad z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} 0.4x_1 + 0.4x_2 &\leq 12 \\ 0.4x_1 + 0.2x_2 &\leq 8 \\ 0.1x_2 &\leq 2.5 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_2 \geq 0$$

Problème de **programmation linéaire**, retour sur l'exemple 1

$$\max \quad z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} 0.4x_1 + 0.4x_2 &\leq 12 \\ 0.4x_1 + 0.2x_2 &\leq 8 \\ 0.1x_2 &\leq 2.5 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_2 \geq 0$$

ou encore

$$\max \quad z = \begin{bmatrix} 15 & 10 \end{bmatrix} x$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} x &\leq \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 2.5 \end{bmatrix} \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Méthode et interprétation graphique

Pour des problèmes à 2 variables $\rightarrow$ résolution graphique possible

- contraintes tracées dans le plan (x_1, x_2)
- visualisation de l'espace des solutions admissibles
- détermination du point (x_1^*, x_2^*) optimisant la fonction économique.

Méthode et interprétation graphique

Pour des problèmes à 2 variables → résolution graphique possible

- contraintes tracées dans le plan (x_1, x_2)
- visualisation de l'espace des solutions admissibles
- détermination du point (x_1^*, x_2^*) optimisant la fonction économique.

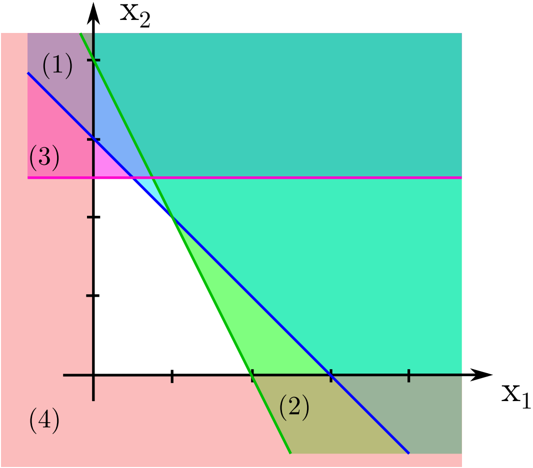
Réécrivons le problème de l'exemple 1 :

$$\max \quad z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 30 && (1) \\ 2x_1 + x_2 &\leq 40 && (2) \\ x_2 &\leq 25 && (3) \\ x_i &\geq 0 \qquad i = \{1, 2\} && (4) \end{aligned}$$

Représentons dans le plan (x_1, x_2), les 4 contraintes.

Représentons dans le plan (x_1, x_2), les 4 contraintes.



$\Rightarrow$ Nous pouvons visualiser l'espace des solutions admissibles.

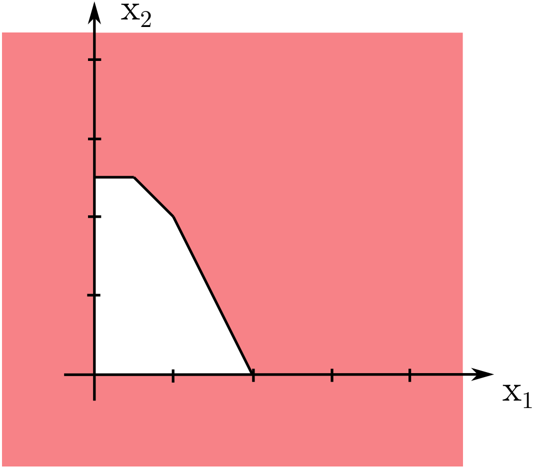
$\Rightarrow$ Quel point choisir ?

fonction objectif : $z = 15x_1 + 10x_2$

soit : $x_2 = -\dfrac{3}{2}x_1 + \dfrac{z}{10}$

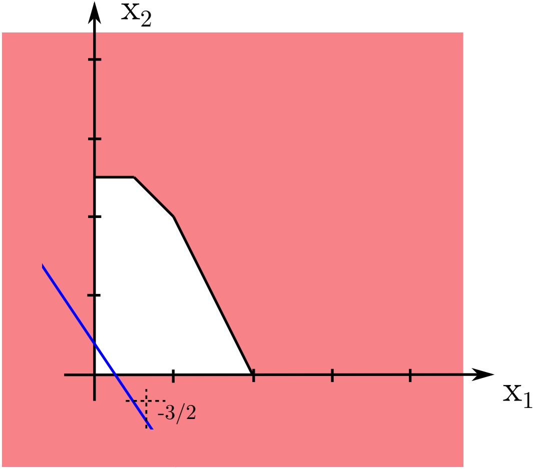
fonction objectif : $z = 15x_1 + 10x_2$

soit : $x_2 = -\dfrac{3}{2}x_1 + \dfrac{z}{10}$



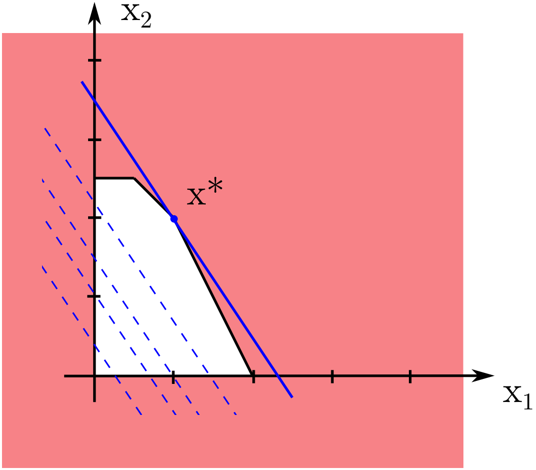
fonction objectif : $z = 15x_1 + 10x_2$

soit : $x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{z}{10}$



fonction objectif : $z = 15x_1 + 10x_2$

soit : $x_2 = -\dfrac{3}{2}x_1 + \dfrac{z}{10}$



x^* est le point (x_1^*, x_2^*) qui maximise le bénéfice z.

La solution x^* est appelée la **solution optimale**.

- Solution à l'intersection des contraintes (1)-(2) : $(x_1^*, x_2^*) = (10, 20)$
- Bénéfice maximal : $z = 350€$.

x^* est le point (x_1^*, x_2^*) qui maximise le bénéfice z.

La solution x^* est appelée la **solution optimale**.

- Solution à l'intersection des contraintes (1)-(2) : $(x_1^*, x_2^*) = (10, 20)$
- Bénéfice maximal : $z = 350€$.

Bénéfice dans d'autres cas :

- équilibre entre les produits $\rightarrow x_1 = x_2 = 13$

$\Rightarrow z = 325€$ perte de 7%

x^* est le point (x_1^*, x_2^*) qui maximise le bénéfice z.

La solution x^* est appelée la **solution optimale**.

- Solution à l'intersection des contraintes (1)-(2) : $(x_1^*, x_2^*) = (10, 20)$
- Bénéfice maximal : $z = 350$€.

Bénéfice dans d'autres cas :

- équilibre entre les produits $\rightarrow x_1 = x_2 = 13$

  $\Rightarrow z = 325$€ perte de 7%

- maximum de croissants $\rightarrow x_1 = 20$ et $x_2 = 0$

  $\Rightarrow z = 300$€ perte de 14%

x^* est le point (x_1^*, x_2^*) qui maximise le bénéfice z.

La solution x^* est appelée la **solution optimale**.

- Solution à l'intersection des contraintes (1)-(2) : $(x_1^*, x_2^*) = (10, 20)$
- Bénéfice maximal : $z = 350$€.

Bénéfice dans d'autres cas :

- équilibre entre les produits $\rightarrow x_1 = x_2 = 13$

  $\Rightarrow z = 325$€ perte de 7%

- maximum de croissants $\rightarrow x_1 = 20$ et $x_2 = 0$

  $\Rightarrow z = 300$€ perte de 14%

- maximum de pains au chocolat $\rightarrow x_1 = 0$ et $x_2 = 25$

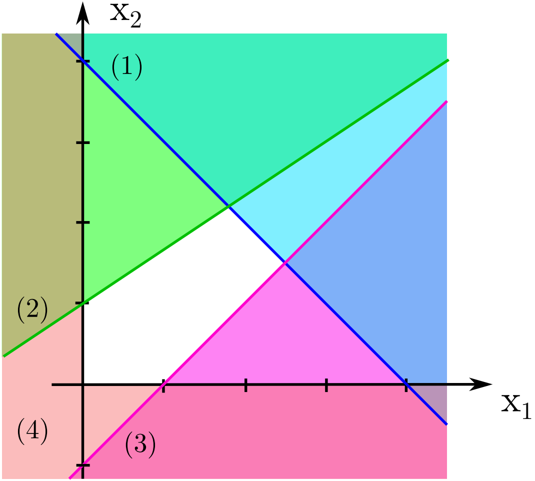
  $\Rightarrow z = 250$€ perte de 29%

Exemple 3 :

$$\max \quad z = 6x_1 + 5x_2$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 8 && (1)\\
-2x_1 + 3x_2 &\leq 6 && (2)\\
x_1 - x_2 &\leq 2 && (3)\\
x_i &\geq 0 \qquad i = 1, 2 && (4)
\end{aligned}
$$

Représentons dans le plan (x_1, x_2), les 4 contraintes.

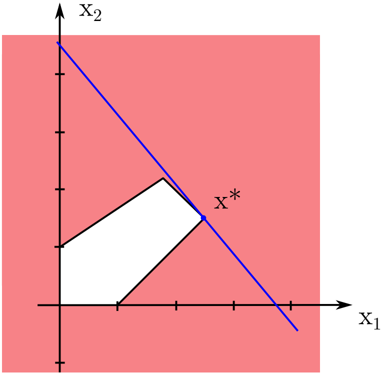


fonction objectif : $z = 6x_1 + 5x_2$

soit : $x_2 = -\dfrac{6}{5}x_1 + \dfrac{z}{5}$

fonction objectif : $z = 6x_1 + 5x_2$

soit : $x_2 = -\frac{6}{5}x_1 + \frac{z}{5}$



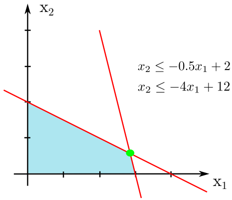
- Solution à l'intersection des contraintes (1)-(3) : $(x_1^*, x_2^*) = (5, 3)$
- Valeur optimale : $z = 45$.

Existence d'une solution optimale

Quatre possibilités

Existence d'une solution optimale

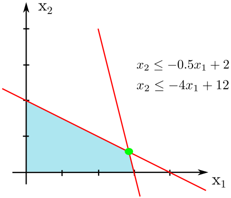
Quatre possibilités, exemple : max $z = x_1 + x_2$



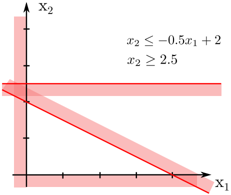
une solution unique

Existence d'une solution optimale

Quatre possibilités, exemple : max $z = x_1 + x_2$



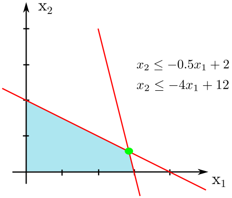
une solution unique



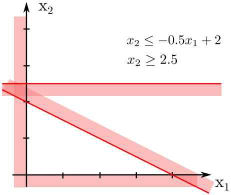
aucune solution

Existence d'une solution optimale

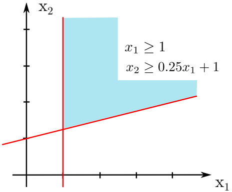
Quatre possibilités, exemple : max $z = x_1 + x_2$



une solution unique



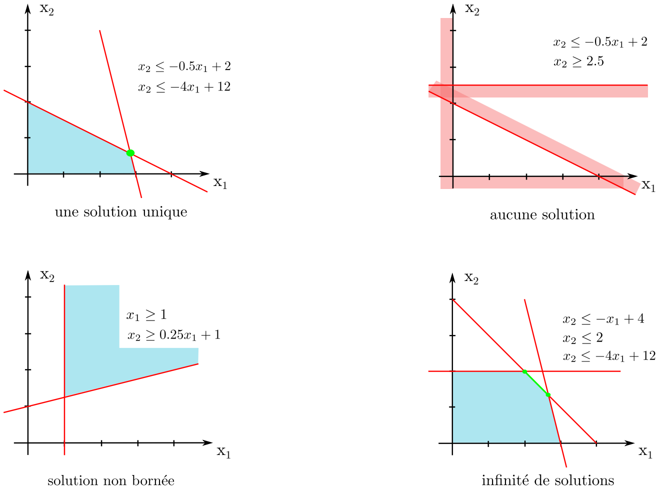
aucune solution



solution non bornée

Existence d'une solution optimale

Quatre possibilités, exemple : max $z = x_1 + x_2$

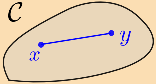


Algorithme du simplexe

Commençons par quelques définitions...

Un ensemble $\mathcal{C}$ est **convexe** ssi le segment de droite entre 2 points quelconques x, y de $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{C}$.

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad x,\ y\ \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)x + \lambda y \in \mathcal{C}$$

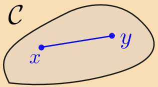


Algorithme du simplexe

Commençons par quelques définitions...

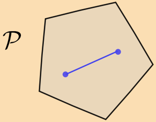
Un ensemble $\mathcal{C}$ est **convexe** ssi le segment de droite entre 2 points quelconques x, y de $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{C}$.

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad x,\ y\ \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)x + \lambda y \in \mathcal{C}$$



Un nombre fini d'inégalités linéaires définissent un **polyèdre convexe** $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \leq b\}$$



Un point x_e d'un ensemble convexe $\mathcal{C}$ est un *point extrême* s'il n'existe pas 2 points distincts x, y de $\mathcal{C}$ tels que x_e appartienne à la droite (x, y).

Les points extrêmes d'un polyèdre convexe sont ses sommets.

Un point x_e d'un ensemble convexe $\mathcal{C}$ est un *point extrême* s'il n'existe pas 2 points distincts x, y de $\mathcal{C}$ tels que x_e appartienne à la droite (x, y).

Les points extrêmes d'un polyèdre convexe sont ses sommets.

Théorème

Si le polyèdre formé par l'ensemble des solutions admissibles d'un problème de PL est borné, alors il existe au moins une solution optimale et l'une d'elles est sur un sommet.

Un point x_e d'un ensemble convexe $\mathcal{C}$ est un *point extrême* s'il n'existe pas 2 points distincts x, y de $\mathcal{C}$ tels que x_e appartienne à la droite (x, y).

Les points extrêmes d'un polyèdre convexe sont ses sommets.

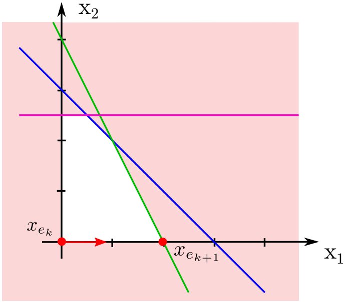
Théorème

Si le polyèdre formé par l'ensemble des solutions admissibles d'un problème de PL est borné, alors il existe au moins une solution optimale et l'une d'elles est sur un sommet.

★ Pour trouver l'optimum, il "suffit" alors d'examiner les sommets de la région des solutions admissibles.

Première idée d'un algorithme

1. Se positionner sur une point extrême x_{e_k} de la zone admissible
2. Déterminer une arêtes le long de laquelle l'objectif augmente
3. S'il n'en existe pas, x_{e_k} est optimal, FIN
4. Sinon se déplacer le long de l'arête jusqu'au point extrême $x_{e_{k+1}}$ suivant
5. S'il n'en existe pas, le problème est non borné, FIN
6. Sinon $x_{e_k} \longleftarrow x_{e_{k+1}}$ et aller à 2



Retour sur le problème de PL

Formulation :

fonction économique $\left\{ \quad opt \quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots c_n x_n \right.$

contraintes inégalités $\left\{ \begin{array}{lcl} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \ldots + t_{1n}x_n & \leq & d_1 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \ldots + t_{2n}x_n & \leq & d_2 \\ & \vdots & \\ t_{m1}x_1 + t_{m2}x_2 + \ldots + t_{mn}x_n & \leq & d_m \end{array} \right.$

non-négativité $\left\{ \quad x_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \right.$

n variables de décision, m contraintes

Forme standard du problème de PL

Les inégalités sont transformées en égalités avec l'introduction de variables d'écart

$$3x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 12 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x_1 + x_2 + 5x_3 + e = 12 \qquad e \geq 0$$

Forme standard du problème de PL

Les inégalités sont transformées en égalités avec l'introduction de variables d'écart

$$3x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 12 \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1 + x_2 + 5x_3 + e = 12 \qquad e \geq 0$$

fonction économique
$$\left\{ \; opt \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n \right.$$

contraintes
$$\left\{ \begin{array}{rcl} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \dots + t_{1n}x_n + e_1 & = & d_1 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \dots + t_{2n}x_n + e_2 & = & d_2 \\ & \vdots & \\ t_{m1}x_1 + t_{m2}x_2 + \dots + t_{mn}x_n + e_m & = & d_m \end{array} \right.$$

non-négativité
$$\left\{ \begin{array}{lcll} x_i & \geq & 0 & i = 1, \dots, n \\ e_j & \geq & 0 & j = 1, \dots, m \end{array} \right.$$

Notons n le nombre de variables total : var. initiales x_i + var. d'écart e_j.

Notons x la concaténation des x_i et e_j.
Le problème se réécrit sous la forme :

$$opt \quad z = cx$$

$$\begin{array}{rcl} Tx & = & d \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

Notons n le nombre de variables total : var. initiales x_i + var. d'écart e_j.

Notons x la concaténation des x_i et e_j.
Le problème se réécrit sous la forme :

$$opt \quad z = cx$$

$$\begin{array}{rcl} Tx & = & d \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

Exemple 1

$$\begin{array}{lrcl} \max & z & = & 15x_1 + 10x_2 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 30 \\ & 2x_1 + x_2 & \leq & 40 \\ & x_2 & \leq & 25 \\ & x_1 \text{ et } x_2 & \geq & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \max \quad z = [15\ 10\ 0\ 0\ 0]x \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 25 \end{bmatrix} \\ x \geq 0 \end{array}$$

Si une variable d'écart est nulle ($e_j = 0$), la contrainte j est vérifiée à l'égalité

$\Rightarrow$ *contrainte saturée*, ou *active*

Si une variable d'écart est nulle ($e_j = 0$), la contrainte j est vérifiée à l'égalité

$\Rightarrow$ *contrainte saturée*, ou *active*

La forme standard est un système d'équations linéaires

$$\underbrace{T}_{m\times(n+m)}\ \underbrace{x}_{(n+m)\times 1} = \underbrace{d}_{m\times 1}$$

soit m équations, $(n+m)$ inconnues

Si une variable d'écart est nulle ($e_j = 0$), la contrainte j est vérifiée à l'égalité

$\Rightarrow$ *contrainte saturée*, ou *active*

La forme standard est un système d'équations linéaires

$$\underbrace{T}_{m\times(n+m)} \underbrace{x}_{(n+m)\times 1} = \underbrace{d}_{m\times 1}$$

soit m équations, $(n+m)$ inconnues

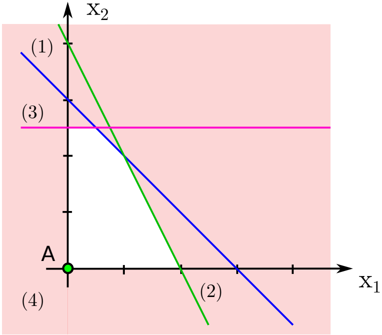
Si on annule n variables $\Rightarrow$ il reste un système à m équations, m inconnues

Posons $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$.

$$\max \quad z = 15 \times 0 + 10 \times 0$$

$$\begin{aligned} 0 + 0 + x_3 &= 30 & (1) \\ 2 \times 0 + 0 + x_4 &= 40 & (2) \\ 0 + x_5 &= 25 & (3) \end{aligned}$$

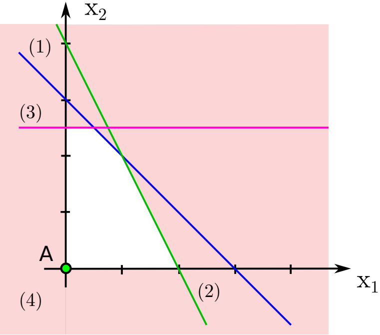
$$x_i \geq 0 \qquad i = \{1, \ldots, 5\} \qquad (4)$$



Posons $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$.

$$\max \quad z = 15 \times 0 + 10 \times 0$$

$$\begin{aligned} 0 + 0 + x_3 &= 30 & (1) \\ 2 \times 0 + 0 + x_4 &= 40 & (2) \\ 0 + x_5 &= 25 & (3) \\ x_i &\geq 0 \quad i = \{1, \dots, 5\} & (4) \end{aligned}$$



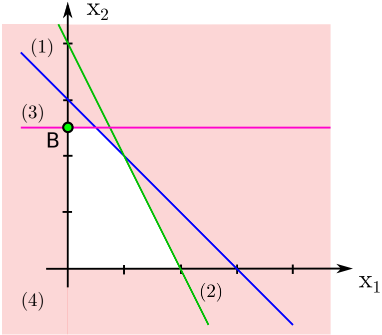
$$\Rightarrow \text{solution} \begin{cases} x_3 = 30 \\ x_4 = 40 \\ x_5 = 25 \end{cases} \quad \text{(solution admissible)}$$

$\Rightarrow$ correspond au sommet A

Posons $x_1 = 0$ et $x_5 = 0$.

$$\max \quad z = 15 \times 0 + 10 x_2$$

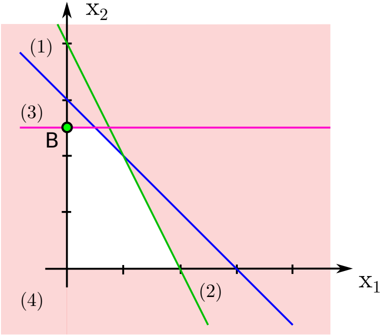
$$
\begin{aligned}
0 + x_2 + x_3 &= 30 && (1)\\
2 \times 0 + x_2 + x_4 &= 40 && (2)\\
x_2 + 0 &= 25 && (3)\\
x_i &\geq 0 \quad i = \{1, \ldots, 5\} && (4)
\end{aligned}
$$



Posons $x_1 = 0$ et $x_5 = 0$.

$$\max \quad z = 15\times 0 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} 0 + x_2 + x_3 &= 30 & (1)\\ 2\times 0 + x_2 + x_4 &= 40 & (2)\\ x_2 + 0 &= 25 & (3)\\ x_i &\geq 0 \quad i = \{1,\ldots,5\} & (4) \end{aligned}$$



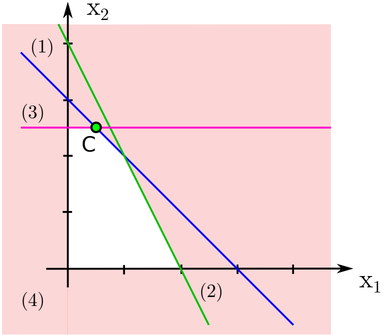
$\Rightarrow$ solution $\begin{cases} x_2 = 25 \\ x_4 = 15 \\ x_5 = 5 \end{cases}$ (solution admissible)

$\Rightarrow$ correspond au sommet B

Posons $x_3 = 0$ et $x_5 = 0$.

$$\max \quad z = 15x_1 + 10x_2$$

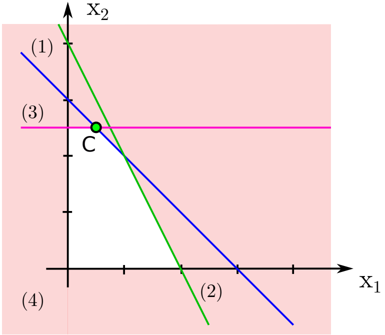
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 0 &= 30 && (1) \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 40 && (2) \\ x_2 + 0 &= 25 && (3) \\ x_i &\geq 0 \quad i = \{1, \dots, 5\} && (4) \end{aligned}$$



Posons $x_3 = 0$ et $x_5 = 0$.

$$\max \quad z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 0 &= 30 & (1)\\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 40 & (2)\\ x_2 + 0 &= 25 & (3)\\ x_i \geq 0 \quad i &= \{1, \ldots, 5\} & (4) \end{aligned}$$



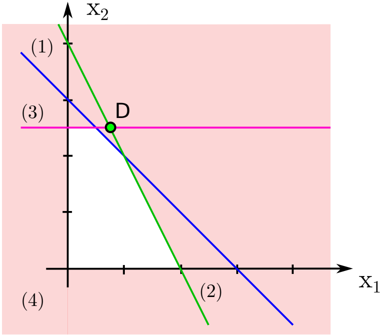
$\Rightarrow$ solution $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 25 \\ x_4 = 5 \end{cases}$ (solution admissible)

$\Rightarrow$ correspond au sommet C

Posons $x_4 = 0$ et $x_5 = 0$.

$$\max \quad z = 15x_1 + 10x_2$$

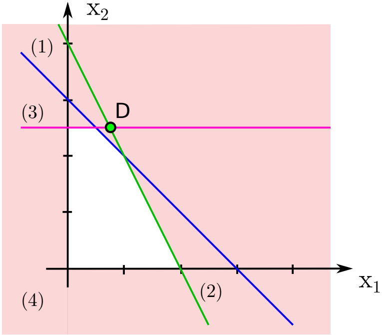
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 30 & (1)\\ 2x_1 + x_2 + 0 &= 40 & (2)\\ x_2 + 0 &= 25 & (3)\\ x_i &\geq 0 \quad i = \{1, \dots, 5\} & (4) \end{aligned}$$



Posons $x_4 = 0$ et $x_5 = 0$.

$$\max \quad z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 30 \qquad (1) \\ 2x_1 + x_2 + 0 &= 40 \qquad (2) \\ x_2 + 0 &= 25 \qquad (3) \\ x_i &\geq 0 \quad i = \{1, \dots, 5\} \qquad (4) \end{aligned}$$



$\Rightarrow$ solution $\begin{cases} x_1 = 7.5 \\ x_2 = 25 \\ x_3 = -2.5 \end{cases}$ (solution <u>non</u> admissible)

$\Rightarrow$ correspond au point D

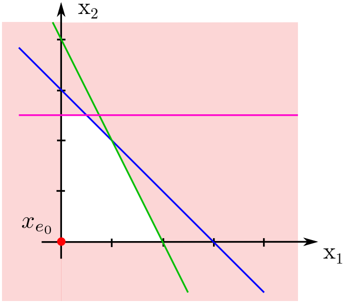
Commentaires :

- Le problème de PL s'écrit comme un système à m équations et $(n+m)$ variables
- En annulant n variables, on obtient un système à m équations et m variables
- Si la matrice associée est de rang m, il y a une solution unique
- Si les composantes sont positives, la solution est admissible
- Solution admissible = sommet

Déroulement pas à pas de l'algorithme

On se positionne sur un point extrême initial x_{e_0} : $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$

$$\begin{aligned} z &= 15x_1 + 10x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 30 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 40 \\ x_2 + x_5 &= 25 \end{aligned}$$



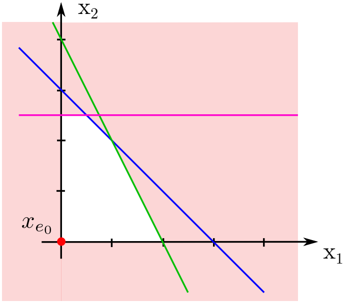
Déroulement pas à pas de l'algorithme

On se positionne sur un point extrême initial x_{e_0} : $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$

$$\begin{aligned} z &= 15x_1 + 10x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 30 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 40 \\ x_2 + x_5 &= 25 \end{aligned}$$

x_3, x_4, x_5 sont appelées les variables de **base**

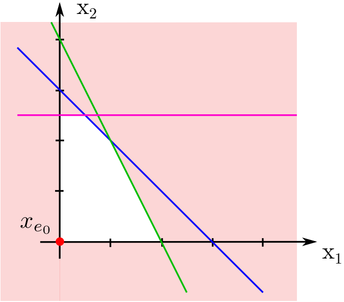
$$\begin{aligned} z &= 15x_1 + 10x_2 \\ x_3 &= 30 - x_1 - x_2 \\ x_4 &= 40 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 &= 25 - x_2 \end{aligned}$$



Déroulement pas à pas de l'algorithme

On se positionne sur un point extrême initial x_{e_0} : $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$

$$\begin{aligned} z &= 15x_1 + 10x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 30 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 40 \\ x_2 + x_5 &= 25 \end{aligned}$$



x_3, x_4, x_5 sont appelées les variables de **base**

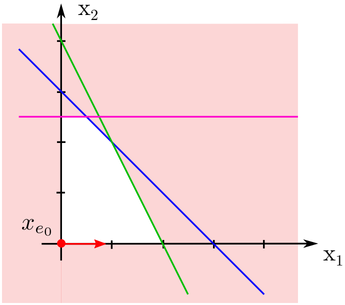
$$\begin{aligned} z &= 15x_1 + 10x_2 \\ x_3 &= 30 - x_1 - x_2 \\ x_4 &= 40 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 &= 25 - x_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow z = 0$, comment améliorer la solution ?

Déroulement pas à pas de l'algorithme

On peut jouer sur x_1 (coefficient plus intéressant par rapport à x_2)

$\hookrightarrow$ jusqu'où augmenter x_1 ?

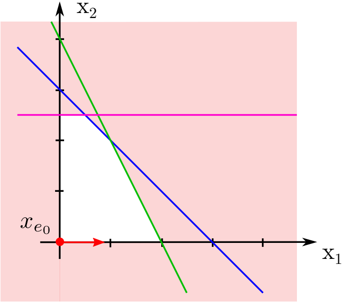


Déroulement pas à pas de l'algorithme

On peut jouer sur x_1 (coefficient plus intéressant par rapport à x_2)

$\hookrightarrow$ jusqu'où augmenter x_1 ?

$$\begin{aligned} x_3 &= 30 - x_1 - x_2 && \Rightarrow x_1 \leq 30 \\ x_4 &= 40 - 2x_1 - x_2 && \Rightarrow x_1 \leq 20 \\ x_5 &= 25 - x_2 && \Rightarrow x_1 \leq +\infty \end{aligned}$$

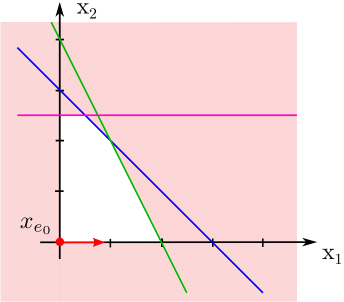


Déroulement pas à pas de l'algorithme

On peut jouer sur x_1 (coefficient plus intéressant par rapport à x_2)

$\hookrightarrow$ jusqu'où augmenter x_1 ?

$$\begin{aligned} x_3 &= 30 - x_1 - x_2 && \Rightarrow x_1 \leq 30 \\ x_4 &= 40 - 2x_1 - x_2 && \Rightarrow x_1 \leq 20 \\ x_5 &= 25 - x_2 && \Rightarrow x_1 \leq +\infty \end{aligned}$$



On pose $x_1 = 20$, et donc $x_4 = 0$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ll} x_1 & \text{passe dans la base} \\ x_4 & \text{devient hors base} \end{array} \right.$$

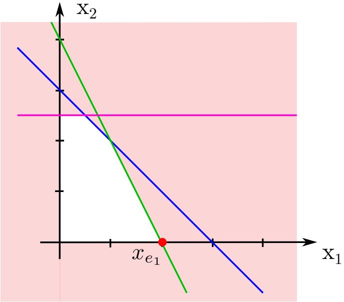
$$z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 30 - x_1 - x_2 \\ x_4 &= 40 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 &= 25 - x_2 \end{aligned}$$

Déroulement pas à pas de l'algorithme

Nous obtenons un nouveau point extrême x_{e_1} : $x_2 = 0$ et $x_4 = 0$

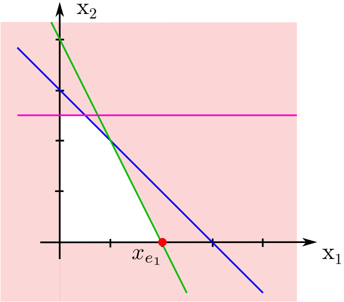
$$
\begin{aligned}
z &= 300 - \frac{15}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_2 \\
x_3 &= 10 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_2 \\
x_1 &= 20 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_2 \\
x_5 &= 25 - x_2
\end{aligned}
$$



Déroulement pas à pas de l'algorithme

Nous obtenons un nouveau point extrême x_{e_1} : $x_2 = 0$ et $x_4 = 0$

$$\begin{aligned} z &= 300 - \frac{15}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_2 \\ x_3 &= 10 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_1 &= 20 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_5 &= 25 - x_2 \end{aligned}$$

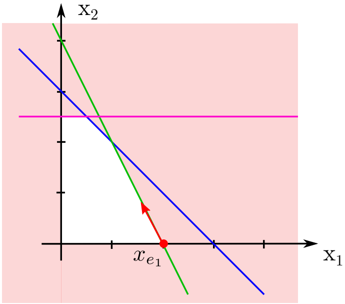


$\Rightarrow z = 300$, comment améliorer la solution ?

Déroulement pas à pas de l'algorithme

On peut jouer sur x_2 (dégradation avec x_4)

$\hookrightarrow$ jusqu'où augmenter x_2 ?

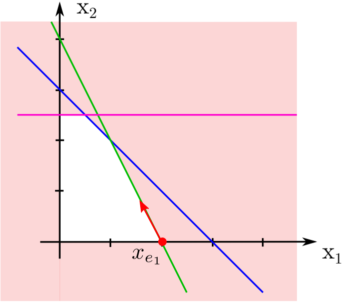


Déroulement pas à pas de l'algorithme

On peut jouer sur x_2 (dégradation avec x_4)

$\hookrightarrow$ jusqu'où augmenter x_2 ?

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 10 + \tfrac{1}{2}x_4 - \tfrac{1}{2}x_2 && \Rightarrow x_2 \leq 20 \\
x_1 &= 20 - \tfrac{1}{2}x_4 - \tfrac{1}{2}x_2 && \Rightarrow x_2 \leq 40 \\
x_5 &= 25 - x_2 && \Rightarrow x_2 \leq 25
\end{aligned}
$$



Déroulement pas à pas de l'algorithme

On peut jouer sur x_2 (dégradation avec x_4)

$\hookrightarrow$ jusqu'où augmenter x_2 ?

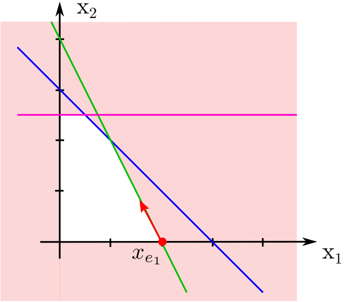
$$\begin{aligned} x_3 &= 10 + \tfrac{1}{2}x_4 - \tfrac{1}{2}x_2 && \Rightarrow x_2 \leq 20 \\ x_1 &= 20 - \tfrac{1}{2}x_4 - \tfrac{1}{2}x_2 && \Rightarrow x_2 \leq 40 \\ x_5 &= 25 - x_2 && \Rightarrow x_2 \leq 25 \end{aligned}$$

On pose $x_2 = 20$, et donc $x_3 = 0$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ll} x_2 & \text{passe dans la base} \\ x_3 & \text{devient hors base} \end{array} \right.$$

$$z = 300 - \frac{15}{2}x_4 + \frac{5}{2}x_2$$

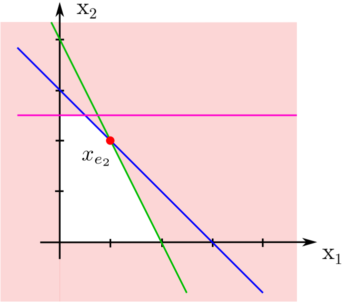
$$\begin{aligned} x_3 &= 10 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_1 &= 20 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_5 &= 25 - x_2 \end{aligned}$$



Déroulement pas à pas de l'algorithme

Nous obtenons un nouveau point extrême x_{e_2} : $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$

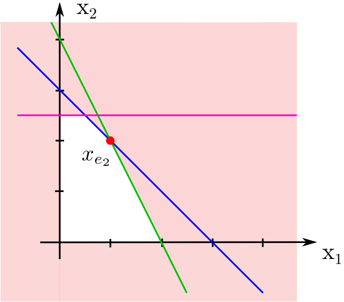
$$z = 350 - 5x_4 - 5x_3$$
$$x_2 = 20 + x_4 - 2x_3$$
$$x_1 = 10 - x_4 + x_3$$
$$x_5 = 5 + 2x_3 - x_4$$



Déroulement pas à pas de l'algorithme

Nous obtenons un nouveau point extrême x_{e_2} : $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$

$$
\begin{aligned}
z &= 350 - 5x_4 - 5x_3 \\
x_2 &= 20 + x_4 - 2x_3 \\
x_1 &= 10 - x_4 + x_3 \\
x_5 &= 5 + 2x_3 - x_4
\end{aligned}
$$



$\Rightarrow z = 350$, comment améliorer la solution ?

Déroulement pas à pas de l'algorithme

Pas d'amélioration possible

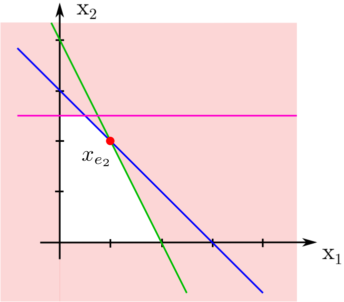
$\Rightarrow$ solution optimale atteinte

Solution optimale :

$$x^* = x_{e_2} = \begin{pmatrix} 10 \ , \ 20 \end{pmatrix}$$

Coût optimal :

$$z^* = 350$$



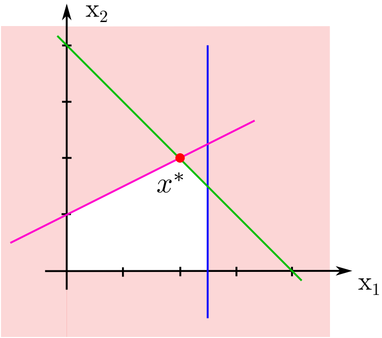
Autre exemple

Soit le problème de PL suivant :

$$
\begin{aligned}
\max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 \\
-2x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\
x_1 + x_2 &\leq 8 \\
x_1 &\leq 5 \\
x_i &\geq 0 \qquad i = \{1, 2\}
\end{aligned}
$$

Autre exemple

Représentation graphique :



Solution optimale : $x_1^* = 4$ et $x_2^* = 4$

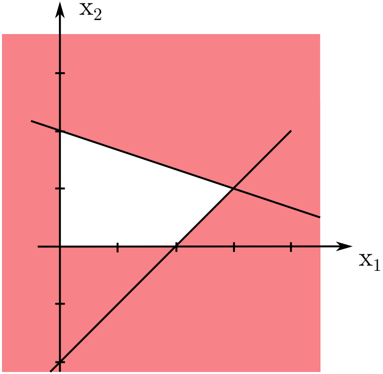
Coût optimale : $z^* = 20$

Utilisation d'un solveur

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = \; & x_1 + x_2 \\
x_1 + 3x_2 & \leq 12 \\
x_1 - x_2 & \leq 4 \\
x_i & \geq 0 \qquad i = 1, 2
\end{aligned}
$$

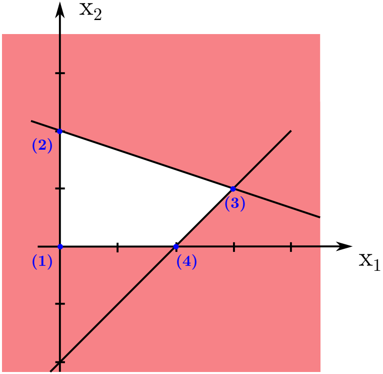
Utilisation d'un solveur

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = x_1 + x_2 & \\
x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\
x_1 - x_2 &\leq 4 \\
\\
x_i &\geq 0 \qquad i = 1, 2
\end{aligned}
$$



Utilisation d'un solveur

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$x_1 - x_2 \leq 4$$
$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2$$

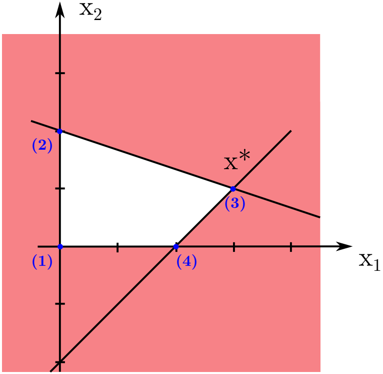


valeur sur chaque sommet :

- $(1) \rightarrow z = 0$
- $(2) \rightarrow z = 4$
- $(3) \rightarrow z = 8$
- $(4) \rightarrow z = 4$

Utilisation d'un solveur

$$\begin{array}{rrcl} \max & z & = & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 3x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ & x_i & \geq & 0 \qquad i = 1,2 \end{array}$$

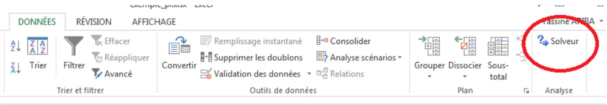


valeur sur chaque sommet :

- (1) $\rightarrow z = 0$
- (2) $\rightarrow z = 4$
- (3) $\rightarrow z = 8 \rightarrow$ optimal
- (4) $\rightarrow z = 4$

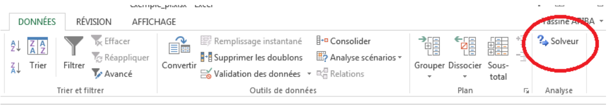
Solution : $x_1 = 6$ et $x_2 = 2$.

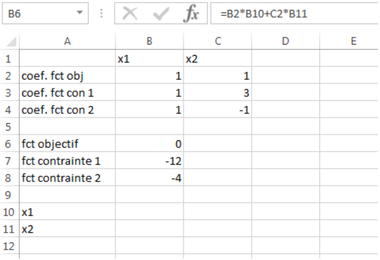
Solveur d'Excel



Le solver est intégré à Excel mais doit être simplement activé.

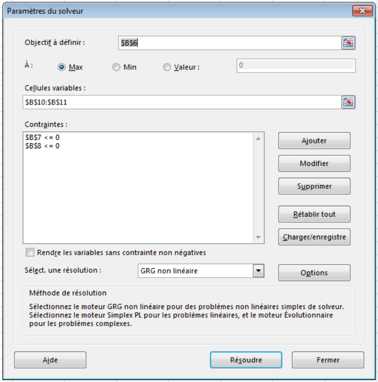
Solveur d'Excel

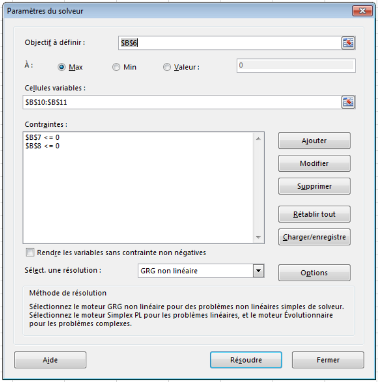



B6 =B2*B10+C2*B11

	A	B	C	D	E
1		x1	x2		
2	coef. fct obj	1	1		
3	coef. fct con 1	1	3		
4	coef. fct con 2	1	-1		
5					
6	fct objectif	0			
7	fct contrainte 1	-12			
8	fct contrainte 2	-4			
9					
10	x1				
11	x2				
12					

Le solver est intégré à Excel mais doit être simplement activé.


Paramètres du solveur
Objectif à définir :
$B$6
À :
Max
Min
Valeur :
0
Cellules variables :
$B$10:$B$11
Contraintes :
$B$7 <= 0
$B$8 <= 0
Ajouter
Modifier
Supprimer
Rétablir tout
Charger/enregistre
Rendre les variables sans contrainte non négatives
Sélect. une résolution :
GRG non linéaire
Options
Méthode de résolution
Sélectionnez le moteur GRG non linéaire pour des problèmes non linéaires simples de solveur. Sélectionnez le moteur Simplex PL pour les problèmes linéaires, et le moteur Évolutionnaire pour les problèmes complexes.
Aide
Résoudre
Fermer



	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2			
2	coef. fct obj	1	1			
3	coef. fct con 1	1	3			
4	coef. fct con 2	1	-1			
5						
6	fct objectif	8				
7	fct contrainte 1	0				
8	fct contrainte 2	0				
9						
10	x1	6				
11	x2	2				
12						

Solveur de Scilab

La fonction `karmarkar()` permet de résoudre le problème :

$$\min \quad c^T x$$

$$\begin{aligned} A_e x &= b_e \\ A_i x &\leq b_i \end{aligned}$$

D'autres solveurs sont disponibles à partir de modules d'extension du logiciel.

Solveur de Scilab

La fonction `karmarkar()` permet de résoudre le problème :

$$\min \quad c^T x$$

$$\begin{aligned} A_e x &= b_e \\ A_i x &\leq b_i \end{aligned}$$

Syntaxe :

```
xopt = karmarkar(Ae, be, c, [], [], [], [], [], Ai, bi)
```

D'autres solveurs sont disponibles à partir de modules d'extension du logiciel.

Dans le cas de notre exemple :

$$\min \quad [-1 \; -1]\, x$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Dans le cas de notre exemple :

$$\min \quad [-1 \, -1] \, x$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Dans Scilab :

```
-> c = [-1 -1]';
-> Ai = [1 3 ; 1 -1];
-> bi = [12 ; 4];
->
-> [xopt,fopt] = karmarkar([], [], c, [], [], [], [], [], Ai, bi)

fopt =
     - 7.9999347
xopt =
      5.9999347
      2.
```

Théorie des graphes

Sommaire

Définitions et concepts

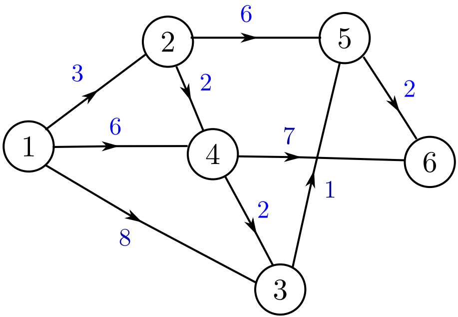
La théorie des graphes fournit un outil mathématique naturel pour la modélisation de nombreux problèmes en recherche opérationnelle.

$\Rightarrow$ applications : réseau de transport, logistique, télécommunication...

Définitions et concepts

La théorie des graphes fournit un outil mathématique naturel pour la modélisation de nombreux problèmes en recherche opérationnelle.

⇒ applications : réseau de transport, logistique, télécommunication...



Un graphe est composé de *sommets* ou *noeuds* et d'*arcs* (orientés ou non) valués.

Un graphe, noté $G(X, U)$, est défini par

- X un ensemble de sommets,
- U un ensemble d'arcs u qui relient de manière orientée un sommet i à un sommet j. A chaque arc $u = (i, j)$ est associé une valeur $w_{ij} \geq 0$

Nous noterons $|X| = n$ (correspond à l'ordre du graphe) et $|U| = m$. Si l'arc liant le sommet i au sommet j n'existe pas, on pose $w_{ij} = \infty$.

Un graphe, noté $G(X, U)$, est défini par

- X un ensemble de sommets,
- U un ensemble d'arcs u qui relient de manière orientée un sommet i à un sommet j. A chaque arc $u = (i, j)$ est associé une valeur $w_{ij} \geq 0$

Nous noterons $|X| = n$ (correspond à l'ordre du graphe) et $|U| = m$. Si l'arc liant le sommet i au sommet j n'existe pas, on pose $w_{ij} = \infty$.

L'exemple précédent est un graphe d'ordre $n = 6$ avec $m = 9$ arcs.

$$
\begin{aligned}
w_{12} &= 3 \qquad & w_{25} &= 6 \\
w_{14} &= 6 \qquad & w_{24} &= 2 \\
w_{13} &= 8 \qquad & w_{35} &= 1
\end{aligned}
$$

$$\ldots$$

Comment trouver le chemin optimal (de valeur minimale) du sommet 1 au sommet i ?

Comment trouver le chemin optimal (de valeur minimale) du sommet 1 au sommet i ?

Algorithme de Dijkstra

A chaque itération, une étiquette λ_i est associée à chaque sommet $i \in X$.
Une étiquette λ_i est

- soit définitive, et vaut alors la valeur minimale du chemin allant de 1 à i,
- soit provisoire, et représente la valeur courante du chemin allant de 1 à i.

L'ensemble des sommets à étiquette définitive est noté D (mis à jour à chaque itération).

Algorithme :

- initialisation

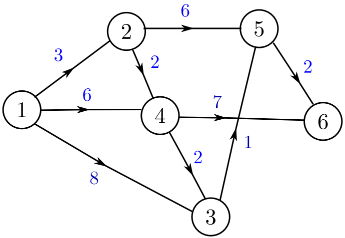
$$\lambda_1 = 0 \quad ; \quad \lambda_i = w_{1i} \quad \forall i \neq 1 \quad ; \quad D = \{1\}$$

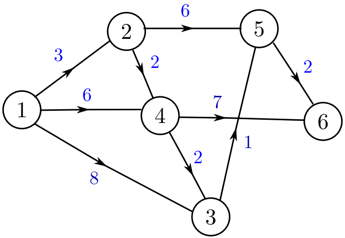
- tant que $D \neq X$
  - déterminer la plus petite étiquette provisoire $\rightarrow$ elle devient définitive

$$\lambda_i = \min_{j \in X \setminus D} \lambda_j \qquad \text{et} \qquad D \leftarrow D \cup \{i\}$$

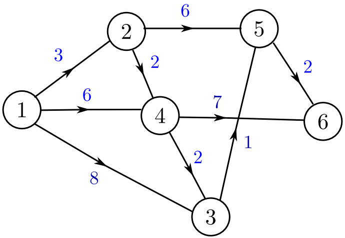
  - calculer les nouvelles étiquette provisoire

$$\lambda_j = \min\left(\lambda_j, \lambda_i + w_{ij}\right) \qquad j \in X \setminus D$$

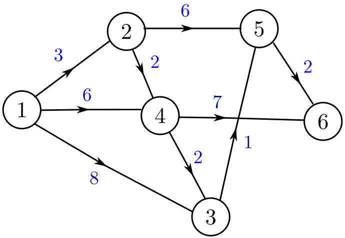

1
2
3
4
5
6
3
6
8
6
2
7
2
2
1



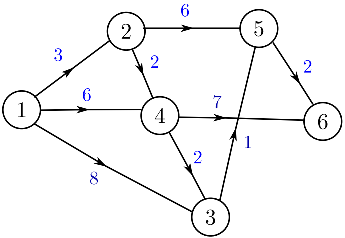
D	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6



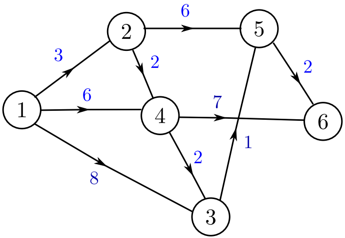
D	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
1	0	$\underline{3(1)}$	8(1)	6(1)	∞	∞



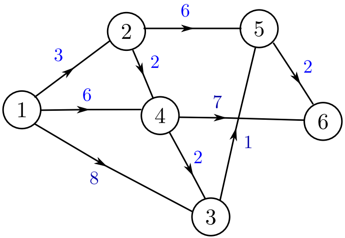
D	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
1	0	$\underline{3(1)}$	8(1)	6(1)	∞	∞
1, 2	–	–	8(1)	$\underline{5(2)}$	9(2)	∞



D	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
1	0	<u>3(1)</u>	8(1)	6(1)	∞	∞
1, 2	–	–	8(1)	<u>5(2)</u>	9(2)	∞
1, 2, 4	–	–	<u>7(4)</u>	–	9(2)	12(4)



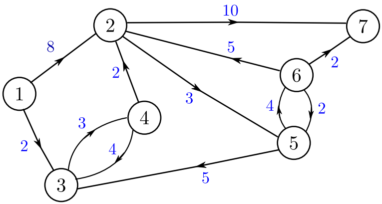
D	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
1	0	$\underline{3(1)}$	8(1)	6(1)	∞	∞
1, 2	–	–	8(1)	$\underline{5(2)}$	9(2)	∞
1, 2, 4	–	–	$\underline{7(4)}$	–	9(2)	12(4)
1, 2, 4, 3	–	–	–	–	$\underline{8(3)}$	12(4)



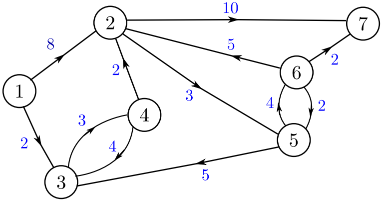
D	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
1	0	$\underline{3(1)}$	8(1)	6(1)	∞	∞
1, 2	–	–	8(1)	$\underline{5(2)}$	9(2)	∞
1, 2, 4	–	–	$\underline{7(4)}$	–	9(2)	12(4)
1, 2, 4, 3	–	–	–	–	$\underline{8(3)}$	12(4)
1, 2, 4, 3, 5	–	–	–	–	–	$\underline{10(5)}$

Le chemin le plus court du sommet 1 au 6 est : 1, 2, 4, 3, 5, 6 et de valeur 10

Autre exemple

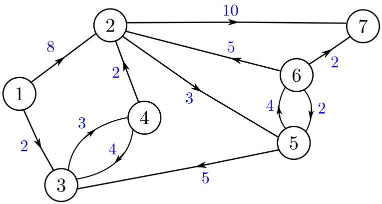


Autre exemple



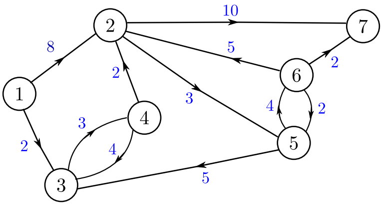
D	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7

Autre exemple



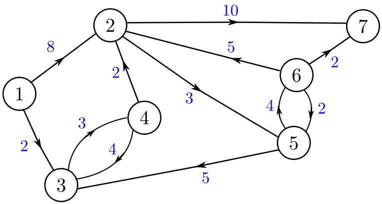
D	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
1	0	8(1)	$\underline{2(1)}$	∞	∞	∞	∞

Autre exemple



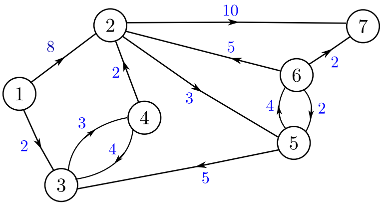
D	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
1	0	8(1)	<u>2(1)</u>	∞	∞	∞	∞
1, 3	–	8(1)	–	<u>5(3)</u>	∞	∞	∞

Autre exemple



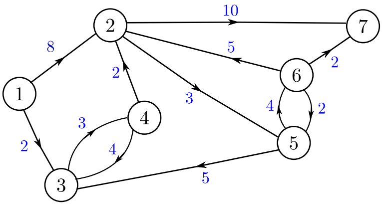
D	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
1	0	8(1)	$\underline{2(1)}$	∞	∞	∞	∞
1, 3	–	8(1)	–	$\underline{5(3)}$	∞	∞	∞
1, 3, 4	–	$\underline{7(4)}$	–	–	∞	∞	∞

Autre exemple



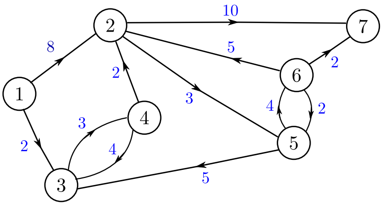
D	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
1	0	8(1)	$\underline{2(1)}$	∞	∞	∞	∞
1, 3	–	8(1)	–	$\underline{5(3)}$	∞	∞	∞
1, 3, 4	–	$\underline{7(4)}$	–	–	∞	∞	∞
1, 3, 4, 2	–	–	–	–	$\underline{10(2)}$	∞	17(2)

Autre exemple



D	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
1	0	8(1)	$\underline{2(1)}$	∞	∞	∞	∞
1, 3	–	8(1)	–	$\underline{5(3)}$	∞	∞	∞
1, 3, 4	–	$\underline{7(4)}$	–	–	∞	∞	∞
1, 3, 4, 2	–	–	–	–	$\underline{10(2)}$	∞	17(2)
1, 3, 4, 2, 5	–	–	–	–	–	$\underline{14(5)}$	17(2)

Autre exemple



D	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
1	0	8(1)	<u>2(1)</u>	∞	∞	∞	∞
1, 3	–	8(1)	–	<u>5(3)</u>	∞	∞	∞
1, 3, 4	–	<u>7(4)</u>	–	–	∞	∞	∞
1, 3, 4, 2	–	–	–	–	<u>10(2)</u>	∞	17(2)
1, 3, 4, 2, 5	–	–	–	–	–	<u>14(5)</u>	17(2)
1, 3, 4, 2, 5, 6	–	–	–	–	–	–	<u>16(6)</u>

Le chemin le plus court du sommet 1 au 7 est : 1, 3, 4, 2, 5, 6, 7 et de valeur 16

Flots optimaux dans un réseau de transport

Un **réseau de transport** est un graphe orienté sans boucle, avec un sommet d'entrée s (source) et un sommet de sortie p (puit). Pour chaque sommet $i \in X$,

- il existe au moins un chemin allant de s à i,
- il existe au moins un chemin allant de i à p.

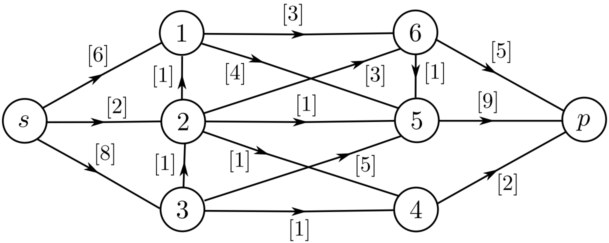
Pour tout arc $u \in U$, il existe une capacité $c(u)$, non négative, représentant le flux maximal pouvant circuler sur cet arc. Nous noterons le réseau de transport : $R(X, U, C)$.

Flots optimaux dans un réseau de transport

Un **réseau de transport** est un graphe orienté sans boucle, avec un sommet d'entrée s (source) et un sommet de sortie p (puit). Pour chaque sommet $i \in X$,

- il existe au moins un chemin allant de s à i,
- il existe au moins un chemin allant de i à p.

Pour tout arc $u \in U$, il existe une capacité $c(u)$, non négative, représentant le flux maximal pouvant circuler sur cet arc. Nous noterons le réseau de transport : $R(X, U, C)$.

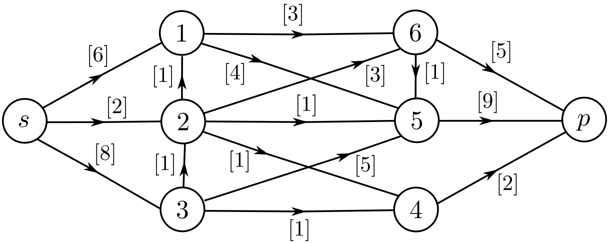


Flots optimaux dans un réseau de transport

Un **réseau de transport** est un graphe orienté sans boucle, avec un sommet d'entrée s (source) et un sommet de sortie p (puit). Pour chaque sommet $i \in X$,

- il existe au moins un chemin allant de s à i,
- il existe au moins un chemin allant de i à p.

Pour tout arc $u \in U$, il existe une capacité $c(u)$, non négative, représentant le flux maximal pouvant circuler sur cet arc. Nous noterons le réseau de transport : $R(X, U, C)$.



★ Le flot peut correspondre à des containers, des camions, des flux électriques, des flux d'information, des débits de liquide...

Définitions

On note $\varphi(u) = \varphi_{ij}$, le **flux** d'un arc u reliant le sommet i au sommet j.

- Si $\varphi(u) = c(u)$, l'arc est dit saturé.
- Si $\varphi(u) = 0$, l'arc est dit bloqué.

Le principe de conservation de la matière est appliqué : tout ce qui arrive à un sommet i est égal à ce qui en part.

Définitions

On note $\varphi(u) = \varphi_{ij}$, le **flux** d'un arc u reliant le sommet i au sommet j.

- Si $\varphi(u) = c(u)$, l'arc est dit saturé.
- Si $\varphi(u) = 0$, l'arc est dit bloqué.

Le principe de conservation de la matière est appliqué : tout ce qui arrive à un sommet i est égal à ce qui en part.

La **valeur du flot** $V(\varphi)$ du réseau est la quantité totale de flux circulant de s à p

$$V(\varphi) = \sum_j \varphi_{sj} = \sum_j \varphi_{jp} \qquad\qquad j \in X \setminus \{s, p\}$$

Définitions

On note $\varphi(u) = \varphi_{ij}$, le **flux** d'un arc u reliant le sommet i au sommet j.

- Si $\varphi(u) = c(u)$, l'arc est dit saturé.
- Si $\varphi(u) = 0$, l'arc est dit bloqué.

Le principe de conservation de la matière est appliqué : tout ce qui arrive à un sommet i est égal à ce qui en part.

La **valeur du flot** $V(\varphi)$ du réseau est la quantité totale de flux circulant de s à p

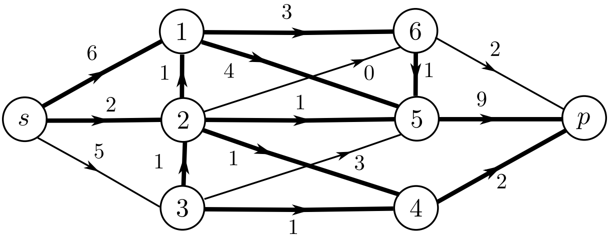
$$V(\varphi) = \sum_j \varphi_{sj} = \sum_j \varphi_{jp} \qquad\qquad j \in X \setminus \{s, p\}$$

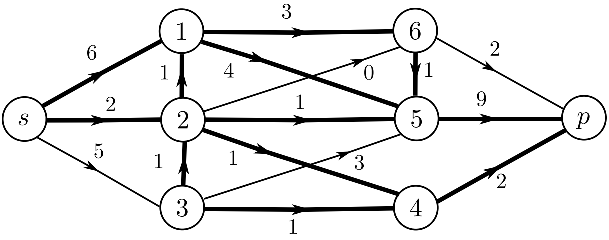
Considérons une chaîne CH (séquence non orientée). On appelle

- *arc direct* u^+, un arc dont l'orientation va dans le même sens que la séquence,
- *arc indirect* u^-, un arc dont l'orientation va dans le sens inverse de la séquence.

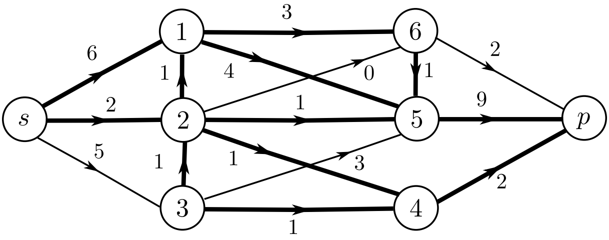
La chaîne est dite **augmentante** pour un flot donné si

$$\begin{aligned} \varphi(u^+) &< c(u^+) \qquad && \forall u^+ \in CH, \\ \varphi(u^-) &> 0 && \forall u^- \in CH \end{aligned}$$

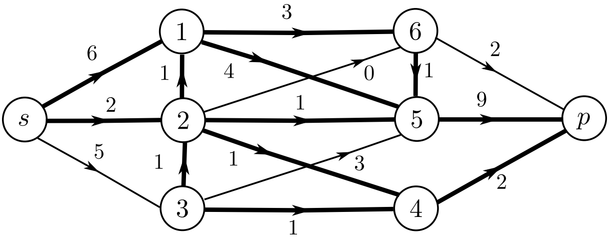

s
1
2
3
4
5
6
p
6
2
5
1
4
1
1
3
1
0
1
1
3
2
9
2



- $\varphi_{16} = 3$, $\varphi_{s3} = 5$, $\varphi_{5p} = 9$.
- φ_{s1} et φ_{16} sont saturés, φ_{26} est bloqué.



- $\varphi_{16} = 3$, $\varphi_{s3} = 5$, $\varphi_{5p} = 9$.
- φ_{s1} et φ_{16} sont saturés, φ_{26} est bloqué.
- La valeur actuelle du flot est 13.



- $\varphi_{16} = 3$, $\varphi_{s3} = 5$, $\varphi_{5p} = 9$.
- φ_{s1} et φ_{16} sont saturés, φ_{26} est bloqué.
- La valeur actuelle du flot est 13.
- La chaîne $(s, 3, 5, 6, p)$ est une chaîne augmentante.
- $(s, 3)$, $(3, 5)$ et $(6, p)$ sont des arcs directs ; $(6, 5)$ est indirect.
- Pour cette chaîne augmentante, on a $\delta = 1$.

Pour un réseau donné $R(X, U, C)$, le **problème du flot maximum** consiste à déterminer un flot admissible dont la valeur est maximale :

$$\hat{V} = \max_{\varphi} V(\varphi)$$

Pour un réseau donné $R(X, U, C)$, le **problème du flot maximum** consiste à déterminer un flot admissible dont la valeur est maximale :

$$\hat{V} = \max_{\varphi} V(\varphi)$$

Propriété utile :

S'il existe une chaîne augmentant par rapport à un flot φ, il est possible de construire un flot φ' tel que $V(\varphi') > V(\varphi)$. Pour cela, on pose :

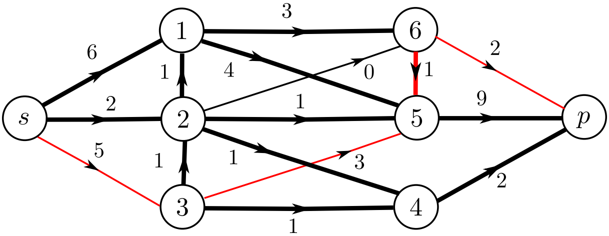
- $\varphi'(u^+) = \varphi(u) + \delta, \qquad \forall u^+ \in CH,$
- $\varphi'(u^-) = \varphi(u) - \delta, \qquad \forall u^- \in CH$

δ est défini par :

$$\begin{cases} c'(u^+) = c(u) - \varphi(u) & \forall u^+ \in CH \\ c'(u^-) = \varphi(u) & \forall u^- \in CH \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \delta = \min_{u \in CH} c'(u) > 0$$

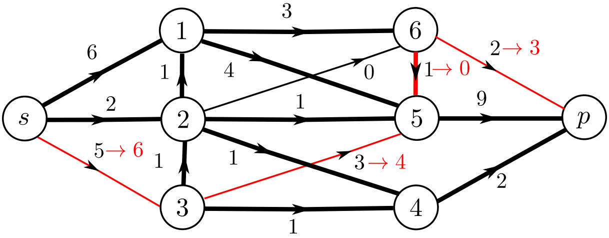
Reprenons l'exemple précédent.

- La valeur actuelle du flot est 13.
- La chaîne $(s, 3, 5, 6, p)$ est une chaîne augmentante.
- $(s, 3)$, $(3, 5)$ et $(6, p)$ sont des arcs directs ; $(6, 5)$ est indirect.



Reprenons l'exemple précédent.

- La valeur actuelle du flot est 13.
- La chaîne $(s, 3, 5, 6, p)$ est une chaîne augmentante.
- $(s, 3)$, $(3, 5)$ et $(6, p)$ sont des arcs directs ; $(6, 5)$ est indirect.



- Pour cette chaîne augmentante, on a $\delta = 1$.
- Nous pouvons modifier les flux : $\varphi'_{s3} = 6$, $\varphi'_{35} = 4$, $\varphi'_{65} = 0$ et $\varphi'_{6p} = 3$
- La valeur du flot est maintenant égale à 14.

Comment trouver le flot maximal ?

Comment trouver le flot maximal ?

Algorithme de Ford et Fulkerson

- on part d'un flot initial φ_0 (qui peut être nul)
- à l'itération k :
  - déterminer une chaîne augmentante par rapport au flot courant φ_{k-1},
  - construire le nouveau flot φ_k tel que $V(\varphi_k) > V(\varphi_{k-1})$,
- s'il n'existe aucune chaîne augmentante $\rightarrow$ le flot courant est optimal.

Comment trouver le flot maximal ?

Algorithme de Ford et Fulkerson

- on part d'un flot initial φ_0 (qui peut être nul)
- à l'itération k :
  - déterminer une chaîne augmentante par rapport au flot courant φ_{k-1},
  - construire le nouveau flot φ_k tel que $V(\varphi_k) > V(\varphi_{k-1})$,
- s'il n'existe aucune chaîne augmentante $\rightarrow$ le flot courant est optimal.

Algorithme pour le recherche d'une chaîne augmentante :

- initialement, seul le sommet s est marqué avec l'étiquette $(+, \infty)$,
- si à partir d'un sommet i déjà marqué, il y a un arc direct $u^+ = (i, j)$, le sommet j est marqué avec

$$(+i, \delta_j) \qquad \text{avec } \delta_j = \min\{\delta_i, c_{ij} - \varphi_{ij}\},$$

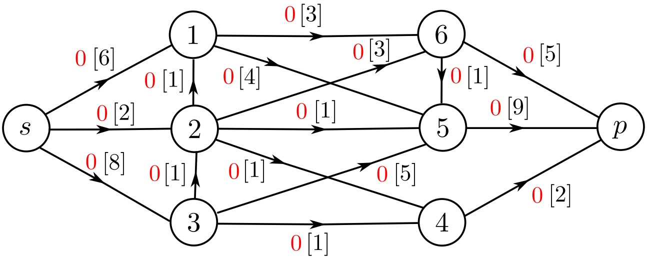
- si à partir d'un sommet i déjà marqué, il y a un arc indirect $u^- = (j, i)$, le sommet j est marqué avec

$$(-i, \delta_j) \qquad \text{avec } \delta_j = \min\{\delta_i, \varphi_{ji}\},$$

- le marquage s'arrête quand le sommet p est marqué.

Reprenons l'exemple précédent.

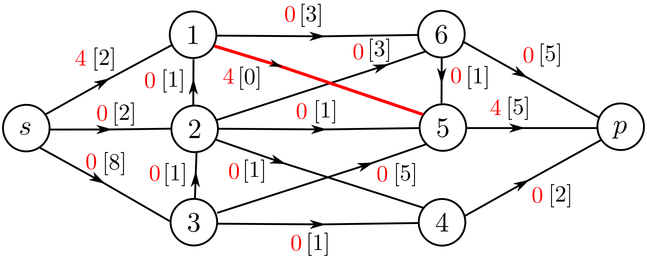
Partons d'un flot nul, $\varphi_0 = 0$.



Reprenons l'exemple précédent.

Partons d'un flot nul, $\varphi_0 = 0$.

itér. 1 chaîne augmentante $(s, 1, 5, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 6)$, $(+1, 4)$, $(+5, 4)$,

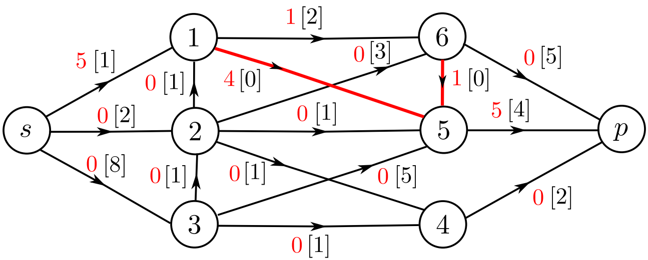


Reprenons l'exemple précédent.

Partons d'un flot nul, $\varphi_0 = 0$.

itér. 1 chaîne augmentante $(s, 1, 5, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 6)$, $(+1, 4)$, $(+5, 4)$,

itér. 2 chaîne augmentante $(s, 1, 6, 5, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 2)$, $(+1, 2)$, $(+6, 1)$, $(+5, 1)$,



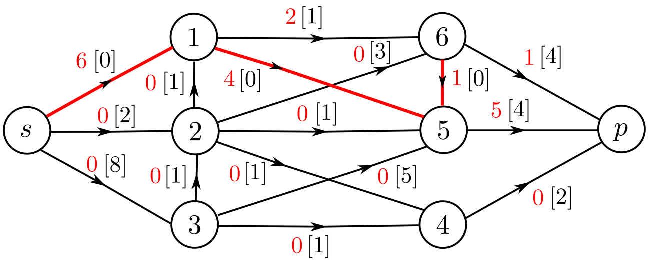
Reprenons l'exemple précédent.

Partons d'un flot nul, $\varphi_0 = 0$.

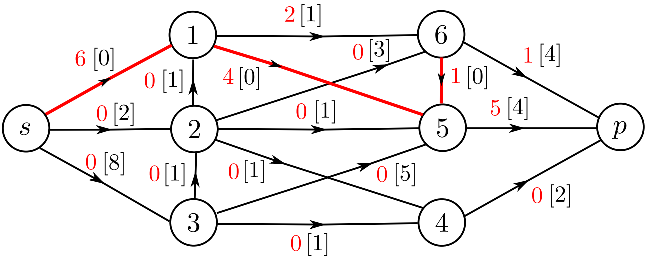
itér. 1 chaîne augmentante $(s, 1, 5, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 6)$, $(+1, 4)$, $(+5, 4)$,

itér. 2 chaîne augmentante $(s, 1, 6, 5, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 2)$, $(+1, 2)$, $(+6, 1)$, $(+5, 1)$,

itér. 3 chaîne augmentante $(s, 1, 6, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 1)$, $(+1, 1)$, $(+6, 1)$.

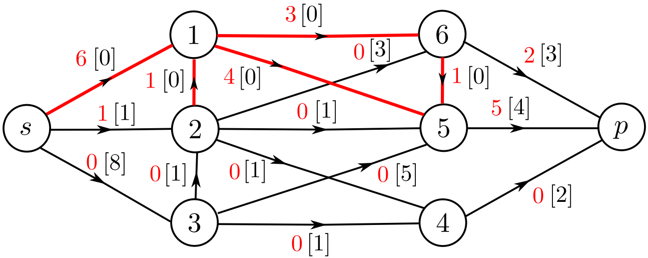


suite...



suite...

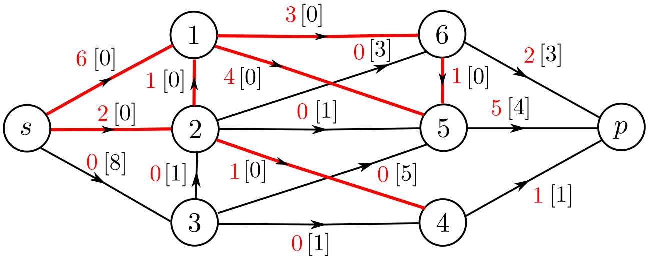
itér. 4 chaîne augmentante $(s, 2, 1, 6, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 2)$, $(+2, 1)$, $(+1, 1)$, $(+6, 1)$,



suite...

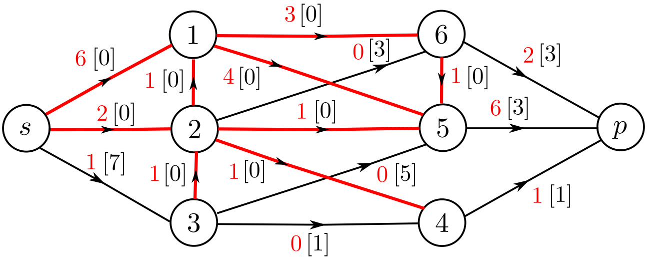
itér. 4 chaîne augmentante $(s, 2, 1, 6, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 2)$, $(+2, 1)$, $(+1, 1)$, $(+6, 1)$,

itér. 5 chaîne augmentante $(s, 2, 4, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 1)$, $(+2, 1)$, $(+4, 1)$,

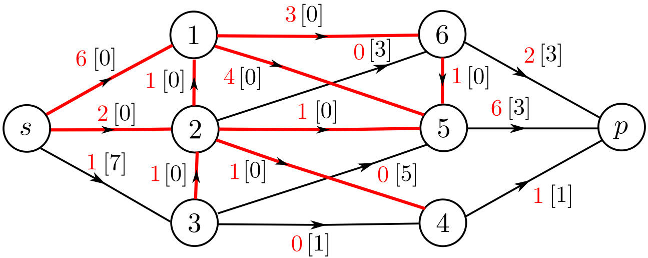


suite...

- itér. 4 chaîne augmentante $(s, 2, 1, 6, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 2)$, $(+2, 1)$, $(+1, 1)$, $(+6, 1)$,
- itér. 5 chaîne augmentante $(s, 2, 4, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 1)$, $(+2, 1)$, $(+4, 1)$,
- itér. 6 chaîne augmentante $(s, 3, 2, 5, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 8)$, $(+3, 1)$, $(+2, 1)$, $(+5, 1)$.

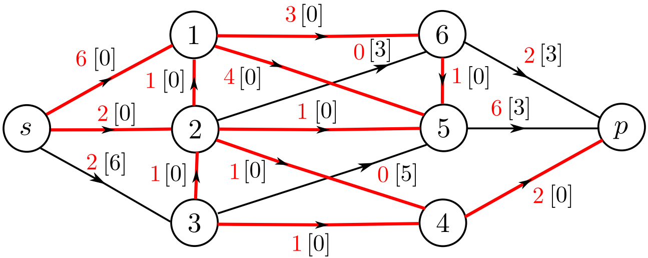


suite...



suite...

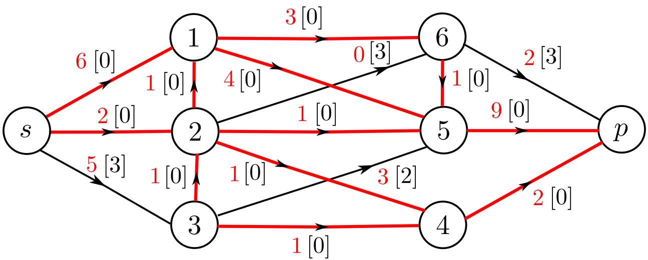
itér. 7 chaîne augmentante $(s, 3, 4, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 7)$, $(+3, 1)$, $(+4, 1)$,



suite...

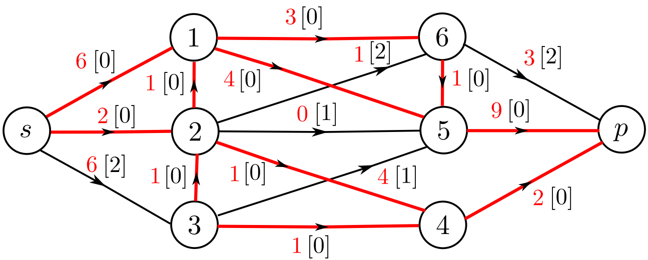
itér. 7 chaîne augmentante $(s, 3, 4, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 7)$, $(+3, 1)$, $(+4, 1)$,

itér. 8 chaîne augmentante $(s, 3, 5, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 6)$, $(+3, 5)$, $(+5, 3)$,



suite...

- itér. 7 chaîne augmentante $(s, 3, 4, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 7)$, $(+3, 1)$, $(+4, 1)$,
- itér. 8 chaîne augmentante $(s, 3, 5, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 6)$, $(+3, 5)$, $(+5, 3)$,
- itér. 9 chaîne augmentante $(s, 3, 5, 2, 6, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 3)$, $(+3, 2)$, $(-5, 1)$, $(+2, 1)$, $(+6, 1)$.



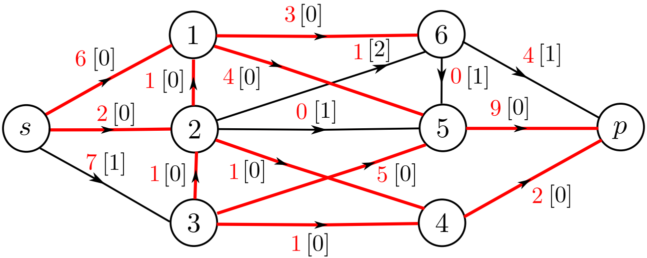
suite...

itér. 7 chaîne augmentante $(s, 3, 4, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 7)$, $(+3, 1)$, $(+4, 1)$,

itér. 8 chaîne augmentante $(s, 3, 5, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 6)$, $(+3, 5)$, $(+5, 3)$,

itér. 9 chaîne augmentante $(s, 3, 5, 2, 6, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 3)$, $(+3, 2)$, $(-5, 1)$, $(+2, 1)$, $(+6, 1)$.

itér. 10 chaîne augmentante $(s, 3, 5, 6, p)$ avec les étiquettes : $(+s, 2)$, $(+3, 1)$, $(-5, 1)$, $(+6, 1)$.



⇒ il n'y a plus de chaîne augmentante : le flot est maximal,
⇒ le flot maximal est 15.

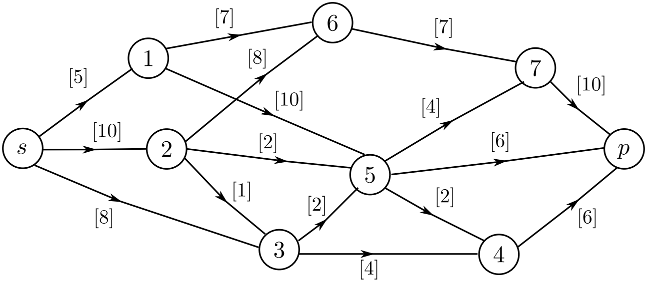
D'autres algorithmes et extensions existent, en particulier pour les cas :

- d'un réseau non orienté $R(X, E, C)$,
- d'un réseau $R(X, U, C)$ pour lequel il existe une capacité max pour les sommets $c(x)$,
- d'un réseau $R(X, U, B, C)$ avec aussi des bornes inférieures sur les arcs $b(u)$,
- d'un réseau $R(X, U, C, W)$ pour lequel les arcs sont valorisés $w(u)$.

Il faut aussi tenir compte de la complexité des algorithmes.

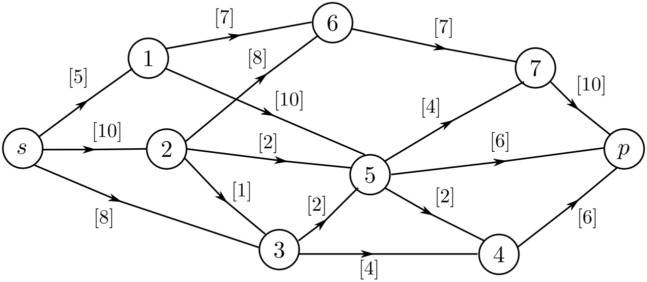
Capacité d'un réseau routier

2 villes sont reliées par un réseau routier.
Chaque route possède une capacité maximale en centaine de véhicules par heure.
Ces capacités tiennent compte des ralentissements, des feux, des traversées de villages...



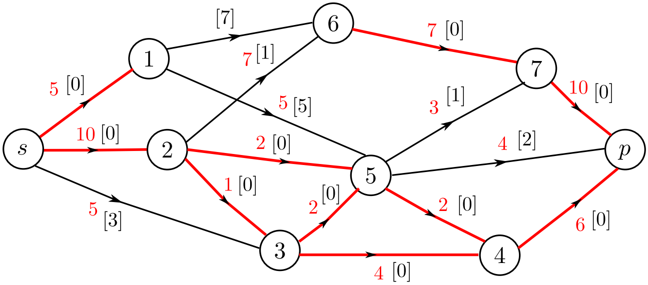
Capacité d'un réseau routier

2 villes sont reliées par un réseau routier.
Chaque route possède une capacité maximale en centaine de véhicules par heure.
Ces capacités tiennent compte des ralentissements, des feux, des traversées de villages...



⇒ Quel est le débit horaire maximal de véhicules allant de la ville s à la ville p ?

après application de l'algorithme, nous avons :



⇒ La valeur du flot maximal est 20, soit 2000 véhicules par heure.