

Régulation et Asservissement

Yassine ARIBA

version 2.0

Informations pratiques

Contact

Tel : 05 34 50 50 69

Email : yassine.ariba@icam.fr

Forum : Moodle. Favorise le partage, l'auto-formation, la capitalisation d'informations...

Informations pratiques

Contact

Tel : 05 34 50 50 69

Email : yassine.ariba@icam.fr

Forum : Moodle. Favorise le partage, l'auto-formation, la capitalisation d'informations...

Organisation du cours

- ▶ Pré-requis : Mathématiques depuis le CP ! Et plus particulièrement "Mathématique pour la Physique - Traitement Numérique" (A3)
- ▶ 16h en amphi : cours + exercices. Présentation sur transparents.
- ▶ 8h en tiers de promo : TD.
- ▶ 4 × 4h de TP.
 - utilisation de MATLAB[®] et Simulink[®]
 - Intervenant extérieur.
- ▶ 1 examen final (2h).

Sommaire

Introduction

- Notion de signal et de système
- Un peu de vocabulaire
- Qu'est-ce que l'automatique ?
- Le système de commande

Modélisation

- Exemples introductifs
- Fonction de transfert
- Schéma fonctionnel

Réponse d'un système

- Réponse temporelle
- Notion de stabilité
- Réponse fréquentielle
- Résumé

Stabilité et performances d'un asservissement

- Généralités et exemple introductif
- Stabilité
- Précision
- Rapidité
- Marges de stabilité

Synthèse de correcteurs

- Introduction
- Synthèse directe
- Actions élémentaires
- Combinaisons d'actions
- Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

A decorative graphic on the left side of the slide, consisting of several concentric circles. The circles are centered on the left edge and extend towards the center of the slide. They are rendered in a gradient of orange colors, with the innermost circle being the lightest and the outermost being the darkest, matching the background. The circles are of varying thicknesses and are partially cut off by the left edge of the frame.

Introduction

Sommaire

Introduction

- Notion de signal et de système
- Un peu de vocabulaire
- Qu'est-ce que l'automatique ?
- Le système de commande

Modélisation

- Exemples introductifs
- Fonction de transfert
- Schéma fonctionnel

Réponse d'un système

- Réponse temporelle
- Notion de stabilité
- Réponse fréquentielle
- Résumé

Stabilité et performances d'un asservissement

- Généralités et exemple introductif
- Stabilité
- Précision
- Rapidité
- Marges de stabilité

Synthèse de correcteurs

- Introduction
- Synthèse directe
- Actions élémentaires
- Combinaisons d'actions
- Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Remarques introductives

Avant de présenter l'*Automatique*, il est nécessaire de

- ▶ définir les notions de signal et système
- ▶ revoir du vocabulaire

Remarques introductives

Avant de présenter l'*Automatique*, il est nécessaire de

- ▶ définir les notions de signal et système
- ▶ revoir du vocabulaire

L'*Automatique* manipule des concepts abstraits :

- ▶ volonté de développer des méthodes génériques...
- ▶ ... mais applications très concrètes, dans de nombreux domaines
- ▶ composante Mathématiques importantes...
- ▶ ... mais l'essentiel des résultats seront admis¹

1. vous serez "utilisateurs" des résultats

Qu'est-ce qu'un signal ?

Définition

Un signal est la représentation physique de l'information qu'il transporte. Il est généralement décrit par une fonction mathématique à une ou plusieurs variables indépendantes (comme le temps ou l'espace).

Qu'est-ce qu'un signal ?

Définition

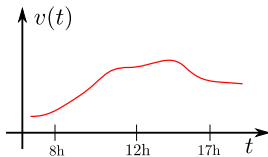
Un signal est la représentation physique de l'information qu'il transporte. Il est généralement décrit par une fonction mathématique à une ou plusieurs variables indépendantes (comme le temps ou l'espace).

- ▶ l'onde acoustique représente l'information de la parole
- ▶ la température représente le niveau de chaleur dans un four
- ▶ la tension électrique représente le rythme cardiaque (ECG)
- ▶ la vitesse de rotation d'un anémomètre représente la vitesse du vent

Un signal peut être de différentes natures. Il est souvent une quantité physique mesurable (tension, champs mag., température,...) par laquelle une information est transmise.

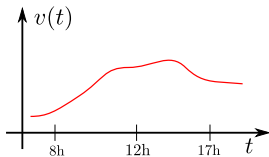
Exemples

Signal temporel : vitesse anémomètre
en fonction du temps t



Exemples

Signal temporel : vitesse anémomètre
en fonction du temps t

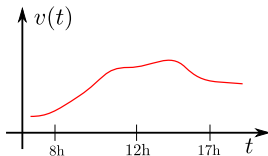


Signal spatial : niveau de gris pour
chaque pixel (x, y)



Exemples

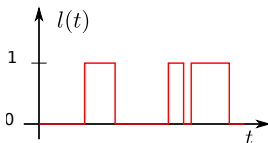
Signal temporel : vitesse anémomètre en fonction du temps t



Signal spatial : niveau de gris pour chaque pixel (x, y)

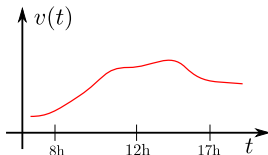


Signal logique : deux états, LED allumée ou éteinte

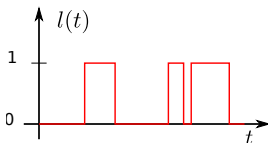


Exemples

Signal temporel : vitesse anémomètre en fonction du temps t



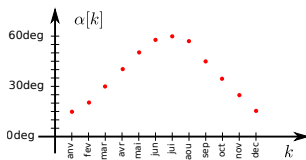
Signal logique : deux états, LED allumée ou éteinte



Signal spatial : niveau de gris pour chaque pixel (x, y)



Signal temporel discret : angle élévation du soleil chaque mois k



★ Dans ce cours, nous considérons seulement des signaux temporels continus

Qu'est-ce qu'un système ?

Définition

Un ensemble d'éléments, une collection d'organes, formant une unité cohérente et autonome, organisés pour un certain but. Il comprend aussi un ensemble de signaux définissant les relations/interactions entre les éléments et l'environnement.

Qu'est-ce qu'un système ?

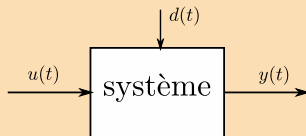
Définition

Un ensemble d'éléments, une collection d'organes, formant une unité cohérente et autonome, organisés pour un certain but. Il comprend aussi un ensemble de signaux définissant les relations/interactions entre les éléments et l'environnement.

- ▶ Définition des limites du système dans son environnement.
- ▶ Des signaux d'entrée affectent le système.
- ▶ Des signaux de sortie découlent du comportement du système.
- ▶ Vision entrée-sortie, approche fonctionnelle.

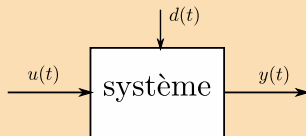
⇒ Objectif : approche abstraite pour formaliser des méthodes génériques.

Vision entrée-sortie



- ▶ $u(t)$: entrée, contrôlable agissant sur le système.
- ▶ $y(t)$: sortie, caractérisant le comportement du système.
- ▶ $d(t)$: perturbation, entrée incontrôlée affectant le système.

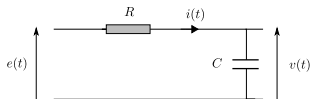
Vision entrée-sortie



- ▶ $u(t)$: entrée, contrôlable agissant sur le système.
 - ▶ $y(t)$: sortie, caractérisant le comportement du système.
 - ▶ $d(t)$: perturbation, entrée incontrôlée affectant le système.
-
- ▶ Les signaux spécifient les interactions du système avec son environnement.
 - ▶ Approche indépendante de la nature physique des entités.

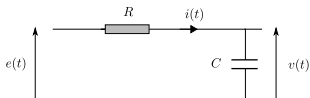
Exemples

Circuit électronique RC

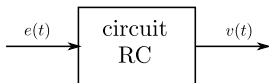


Exemples

Circuit électronique RC

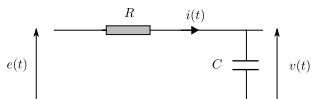


- ▶ entrée = tension $e(t)$
- ▶ sortie = tension $v(t)$

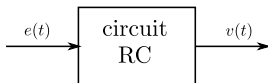


Exemples

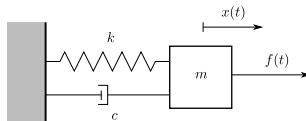
Circuit électronique RC



- ▶ entrée = tension $e(t)$
- ▶ sortie = tension $v(t)$

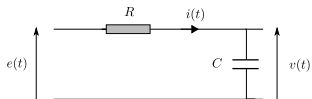


Structure masse-ressort

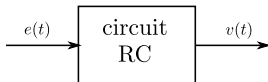


Exemples

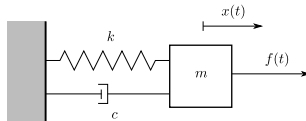
Circuit électronique RC



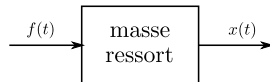
- ▶ entrée = tension $e(t)$
- ▶ sortie = tension $v(t)$



Structure masse-ressort

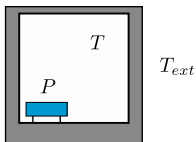


- ▶ entrée = force $f(t)$
- ▶ sortie = position $x(t)$



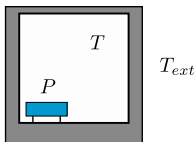
Exemples

Enceinte thermique

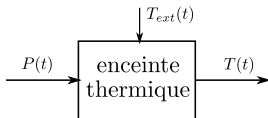


Exemples

Enceinte thermique

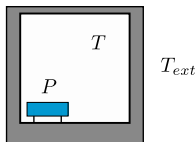


- ▶ entrée = puissance $P(t)$
- ▶ sortie = température $T(t)$
- ▶ perturbation = temp. ext $T_{ext}(t)$

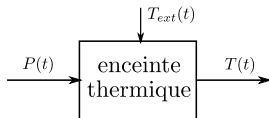


Exemples

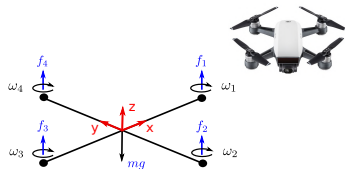
Enceinte thermique



- ▶ entrée = puissance $P(t)$
- ▶ sortie = température $T(t)$
- ▶ perturbation = temp. ext $T_{ext}(t)$

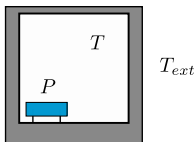


Assiette d'un drone

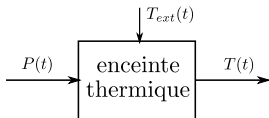


Exemples

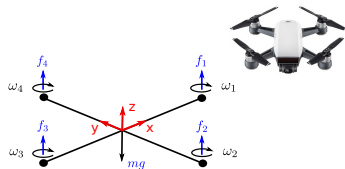
Enceinte thermique



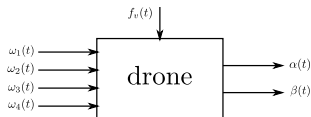
- ▶ entrée = puissance $P(t)$
- ▶ sortie = température $T(t)$
- ▶ perturbation = temp. ext $T_{ext}(t)$



Assiette d'un drone



- ▶ entrées = vit. rotation pales $\omega_i(t)$
- ▶ sorties = roulis/tangage $\alpha(t), \beta(t)$
- ▶ perturbation = force du vent $f_v(t)$



Les capteurs

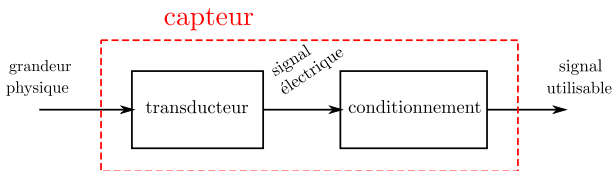
Définition

Un capteur est un dispositif qui transforme une grandeur physique en un signal utilisable, souvent un signal électrique.

Les capteurs

Définition

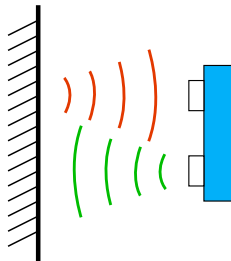
Un capteur est un dispositif qui transforme une grandeur physique en un signal utilisable, souvent un signal électrique.



- ▶ transducteur = passage du domaine physique au domaine électrique
- ▶ conditionnement = mise en forme du signal
- ▶ le signal électrique donne une "image" du mesurande

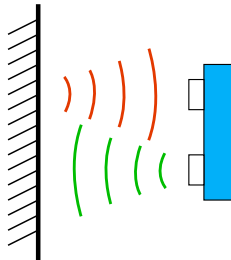
Exemples

capteur de distance à ultrasons

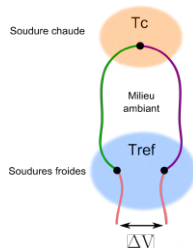


Exemples

capteur de distance à ultrasons

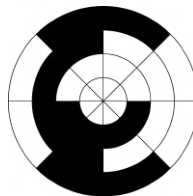


capteur de température thermocouple



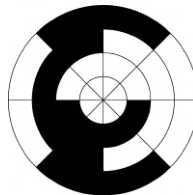
Exemples

capteur de rotation encodeur

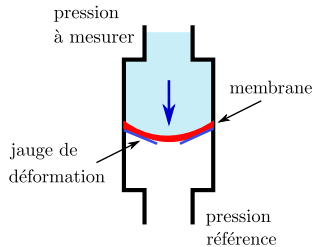
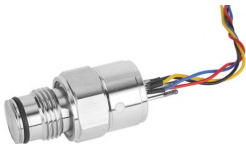


Exemples

capteur de rotation encodeur



capteur de pression relative, à membrane



Différents types de capteurs

Capteurs analogiques

- ▶ le signal est une fonction continue par rapport à la grandeur physique
- ▶ la sortie est de types tension, courant, jauge (aiguille ou fluide)
- ▶ exemples : thermocouple, potentiomètre, thermomètre...

Capteurs logiques (ou TOR)

- ▶ le signal est une fonction binaire par rapport à la grandeur physique
- ▶ la sortie est un état logique : 0 ou 1
- ▶ exemples : capteur de fin de course, LED...

Capteurs numériques

- ▶ le signal est une fonction discrète par rapport à la grandeur physique
- ▶ la sortie peut être une combinaison/séquence d'états logiques
- ▶ exemples : l'encodeur

Les actionneurs

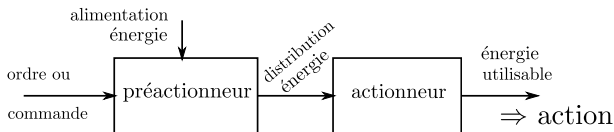
Définition

Un actionneur est un dispositif qui transforme une énergie, fournie en entrée, en une énergie exploitable pour effectuer une action. Il est l'organe "moteur" d'un système.

Les actionneurs

Définition

Un actionneur est un dispositif qui transforme une énergie, fournie en entrée, en une énergie exploitable pour effectuer une action. Il est l'organe "moteur" d'un système.

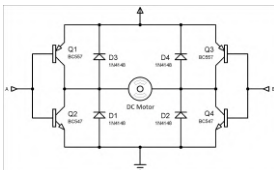
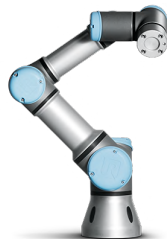


- ▶ énergies d'entrée types : électrique, pneumatique, hydraulique
- ▶ énergies de sortie types : mécanique, thermique, sonore
- ▶ le préactionneur reçoit les ordres et distribue l'énergie à l'actionneur

Exemples

Moteurs électriques

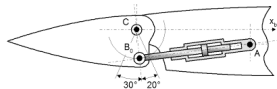
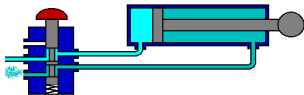
- convertit une énergie électrique en mouvement de rotation
- préactionneur : circuit d'électronique de puissance avec transistors



Exemples

Vérins hydrauliques

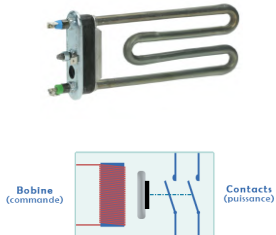
- ▶ convertit une énergie hydraulique en mouvement de translation
- ▶ préactionneur : distributeur du fluide sous pression dans les chambres du vérin



Exemples

Résistances chauffantes

- ▶ convertit une énergie électrique en une énergie thermique
- ▶ préactionneur : circuit d'électronique de puissance ou simple contacteur



Les effecteurs

Définition

Un effecteur est un dispositif ou outil mis en mouvement par un actionneur. Il s'agit de l'organe qui effectue l'action.

Les effecteurs

Définition

Un effecteur est un dispositif ou outil mis en mouvement par un actionneur. Il s'agit de l'organe qui effectue l'action.

- Exemples : roue, pince, aileron, outil,...



Qu'est-ce que l'automatique ?

Après quelques généralités, entrons dans le sujet !

- ▶ Il s'agit d'une discipline scientifique à part entière.
- ▶ De nombreuses connexions avec d'autres disciplines d'ingénierie : mécanique, électronique, thermodynamique, chimie, informatique,...
- ▶ Un large spectre d'applications : aéronautique et spatial, robotique, automobile, processus industriel,...
- ▶ Basé sur une approche système.

En anglais, on parle de "*Automatic Control*"

Qu'est-ce que le “Control” ?

Qu'est-ce que le “Control” ?

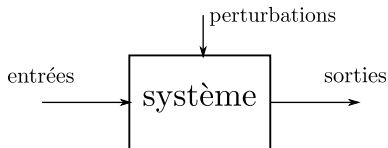
Faire en sorte qu'un système se comporte comme on souhaite

système = avion, voiture, satellite, machine-outil,
réaction chimique, réseau de communication,...

Qu'est-ce que le "Control" ?

Faire en sorte qu'un système se comporte comme on souhaite

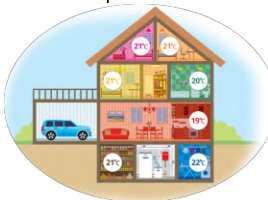
système = avion, voiture, satellite, machine-outil,
réaction chimique, réseau de communication,...



- ▶ Système $\Rightarrow$ l'objet d'étude
- ▶ Signaux d'entrée $\Rightarrow$ action sur le système
- ▶ Signaux de sortie $\Rightarrow$ réponse du système
- ▶ Signaux de perturbations $\Rightarrow$ action incontrôlée sur le système

Qu'est-ce que le "Control" ?

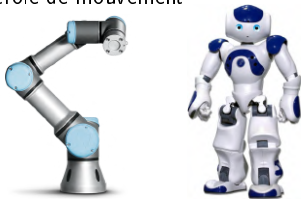
Contrôle de température



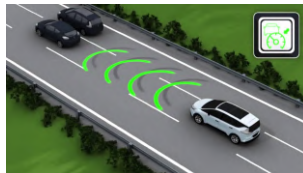
Contrôle d'attitude et d'orbite



Contrôle de mouvement



Contrôle de vitesse



Qu'est-ce que l' "Automatic" ?

Qu'est-ce que l' "Automatic" ?

- ▶ Pas manuel !
- ▶ Pas d'opérateur humain
- ▶ Fonctionne de manière autonome

Qu'est-ce que l' "Automatic" ?

- ▶ Pas manuel !
- ▶ Pas d'opérateur humain
- ▶ Fonctionne de manière autonome

Pourquoi ?

Qu'est-ce que l' "Automatic" ?

- ▶ Pas manuel !
- ▶ Pas d'opérateur humain
- ▶ Fonctionne de manière autonome

Pourquoi ?

- ▶ confort/pratique (il suffit de donner une consigne : température, vitesse, position... ; tâches répétitives)
- ▶ environnement hostile (espace, lieu chaud/froid, dangereux...)
- ▶ impossible pour un humain (petite échelle, performances : précision, rapidité, minimisation énergie...)

Qu'est-ce que l' "Automatic" ?

Exemple : le régulateur de vitesse d'une voiture



Manual



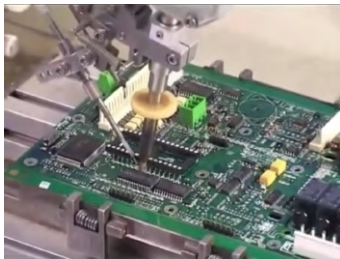
Automatic

Qu'est-ce que l' "Automatic" ?

Exemple : Soudure de composants sur une carte électronique



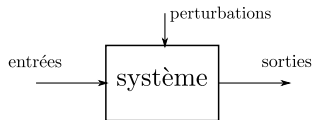
Manuel



Automatique

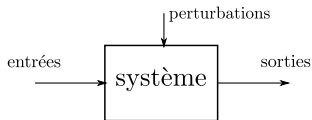
Objectif général en Automatique

Objectif : faire en sorte que la **sortie** se comporte telle que l'on souhaite



Objectif général en Automatique

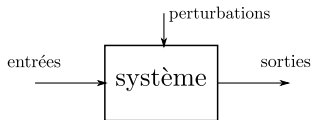
Objectif : faire en sorte que la **sortie** se comporte telle que l'on souhaite



Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif?

Objectif général en Automatique

Objectif : faire en sorte que la **sortie** se comporte telle que l'on souhaite

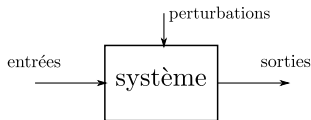


Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif?

⇒ il faut certainement donner des valeurs précises en **entrée**

Objectif général en Automatique

Objectif : faire en sorte que la **sortie** se comporte telle que l'on souhaite



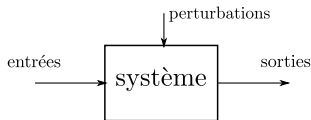
Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif ?

⇒ il faut certainement donner des valeurs précises en **entrée**

Question : comment calculer ces valeurs ?

Objectif général en Automatique

Objectif : faire en sorte que la **sortie** se comporte telle que l'on souhaite



Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif?

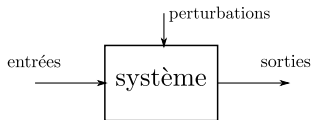
⇒ il faut certainement donner des valeurs précises en **entrée**

Question : comment calculer ces valeurs ?

⇒ il faut... *to be continued*

Objectif général en Automatique

Objectif : faire en sorte que la **sortie** se comporte telle que l'on souhaite



Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif?

⇒ il faut certainement donner des valeurs précises en **entrée**

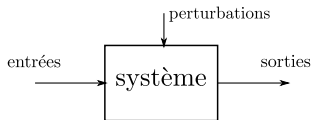
Question : comment calculer ces valeurs ?

⇒ il faut... *to be continued*

Question : si c'est automatique, le calcul donne les valeurs et moi je fais quoi ?

Objectif général en Automatique

Objectif : faire en sorte que la **sortie** se comporte telle que l'on souhaite



Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif ?

⇒ il faut certainement donner des valeurs précises en **entrée**

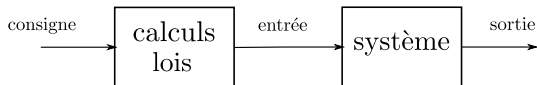
Question : comment calculer ces valeurs ?

⇒ il faut... *to be continued*

Question : si c'est automatique, le calcul donne les valeurs et moi je fais quoi ?

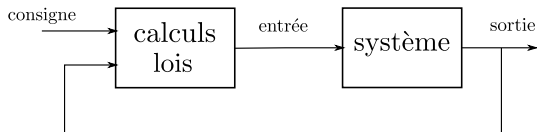
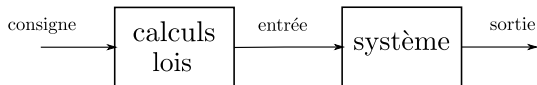
⇒ il faut donner la **consigne** à suivre pour la **sortie**

Schémas de commande



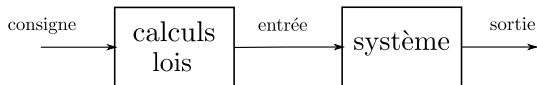
2. On parle aussi de principe de contre-réaction ou rétro-action ou d'asservissement

Schémas de commande

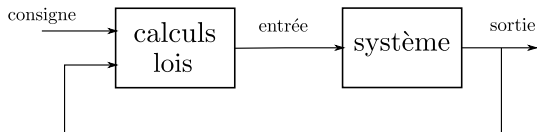


2. On parle aussi de principe de contre-réaction ou rétro-action ou d'asservissement

Schémas de commande



⇒ schéma de commande en boucle ouverte

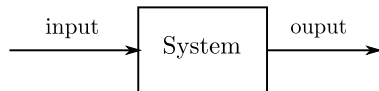


⇒ schéma de commande en boucle fermée²

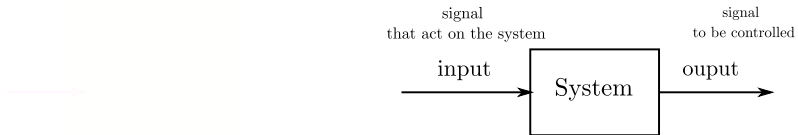
2. On parle aussi de principe de contre-réaction ou rétro-action ou d'asservissement

Structure classique d'un asservissement

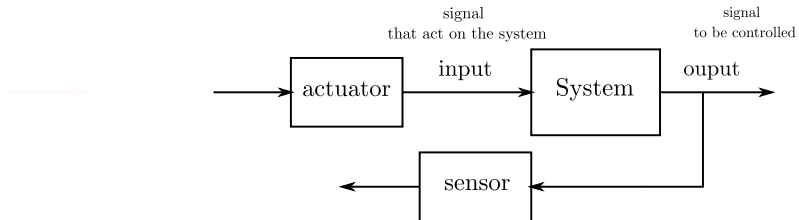
→



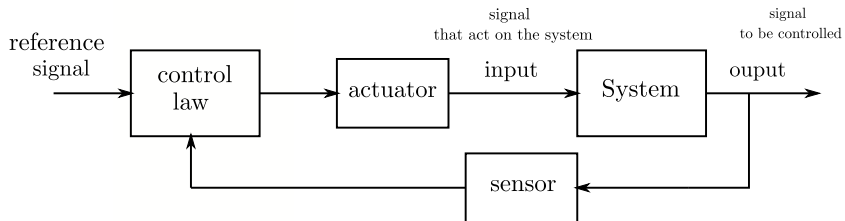
Structure classique d'un asservissement



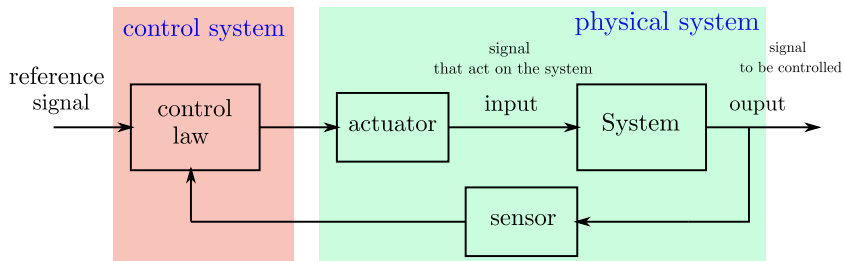
Structure classique d'un asservissement



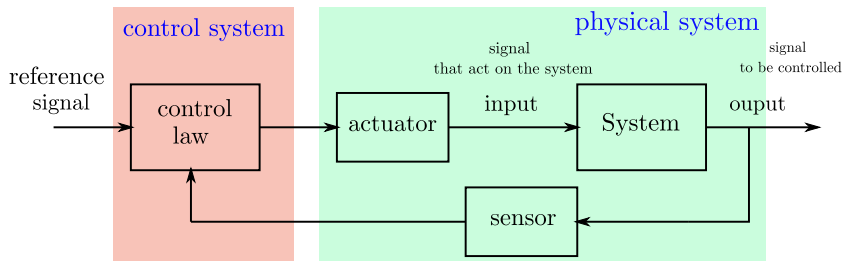
Structure classique d'un asservissement



Structure classique d'un asservissement



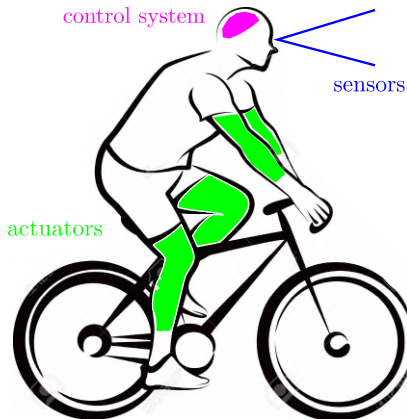
Structure classique d'un asservissement



- ▶ le système de commande est le “cerveau” de l’asservissement
- ▶ en fonction de la consigne et la mesure...
- ▶ ...il génère le signal de commande
- ▶ la consigne est spécifiée par un utilisateur (IHM) ou un autre système

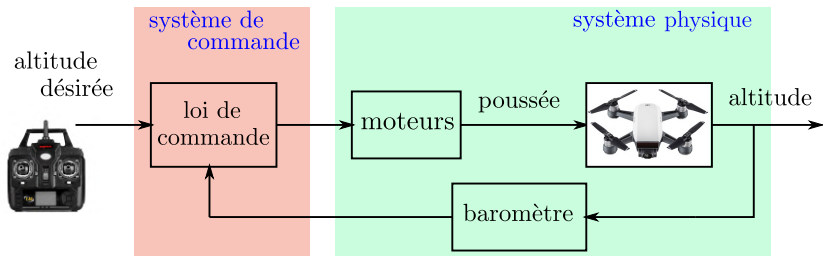
Structure classique d'un asservissement

C'est un mécanisme que nous appliquons naturellement
par exemple : faire du vélo



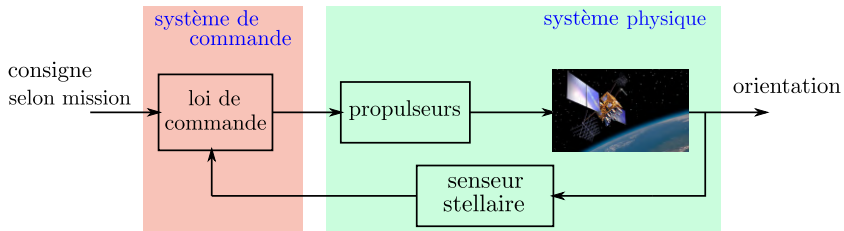
Exemples

Contrôle d'altitude d'un drone



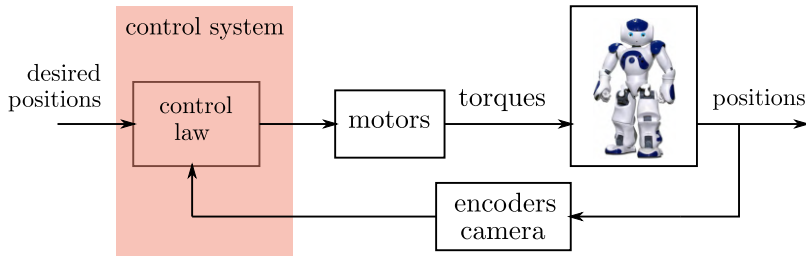
Exemples

Contrôle d'attitude d'un satellite



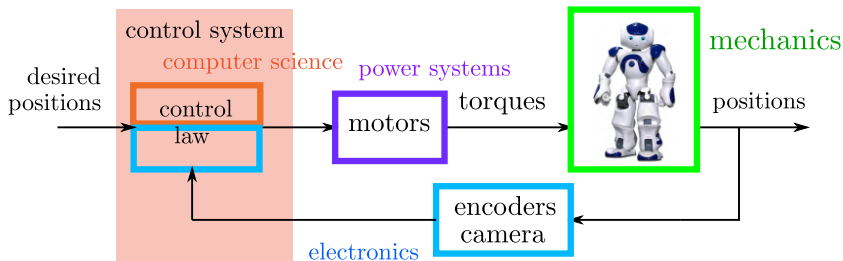
Une approche pluridisciplinaire

La commande des systèmes implique souvent une interaction avec d'autres disciplines.

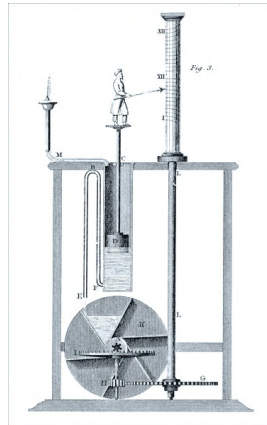
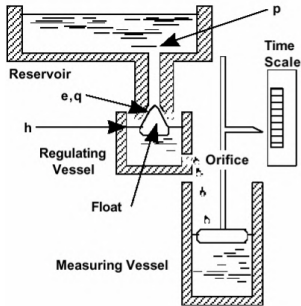


Une approche pluridisciplinaire

La commande des systèmes implique souvent une interaction avec d'autres disciplines.



Ctésibios (285-222 av. J.-C.), un inventeur grec d'Alexandrie, en Égypte éthique



Exemples historiques

Régulation de vitesse d'une machine à vapeur

Le régulateur à boule (flyball governor) de James Watt, en 1788 durant la première révolution industrielle

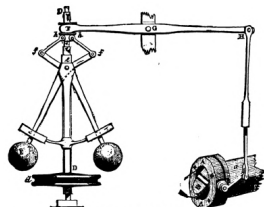
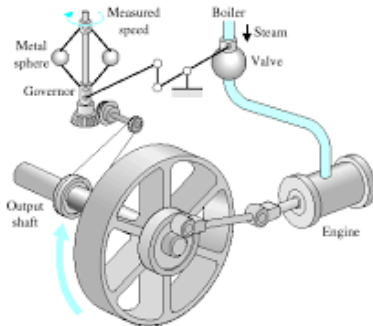
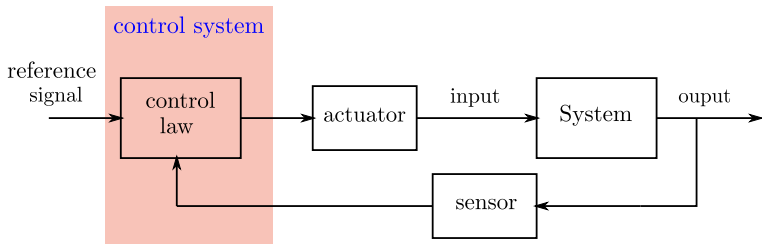


FIG. 4.—Governor and Throttle-Valve.

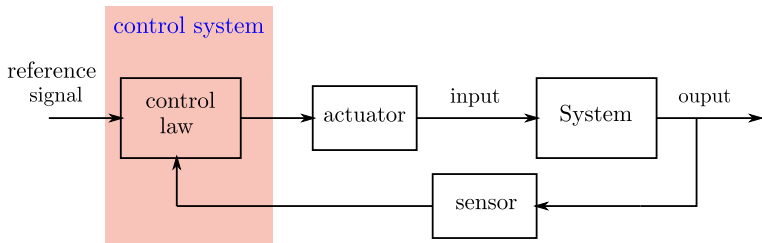
Le système de commande

L'automaticien travaille sur le système de commande



Le système de commande

L'automaticien travaille sur le système de commande



- ▶ conception de lois de commande / contrôleurs / correcteurs / compensateurs
- ▶ peut se traduire sous forme d'équations
- ▶ peut se traduire sous forme d'algorithmes

Mise en oeuvre ?

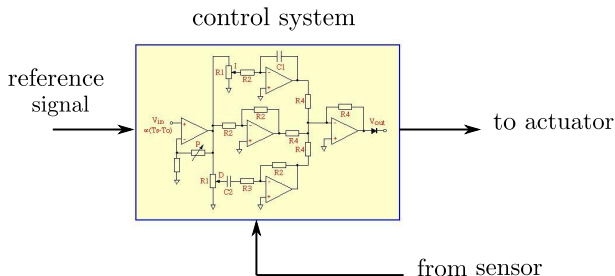
Avant, mise en oeuvre analogique...

Mise en oeuvre ?

Avant, mise en oeuvre analogique...

contrôleur à base d'électronique analogique :

résistances, condensateurs, amplificateurs opérationnels...



Mise en oeuvre ?

ou mécanique

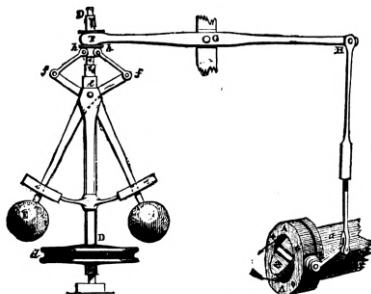


FIG. 4.—Governor and Throttle-Valve.

Mise en oeuvre ?

De nos jours, implémentation sur calculateurs numériques

⇒ ordinateur, microcontrôleur, FPGA, automate indus...

Mise en oeuvre ?

De nos jours, implémentation sur calculateurs numériques

⇒ ordinateur, microcontrôleur, FPGA, automate indus...



A decorative graphic on the left side of the slide, consisting of several concentric circles. The circles are centered on the left edge and extend towards the center of the slide. They are rendered in a gradient of orange and yellow colors, with the innermost circle being the lightest and the outermost being the darkest. The circles are of varying thicknesses and are partially cut off by the left edge of the frame.

Modélisation

Sommaire

Introduction

- Notion de signal et de système
- Un peu de vocabulaire
- Qu'est-ce que l'automatique ?
- Le système de commande

Modélisation

- Exemples introductifs
- Fonction de transfert
- Schéma fonctionnel

Réponse d'un système

- Réponse temporelle
- Notion de stabilité
- Réponse fréquentielle
- Résumé

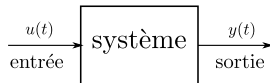
Stabilité et performances d'un asservissement

- Généralités et exemple introductif
- Stabilité
- Précision
- Rapidité
- Marges de stabilité

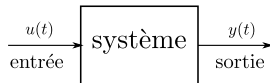
Synthèse de correcteurs

- Introduction
- Synthèse directe
- Actions élémentaires
- Combinaisons d'actions
- Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Soit un système à commander :



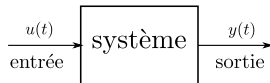
Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour contrôler la sortie ?

Soit un système à commander :

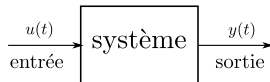


Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour contrôler la sortie ?

⇒ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Soit un système à commander :



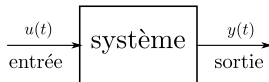
Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour contrôler la sortie ?

⇒ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs ?

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

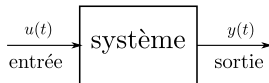
Question : comment agir sur le système pour contrôler la sortie ?

⇒ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs ?

⇒ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour contrôler la sortie ?

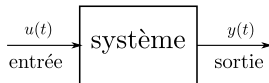
⇒ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs ?

⇒ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

⇒ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour contrôler la sortie ?

⇒ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs ?

⇒ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

⇒ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

↪ déterminer une relation entre $u(t)$ et $y(t)$

Pourquoi la modélisation ?

Ce travail existe dans toutes les disciplines scientifiques

⇒ vise à établir un modèle de l'objet d'étude

C'est une étape nécessaire pour

- ▶ comprendre et analyser un processus physique / dispositif / technologie...
- ▶ pouvoir prédire son comportement
- ▶ pour développer des outils de simulation

Pourquoi la modélisation ?

Ce travail existe dans toutes les disciplines scientifiques

⇒ vise à établir un modèle de l'objet d'étude

C'est une étape nécessaire pour

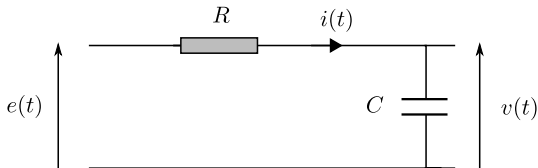
- ▶ comprendre et analyser un processus physique / dispositif / technologie...
- ▶ pouvoir prédire son comportement
- ▶ pour développer des outils de simulation

★ les modèles sont généralement des représentations mathématiques

⚠ un modèle est toujours une représentation approchée de la réalité

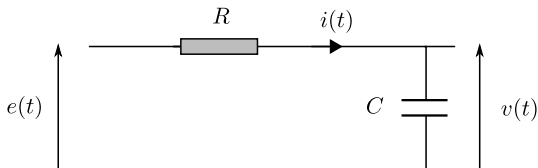
Exemple : le circuit RC

Considérons un circuit électronique



Exemple : le circuit RC

Considérons un circuit électronique

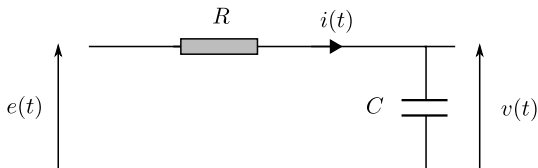


Appliquons la loi des mailles

$$e(t) = Ri(t) + v(t) \quad \text{sachant que} \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Exemple : le circuit RC

Considérons un circuit électronique



Appliquons la loi des mailles

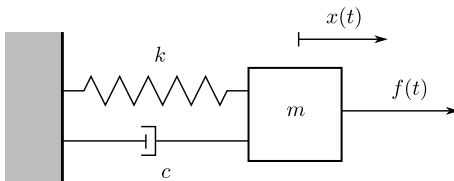
$$e(t) = Ri(t) + v(t) \quad \text{sachant que} \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

modèle du système :

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t)$$

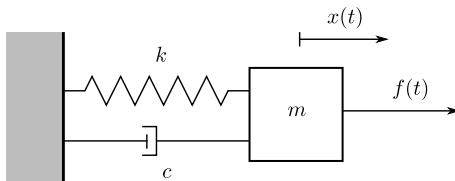
Exemple : structure masse-ressort

Considérons une structure mécanique



Exemple : structure masse-ressort

Considérons une structure mécanique

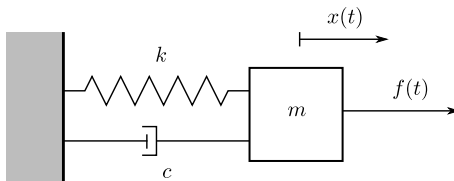


Appliquons le principe fondamental de la dynamique

$$m\ddot{x}(t) = f(t) + f_{\text{ressort}}(t) + f_{\text{amort}}(t) \quad \text{sachant que} \quad \begin{cases} f_{\text{ressort}}(t) = -kx(t) \\ f_{\text{amort}}(t) = -c\dot{x}(t) \end{cases}$$

Exemple : structure masse-ressort

Considérons une structure mécanique



Appliquons le principe fondamental de la dynamique

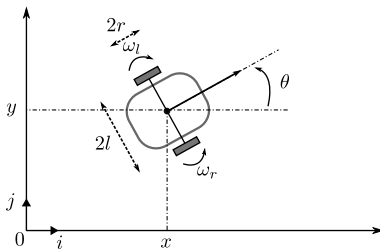
$$m\ddot{x}(t) = f(t) + f_{\text{ressort}}(t) + f_{\text{amort}}(t) \quad \text{sachant que} \quad \begin{cases} f_{\text{ressort}}(t) = -kx(t) \\ f_{\text{amort}}(t) = -c\dot{x}(t) \end{cases}$$

modèle du système :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

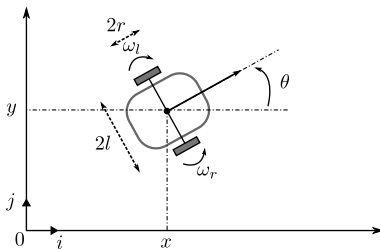
Exemple : base mobile

Considérons un robot à deux roues motrices indépendantes



Exemple : base mobile

Considérons un robot à deux roues motrices indépendantes

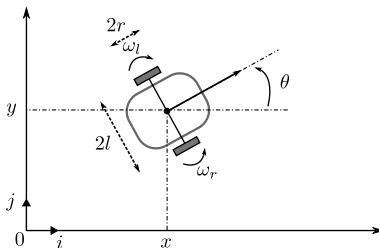


les vitesses de translation et rotation du mobile sont données par

$$v = r \frac{\omega_r + \omega_l}{2} \quad \text{et} \quad \omega = r \frac{\omega_r - \omega_l}{2l}$$

Exemple : base mobile

Considérons un robot à deux roues motrices indépendantes



les vitesses de translation et rotation du mobile sont données par

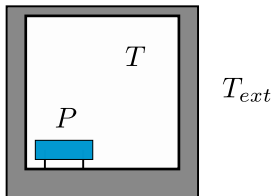
$$v = r \frac{\omega_r + \omega_l}{2} \quad \text{et} \quad \omega = r \frac{\omega_r - \omega_l}{2l}$$

modèle du système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{cases}$$

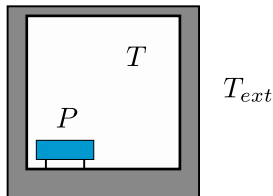
Exemple : échanges thermiques dans une enceinte

Considérons les variations de température à l'intérieur d'une enceinte



Exemple : échanges thermiques dans une enceinte

Considérons les variations de température à l'intérieur d'une enceinte

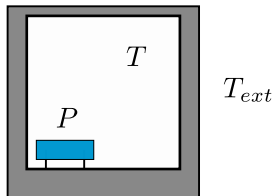


La déperdition et le bilan énergétique s'écrivent

$$P_{pertes} = k(T - T_{ext}) \quad \text{et} \quad P - P_{pertes} = c \frac{dT}{dt}$$

Exemple : échanges thermiques dans une enceinte

Considérons les variations de température à l'intérieur d'une enceinte



La déperdition et le bilan énergétique s'écrivent

$$P_{pertes} = k(T - T_{ext}) \quad \text{et} \quad P - P_{pertes} = c \frac{dT}{dt}$$

modèle du système :

$$P = k(T - T_{ext}) + c \dot{T}$$

Exemple : dynamique des populations

Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Exemple : dynamique des populations

Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Premier modèle :

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)$$

avec

- ▶ α : taux de naissances
- ▶ β : taux de décès

Exemple : dynamique des populations

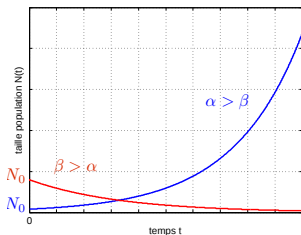
Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Premier modèle :

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)$$

avec

- ▶ α : taux de naissances
- ▶ β : taux de décès



Exemple : dynamique des populations

Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Premier modèle :

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)$$

avec

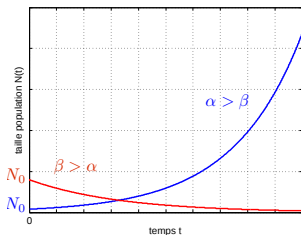
- ▶ α : taux de naissances
- ▶ β : taux de décès

Second modèle :

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right)$$

avec

- ▶ $r = \alpha - \beta$
- ▶ K : nombre max d'individus



Exemple : dynamique des populations

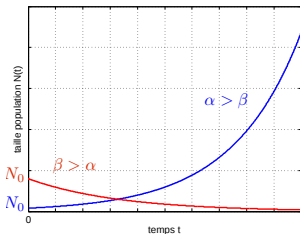
Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Premier modèle :

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)$$

avec

- ▶ α : taux de naissances
- ▶ β : taux de décès

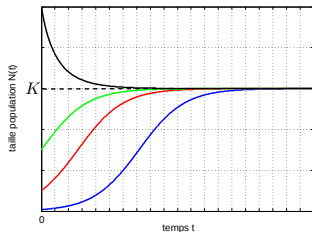


Second modèle :

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

avec

- ▶ $r = \alpha - \beta$
- ▶ K : nombre max d'individus



Modèles mathématiques

Ici, les modèles sont des *équations différentielles*

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t)$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{cases}$$

$$P = k(T - T_{ext}) + c\dot{T}$$

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right)$$

Modèles mathématiques

Ici, les modèles sont des *équations différentielles*

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t) \quad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{cases}$$

$$P = k(T - T_{ext}) + c\dot{T} \quad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right)$$

Modèles mathématiques

Ici, les modèles sont des *équations différentielles*

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t) \quad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{cases}$$

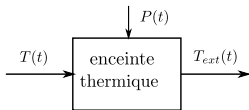
$$P = k(T - T_{ext}) + c\dot{T} \quad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right)$$

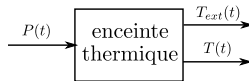
★ même formalisme mathématique.

QCM interactif

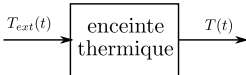
Quelle est la représentation entrée-sortie pour l'exemple de l'enceinte thermique ?



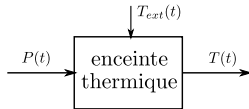
(A)



(B)



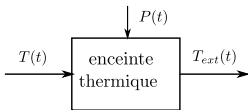
(C)



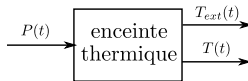
(D)

QCM interactif

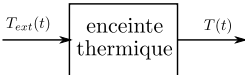
Quelle est la représentation entrée-sortie pour l'exemple de l'enceinte thermique ?



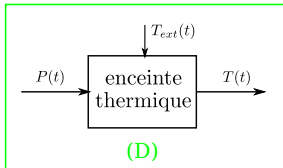
(A)



(B)



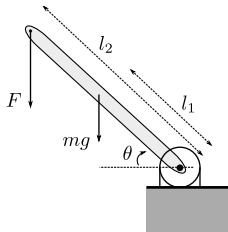
(C)



(D)

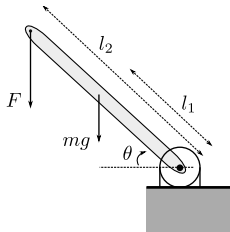
Autre exemple

Modélisation d'un bras mécanique motorisé



Autre exemple

Modélisation d'un bras mécanique motorisé



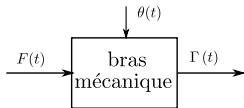
Relation entre la position angulaire θ et les forces, dont le couple moteur Γ :

$$J\ddot{\theta}(t) = -\left(mgl_1 + l_2 F(t)\right) \cos \theta(t) + \Gamma(t)$$

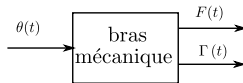
F est la force due aux masses transportées.

QCM interactif

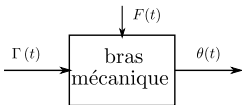
Quelle est la représentation entrée-sortie pour l'exemple du bras mécanique ?



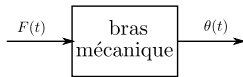
(A)



(B)



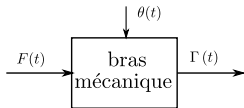
(C)



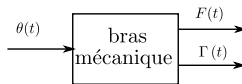
(D)

QCM interactif

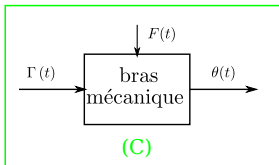
Quelle est la représentation entrée-sortie pour l'exemple du bras mécanique ?



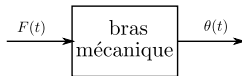
(A)



(B)



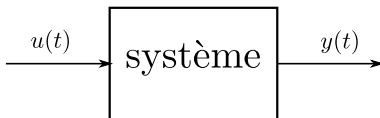
(C)



(D)

Les systèmes linéaires invariants

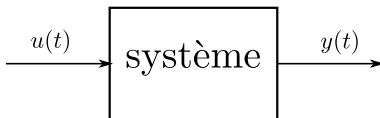
Dans de ce cours, on s'intéresse exclusivement aux SLI



Relation entrée-sortie : $u(t) \rightarrow y(t)$

Les systèmes linéaires invariants

Dans de ce cours, on s'intéresse exclusivement aux SLI

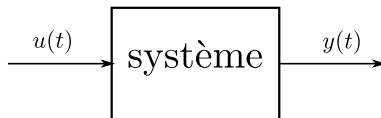


Relation entrée-sortie : $u(t) \rightarrow y(t)$

$\Rightarrow$ **équations différentielles linéaires à coefficients constants**

Les systèmes linéaires invariants

Dans de ce cours, on s'intéresse exclusivement aux SLI



Relation entrée-sortie : $u(t) \rightarrow y(t)$

$\Rightarrow$ **équations différentielles linéaires à coefficients constants**

Exemple : $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 2y(t) = 5u(t)$

La transformée de Laplace

La transformée de Laplace (TL) d'une fonction $f(t)$ est la fonction du nombre complexe s :

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

On notera $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ et $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$

La transformée de Laplace

La transformée de Laplace (TL) d'une fonction $f(t)$ est la fonction du nombre complexe s :

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

On notera $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ et $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$

- ▶ opération mathématique
- ▶ transforme une fonction temporelle en une fonction “abstraite” complexe
- ▶ intérêt ? → ses propriétés
- ▶ permet un traitement plus simple de certaines opérations
- ▶ généralise la transformée de Fourier

La transformée de Laplace

soit deux fonctions $f(t) \xrightarrow{\text{TL}} \hat{f}(s)$ et $g(t) \xrightarrow{\text{TL}} \hat{g}(s)$

Propriétés :

▷ Linéarité : $af(t) + bg(t) \xrightarrow{\text{TL}} a\hat{f}(s) + b\hat{g}(s), \quad a \text{ et } b \text{ constants}$

▷ Dérivation : $\frac{d}{dt}f(t) \xrightarrow{\text{TL}} s\hat{f}(s) - f(0)$

▷ Intégration : $\int_0^t f(\theta)d\theta \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{s}\hat{f}(s)$

▷ Translation : $f(t - \tau) \xrightarrow{\text{TL}} e^{-s\tau}\hat{f}(s) \quad \tau \text{ constant}$

▷ Valeur finale : $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{f}(s)$

Table des transformées

les fonctions temporelles $f(t)$ sont définies pour $t \geq 0$ (0 pour $t < 0$)

Fonction	Dom. temporel $f(t)$	Trans. de Laplace $\hat{f}(s)$
échelon	1	$\frac{1}{s}$
rampe	t	$\frac{1}{s^2}$
puissance n-ième	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
exponentielle décroissante	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

Table des transformées

les fonctions temporelles $f(t)$ sont définies pour $t \geq 0$ (0 pour $t < 0$)

Fonction	Dom. temporel $f(t)$	Trans. de Laplace $\hat{f}(s)$
sinus	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
cosinus	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
décroissance exponentielle d'un sinus	$e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
décroissance exponentielle d'un cosinus	$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$
décroissance exponentielle d'une puissance n-ième	$\frac{t^n}{n!} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$

QCM interactif

Sachant que

$$f(t) = 2t^3 - t^2 \quad \xrightarrow{TL} \quad \hat{f}(s) = \frac{12}{s^4} - \frac{2}{s^3}$$

sans faire de calcul, quelle est l'expression de la TL de la fonction dérivée $g(t) = \dot{f}(t)$?

(A) $\hat{g}(s) = \frac{12}{s^3} - \frac{2}{s^2}$

(C) $\hat{g}(s) = \frac{3}{s^5} - \frac{1}{s^4}$

(B) $\hat{g}(s) = 12s^3 - 2s$

(D) $\hat{g}(s) = \frac{3}{s^3} - \frac{1}{s^2}$

QCM interactif

Sachant que

$$f(t) = 2t^3 - t^2 \quad \xrightarrow{TL} \quad \hat{f}(s) = \frac{12}{s^4} - \frac{2}{s^3}$$

sans faire de calcul, quelle est l'expression de la TL de la fonction dérivée $g(t) = \dot{f}(t)$?

(A) $\hat{g}(s) = \frac{12}{s^3} - \frac{2}{s^2}$

(C) $\hat{g}(s) = \frac{3}{s^5} - \frac{1}{s^4}$

(B) $\hat{g}(s) = 12s^3 - 2s$

(D) $\hat{g}(s) = \frac{3}{s^3} - \frac{1}{s^2}$

QCM interactif

Quelle est la fonction temporelle correspondant à la fonction en s ?

$$\hat{f}(s) = \frac{4}{2s + 1}$$

(A) $f(t) = 4e^{-2t}$

(B) $f(t) = 2e^{-0.5t}$

(C) $f(t) = 4e^t$

(D) $f(t) = e^{4t}$

QCM interactif

Quelle est la fonction temporelle correspondant à la fonction en s ?

$$\hat{f}(s) = \frac{4}{2s + 1}$$

(A) $f(t) = 4e^{-2t}$

(B) $f(t) = 2e^{-0.5t}$

(C) $f(t) = 4e^t$

(D) $f(t) = e^{4t}$

Fonctions de transfert

Appliquons la transformée de Laplace à une équation différentielle

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

Fonctions de transfert

Appliquons la transformée de Laplace à une équation différentielle

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$\downarrow \quad \mathcal{L}$

$$5s^3 \hat{y}(s) + 2s^2 \hat{y}(s) + s \hat{y}(s) + 4 \hat{y}(s) = s \hat{u}(s) + 2 \hat{u}(s)$$

Fonctions de transfert

Appliquons la transformée de Laplace à une équation différentielle

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$\downarrow \quad \mathcal{L}$

$$5s^3 \hat{y}(s) + 2s^2 \hat{y}(s) + s \hat{y}(s) + 4 \hat{y}(s) = s \hat{u}(s) + 2 \hat{u}(s)$$

$\downarrow$

$$\hat{y}(s) (5s^3 + 2s^2 + s + 4) = (s + 2) \hat{u}(s)$$

Fonctions de transfert

Appliquons la transformée de Laplace à une équation différentielle

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$5s^3 \hat{y}(s) + 2s^2 \hat{y}(s) + s \hat{y}(s) + 4 \hat{y}(s) = s \hat{u}(s) + 2 \hat{u}(s)$$

$$\downarrow$$

$$\hat{y}(s) (5s^3 + 2s^2 + s + 4) = (s + 2) \hat{u}(s)$$

$$\downarrow$$

$$\hat{y}(s) = \frac{s + 2}{5s^3 + 2s^2 + s + 4} \hat{u}(s)$$

Fonctions de transfert

Appliquons la transformée de Laplace à une équation différentielle

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$5s^3 \hat{y}(s) + 2s^2 \hat{y}(s) + s \hat{y}(s) + 4 \hat{y}(s) = s \hat{u}(s) + 2 \hat{u}(s)$$

$$\downarrow$$

$$\hat{y}(s) (5s^3 + 2s^2 + s + 4) = (s + 2) \hat{u}(s)$$

$$\downarrow$$

$$\hat{y}(s) = \frac{s + 2}{5s^3 + 2s^2 + s + 4} \hat{u}(s)$$

Nouvelle relation entrée-sortie : **la fonction de transfert**

$$\hat{y}(s) = G(s) \hat{u}(s)$$

Fonctions de transfert

Cas général :

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

Fonctions de transfert

Cas général :

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$\downarrow \quad \mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \dots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) = b_m s^m \hat{u}(s) + \dots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

Fonctions de transfert

Cas général :

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$\downarrow \quad \mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \dots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) = b_m s^m \hat{u}(s) + \dots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

$$\downarrow$$

Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

Fonctions de transfert

Cas général :

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$\downarrow \quad \mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \dots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) = b_m s^m \hat{u}(s) + \dots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

$$\downarrow$$

Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

- ▶ se définit comme le rapport : TL sortie sur TL entrée, avec CI nulles
- ▶ Pour les SLI, la fonction de transfert est toujours une fraction rationnelle

Fonctions de transfert

Autre exemple :

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) - 2y(t) = 6u(t)$$

Fonctions de transfert

Autre exemple :

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) - 2y(t) = 6u(t)$$

$$\downarrow \quad \mathcal{L}$$

$$s^2 \hat{y}(s) + 4s \hat{y}(s) - 2\hat{y}(s) = 6\hat{u}(s)$$

$$\downarrow$$

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{6}{s^2 + 4s - 2}$$

QCM interactif

Quelle est la fonction de transfert de l'équation différentielle ?

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

(A) $G(s) = \frac{s+2}{s+3}$

(B) $G(s) = \frac{s+2}{s^2+3s}$

(C) $G(s) = \frac{2(s+1)}{3s+1}$

(D) $G(s) = \frac{2s+1}{3s}$

QCM interactif

Quelle est la fonction de transfert de l'équation différentielle ?

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

(A) $G(s) = \frac{s+2}{s+3}$

(B) $G(s) = \frac{s+2}{s^2+3s}$

(C) $G(s) = \frac{2(s+1)}{3s+1}$

(D) $G(s) = \frac{2s+1}{3s}$

Quelques définitions :

- ▶ L'**ordre** d'un système est le degré du polynôme du dénominateur (n).
- ▶ Le système est dit **strictement propre (propre)**, si $n > m$ ($n = m$).
- ▶ Les **pôles** sont les racines du dénominateur.
- ▶ Les **zéros** sont les racines du numérateur.

Quelques définitions :

- ▶ L'**ordre** d'un système est le degré du polynôme du dénominateur (n).
- ▶ Le système est dit **strictement propre (propre)**, si $n > m$ ($n = m$).
- ▶ Les **pôles** sont les racines du dénominateur.
- ▶ Les **zéros** sont les racines du numérateur.

Exemple du système masse-ressort :

La relation force - position est décrite par

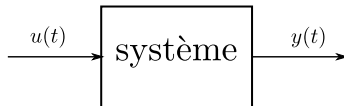
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t).$$

sa fonction de transfert s'écrit
$$\frac{\hat{x}(s)}{\hat{f}(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

⇒ système d'ordre 2 ; sans zéro ; les 2 pôles sont solutions de $ms^2 + cs + k = 0$.

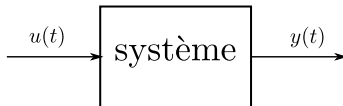
Deux représentations

Pour un système linéaire invariant



Deux représentations

Pour un système linéaire invariant



Deux modèles :

dans le domaine temporel

⇒ équation différentielle

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = 6u(t)$$

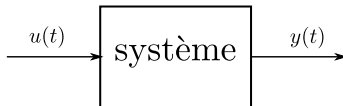
dans le domaine de Laplace

⇒ fonction de transfert

$$\hat{y}(s) = \frac{6}{s+2} \hat{u}(s)$$

Deux représentations

Pour un système linéaire invariant



Deux modèles :

dans le domaine temporel

⇒ équation différentielle

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = 6u(t)$$

dans le domaine de Laplace

⇒ fonction de transfert

$$\hat{y}(s) = \frac{6}{s+2} \hat{u}(s)$$

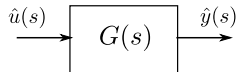
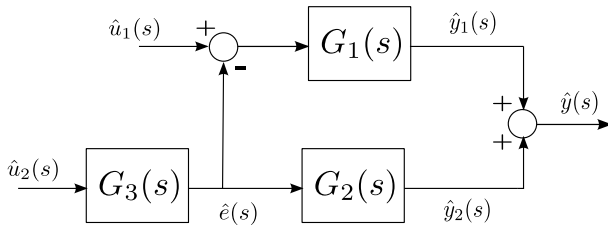


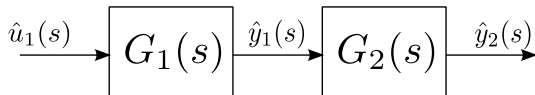
Schéma fonctionnel

Représentation graphique des systèmes complexes

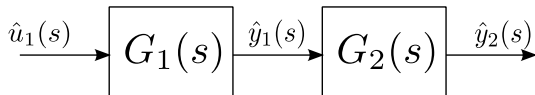


Le formalisme des fonctions de transfert est très pratique pour ce type de représentation.

Mise en série de deux systèmes



Mise en série de deux systèmes

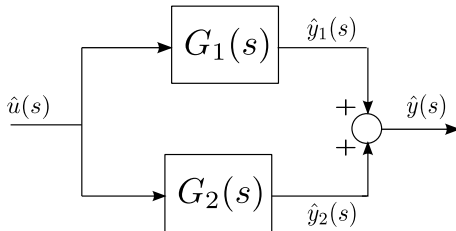


$$\begin{aligned}\hat{y}_2(s) &= G_2(s)\hat{y}_1(s) \\ &= G_2(s)G_1(s)\hat{u}_1(s)\end{aligned}$$

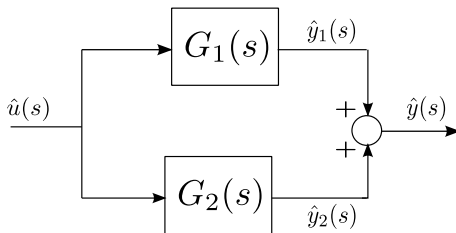
Transfert équivalent :

$$F(s) = G_2(s) \times G_1(s)$$

Mise en parallèle de deux systèmes



Mise en parallèle de deux systèmes

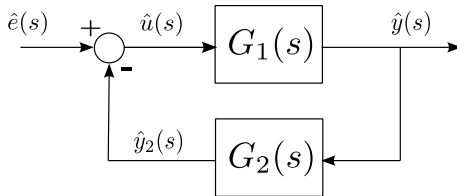


$$\begin{aligned}\hat{y}(s) &= \hat{y}_1(s) + \hat{y}_2(s) \\ &= \left(G_1(s) + G_2(s) \right) \hat{u}(s)\end{aligned}$$

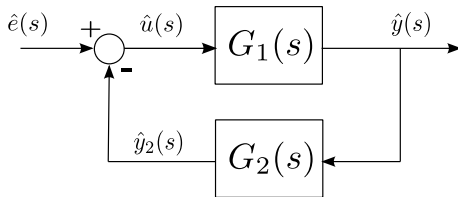
Transfert équivalent :

$$F(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

Interconnexion feedback



Interconnexion feedback



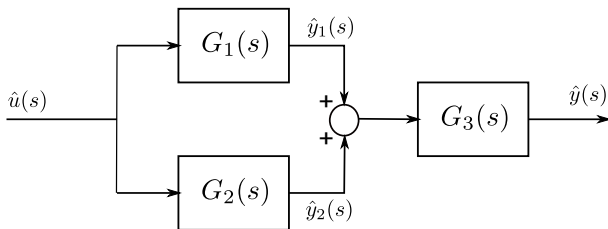
$$\hat{y}(s) = G_1(s)\hat{u}(s)$$

$$\hat{u}(s) = \hat{e}(s) - G_2(s)\hat{y}(s)$$

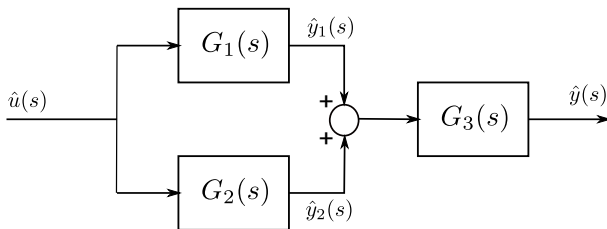
Transfert équivalent :

$$F(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

Exemple 1



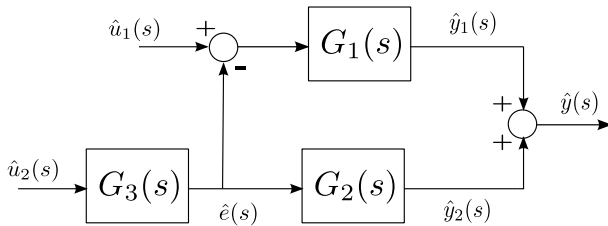
Exemple 1



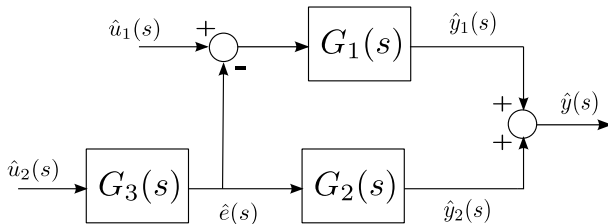
Transfert équivalent :

$$\hat{y}(s) = \underbrace{G_3(s) \left(G_1(s) + G_2(s) \right)}_{F(s)} \hat{u}(s)$$

Exemple 2



Exemple 2



Transfert équivalent :

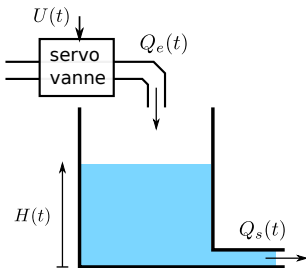
$$\hat{y}(s) = F_1(s)\hat{u}_1(s) + F_2(s)\hat{u}_2(s)$$

avec

$$F_1(s) = G_1(s) \quad \text{et} \quad F_2(s) = (G_2(s) - G_1(s))G_3(s)$$

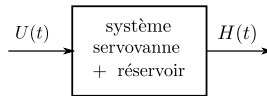
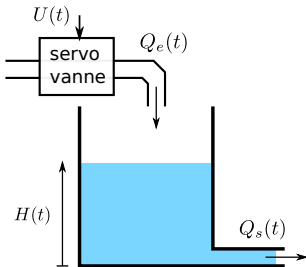
Exemple concret 1

Contrôle du niveau d'un réservoir



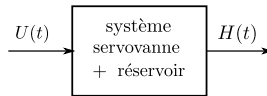
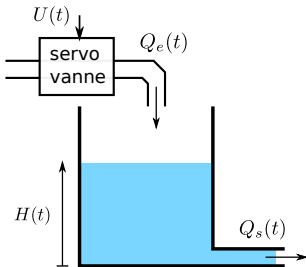
Exemple concret 1

Contrôle du niveau d'un réservoir



Exemple concret 1

Contrôle du niveau d'un réservoir



modèle réservoir :

$$A \frac{dH}{dt}(t) = Q_e(t) - Q_s(t)$$

$$A \frac{dH}{dt}(t) = Q_e(t) - K\sqrt{H(t)}$$

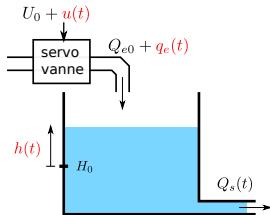
modèle servo-vanne :

$$\tau_{sv} \dot{Q}_e(t) + Q_e(t) = k_{sv} u(t)$$

Exemple concret 1

Considérons des petites variations autour d'un point de fonctionnement :

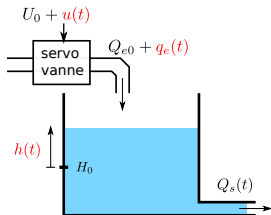
$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{tension} & \rightarrow U(t) = U_0 + u(t) \\ \text{débit} & \rightarrow Q_e(t) = Q_{e0} + q_e(t) \\ \text{hauteur} & \rightarrow H(t) = H_0 + h(t) \end{array} \right.$$



Exemple concret 1

Considérons des petites variations autour d'un point de fonctionnement :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{tension} & \rightarrow U(t) = U_0 + u(t) \\ \text{débit} & \rightarrow Q_e(t) = Q_{e0} + q_e(t) \\ \text{hauteur} & \rightarrow H(t) = H_0 + h(t) \end{array} \right.$$



modèles approchés pour petits signaux

réservoir : $A\dot{h}(t) = q_e(t) - \alpha h(t)$

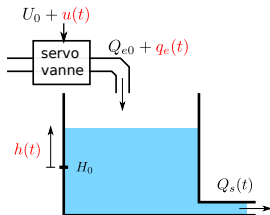
avec $\alpha = \frac{Q_{e0}}{2H_0}$

servovanne : $\tau_{sv}\dot{q}_e(t) + q_e(t) = k_{sv}u(t)$

Exemple concret 1

Considérons des petites variations autour d'un point de fonctionnement :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{tension} & \rightarrow U(t) = U_0 + u(t) \\ \text{débit} & \rightarrow Q_e(t) = Q_{e0} + q_e(t) \\ \text{hauteur} & \rightarrow H(t) = H_0 + h(t) \end{array} \right.$$

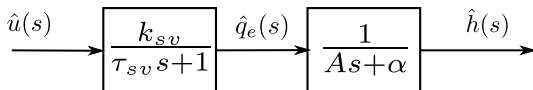


modèles approchés pour petits signaux

réservoir : $A\dot{h}(t) = q_e(t) - \alpha h(t)$

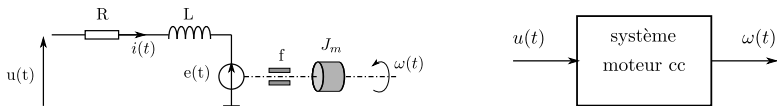
avec $\alpha = \frac{Q_{e0}}{2H_0}$

servovanne : $\tau_{sv}\dot{q}_e(t) + q_e(t) = k_{sv}u(t)$



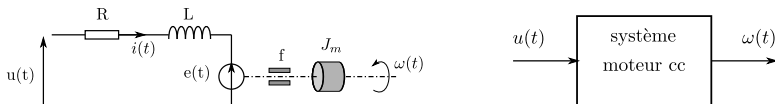
Exemple concret 2

Le moteur à courant continu : un système électromécanique



Exemple concret 2

Le moteur à courant continu : un système électromécanique

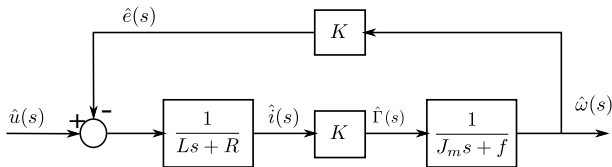


modèle :

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}(t) + e(t), & \text{avec } e(t) = K\omega(t) \\ J_m \dot{\omega}(t) = \Gamma(t) - f\omega(t), & \text{avec } \Gamma(t) = Ki(t) \end{cases}$$

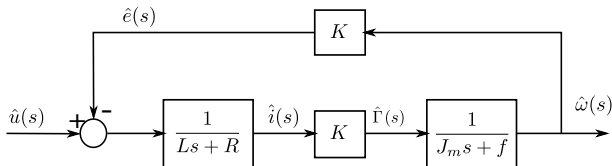
Exemple concret 2

Schéma bloc



Exemple concret 2

Schéma bloc



Fonction de transfert équivalent

$$F(s) = \frac{\hat{\omega}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{K}{LJ_ms^2 + (RJ_m + Lf)s + (Rf + K^2)}$$

QCM interactif

Dans l'exemple 2, quelle est l'expression de $\hat{y}_2(s)$?

(A) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)\hat{e}(s)G_3(s)\hat{u}_2(s)$

(C) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)(\hat{e}(s) - \hat{u}_1(s))$

(B) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)$

(D) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)G_3(s)\hat{u}_2(s)$

QCM interactif

Dans l'exemple 2, quelle est l'expression de $\hat{y}_2(s)$?

(A) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)\hat{e}(s)G_3(s)\hat{u}_2(s)$

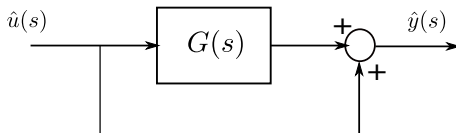
(C) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)(\hat{e}(s) - \hat{u}_1(s))$

(B) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)$

(D) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)G_3(s)\hat{u}_2(s)$

QCM interactif

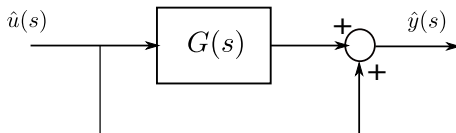
Quelle est la relation entrée-sortie correcte ?



- (A) $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$
- (B) $\hat{y}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}\hat{u}(s)$
- (C) $\hat{y}(s) = (G(s) + 1)\hat{u}(s)$
- (D) $\hat{y}(s) = G(s) + \hat{u}(s)$

QCM interactif

Quelle est la relation entrée-sortie correcte ?



(A) $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$

(B) $\hat{y}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}\hat{u}(s)$

(C) $\hat{y}(s) = (G(s) + 1)\hat{u}(s)$

(D) $\hat{y}(s) = G(s) + \hat{u}(s)$



Réponse d'un système

Sommaire

Introduction

- Notion de signal et de système
- Un peu de vocabulaire
- Qu'est-ce que l'automatique ?
- Le système de commande

Modélisation

- Exemples introductifs
- Fonction de transfert
- Schéma fonctionnel

Réponse d'un système

- Réponse temporelle
- Notion de stabilité
- Réponse fréquentielle
- Résumé

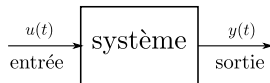
Stabilité et performances d'un asservissement

- Généralités et exemple introductif
- Stabilité
- Précision
- Rapidité
- Marges de stabilité

Synthèse de correcteurs

- Introduction
- Synthèse directe
- Actions élémentaires
- Combinaisons d'actions
- Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif?

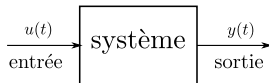
⇒ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs?

⇒ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

⇒ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif?

⇒ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

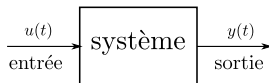
Question : comment calculer ces valeurs?

⇒ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

Vu au précédent chapitre

⇒ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif?

⇒ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs?

⇒ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

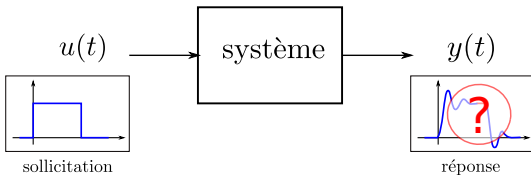
↔ pour un $u(t)$ donné, peut-on calculer $y(t)$?

Vu au précédent chapitre

⇒ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

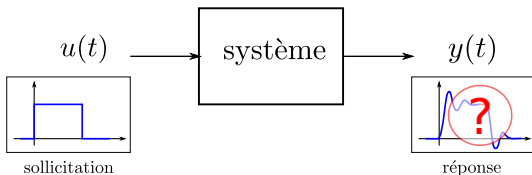
Réponse temporelle

Calcul explicite de la sortie $y(t)$ à une entrée $u(t)$ donnée.



Réponse temporelle

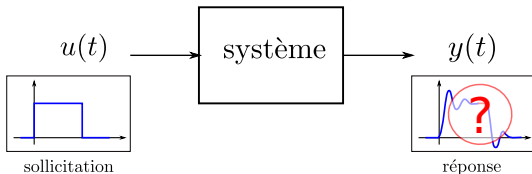
Calcul explicite de la sortie $y(t)$ à une entrée $u(t)$ donnée.



⇒ revient à résoudre l'équation différentielle du modèle

Réponse temporelle

Calcul explicite de la sortie $y(t)$ à une entrée $u(t)$ donnée.



⇒ revient à résoudre l'équation différentielle du modèle

Résolution avec les fonctions de transfert :

1. Exprimer la sortie $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$
2. Effectuer une décomposition en éléments simples de $\hat{y}(s)$
3. Appliquer la transformée de Laplace inverse (à l'aide de la table)

$$\hat{y}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) \quad \text{pour obtenir le signal dans le domaine temporel}$$

Exemple 1

Calculons la réponse du système suivant à un échelon unité $u(t) = 1, \forall t \geq 0$:

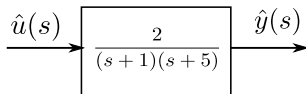
$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 5y(t) = 2u(t)$$

Exemple 1

Calculons la réponse du système suivant à un échelon unité $u(t) = 1, \forall t \geq 0$:

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 5y(t) = 2u(t)$$

► calcul de la fonction de transfert

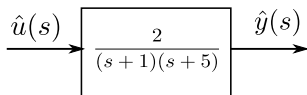


Exemple 1

Calculons la réponse du système suivant à un échelon unité $u(t) = 1, \forall t \geq 0$:

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 5y(t) = 2u(t)$$

► calcul de la fonction de transfert



► exprimons le signal de sortie

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{(s+1)(s+5)} \hat{u}(s) = \frac{2}{(s+1)(s+5)} \frac{1}{s}$$

Exemple 1

- la réponse se décompose en

$$\hat{y}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+5}$$

Exemple 1

- la réponse se décompose en

$$\hat{y}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+5}$$

- calcul des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A & = & s\hat{y}(s)|_{s=0} = \frac{2}{5} \\ B & = & (s+1)\hat{y}(s)|_{s=-1} = -\frac{1}{2} \\ C & = & (s+5)\hat{y}(s)|_{s=-5} = \frac{1}{10} \end{array} \right.$$

Exemple 1

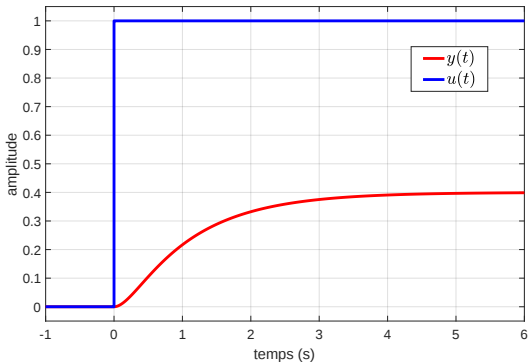
► à l'aide de la table, nous obtenons la réponse temporelle

$$y(t) = \frac{2}{5} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{10}e^{-5t}$$

Exemple 1

► à l'aide de la table, nous obtenons la réponse temporelle

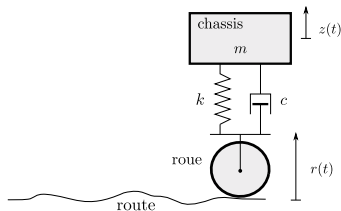
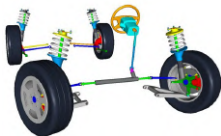
$$y(t) = \frac{2}{5} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{10}e^{-5t}$$



Exemple 2

Suspension d'un véhicule

(modèle quart de véhicule simplifié)



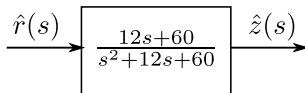
équation dynamique :

$$m\ddot{z} = k(r - z) + c(\dot{r} - \dot{z})$$

Exemple 2

Calcul de la fonction de transfert $\hat{z}(s) = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k} \hat{r}(s)$

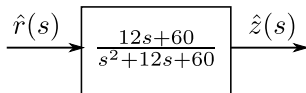
avec $m = 250 \text{ kg}$, $k = 15000 \text{ N.m}^{-1}$ et $c = 3000 \text{ N.s.m}^{-1}$



Exemple 2

Calcul de la fonction de transfert $\hat{z}(s) = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k} \hat{r}(s)$

avec $m = 250 \text{ kg}$, $k = 15000 \text{ N.m}^{-1}$ et $c = 3000 \text{ N.s.m}^{-1}$



► Calculons la réponse à un échelon de 1cm

$$\hat{z}(s) = \frac{12s + 60}{s^2 + 12s + 60} \frac{0.01}{s}$$

Exemple 2

- la réponse se décompose en

$$\hat{z}(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 12s + 60}$$

Exemple 2

- la réponse se décompose en

$$\hat{z}(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 12s + 60}$$

- calcul des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = s\hat{z}(s)|_{s=0} = 0.01 \\ Bs + C|_{s=-6+i4\sqrt{6}} = (s^2 + 12s + 60)\hat{z}(s)|_{s=-6+i4\sqrt{6}} = \frac{3.6 - i1.2\sqrt{6}}{60} \\ \Rightarrow B = -0.01 \text{ et } C = 0 \end{array} \right.$$

Exemple 2

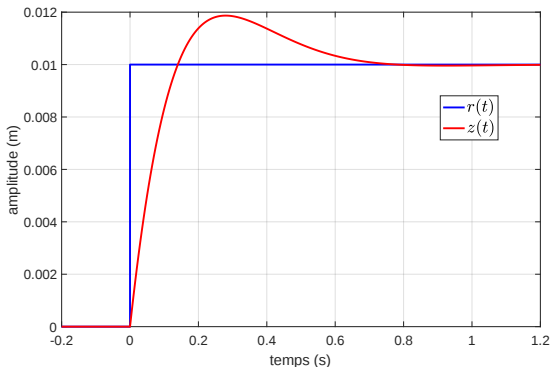
► à l'aide de la table, nous obtenons la réponse temporelle

$$r(t) = 0.01 - 0.01e^{-6t} \left(\cos(\sqrt{24}t) - \frac{6}{\sqrt{24}} \sin(\sqrt{24}t) \right)$$

Exemple 2

► à l'aide de la table, nous obtenons la réponse temporelle

$$r(t) = 0.01 - 0.01e^{-6t} \left(\cos(\sqrt{24}t) - \frac{6}{\sqrt{24}} \sin(\sqrt{24}t) \right)$$



Exemple 3

Calculons la réponse du système suivant à l'entrée $u(t) = e^{-2t}$, $\forall t \geq 0$:

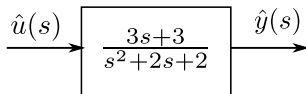
$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = 3\dot{u}(t) + 3u(t)$$

Exemple 3

Calculons la réponse du système suivant à l'entrée $u(t) = e^{-2t}$, $\forall t \geq 0$:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = 3\dot{u}(t) + 3u(t)$$

► calcul de la fonction de transfert

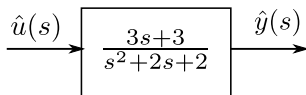


Exemple 3

Calculons la réponse du système suivant à l'entrée $u(t) = e^{-2t}$, $\forall t \geq 0$:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = 3\dot{u}(t) + 3u(t)$$

► calcul de la fonction de transfert



► exprimons le signal de sortie

$$\hat{y}(s) = \frac{3s+3}{s^2+2s+2} \hat{u}(s) = \frac{3s+3}{s^2+2s+2} \frac{1}{s+2}$$

Exemple 3

- la réponse se décompose en

$$\hat{y}(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

Exemple 3

- la réponse se décompose en

$$\hat{y}(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

- calcul des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A & = & (s+2)\hat{y}(s)|_{s=-2} = -\frac{3}{2} \\ Bs+C|_{s=-1-i} & = & (s^2+2s+2)\hat{y}(s)|_{s=-1-i} = \frac{-3i}{1-i} \\ & \Rightarrow & B = \frac{3}{2} \text{ et } C = \frac{6}{2} \end{array} \right.$$

Exemple 3

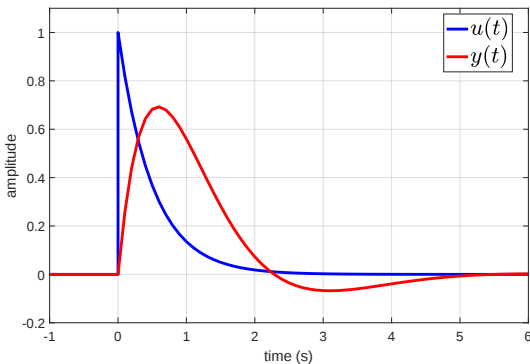
► à l'aide de la table, nous obtenons la réponse temporelle

$$y(t) = -\frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-t}(\cos(t) + \sin(t))$$

Exemple 3

► à l'aide de la table, nous obtenons la réponse temporelle

$$y(t) = -\frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-t}(\cos(t) + \sin(t))$$



Exemple 4

Moteur à courant continu entrainant une hélice



équation dynamique :

$$2\dot{\omega}(t) + \omega(t) = 500u(t)$$

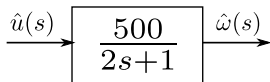
Exemple 4

Calculons la réponse du système à une rampe $u(t) = t, \forall t \geq 0$.

Exemple 4

Calculons la réponse du système à une rampe $u(t) = t, \forall t \geq 0$.

► calcul de la fonction de transfert



► exprimons le signal de sortie

$$\hat{w}(s) = \frac{500}{2s+1} \hat{u}(s) = \frac{250}{s + \frac{1}{2}} \hat{u}(s) = \frac{250}{s + \frac{1}{2}} \frac{1}{s^2}$$

Exemple 4

- la réponse se décompose en

$$\hat{\omega}(s) = \frac{A}{s + \frac{1}{2}} + \frac{B_2}{s^2} + \frac{B_1}{s}$$

Exemple 4

- la réponse se décompose en

$$\hat{\omega}(s) = \frac{A}{s + \frac{1}{2}} + \frac{B_2}{s^2} + \frac{B_1}{s}$$

- calcul des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A & = & (s + \frac{1}{2})\hat{\omega}(s)|_{s=-\frac{1}{2}} = 1000 \\ B_2 & = & s^2\hat{\omega}(s)|_{s=0} = 500 \\ B_1 & = & \frac{d}{ds}[s^2\hat{\omega}(s)]|_{s=0} = -\frac{250}{(s + \frac{1}{2})^2}|_{s=0} = -1000 \end{array} \right.$$

Exemple 4

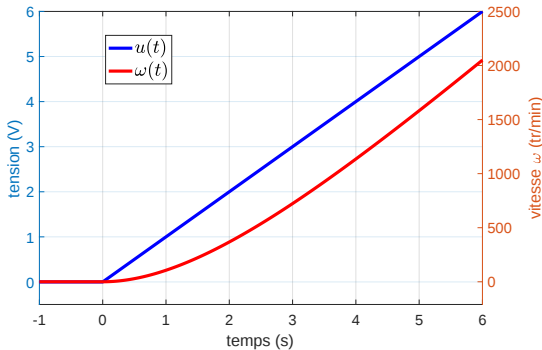
- ▶ à l'aide de la table, nous obtenons la réponse temporelle

$$\omega(t) = 1000e^{-\frac{1}{2}t} + 500t - 1000$$

Exemple 4

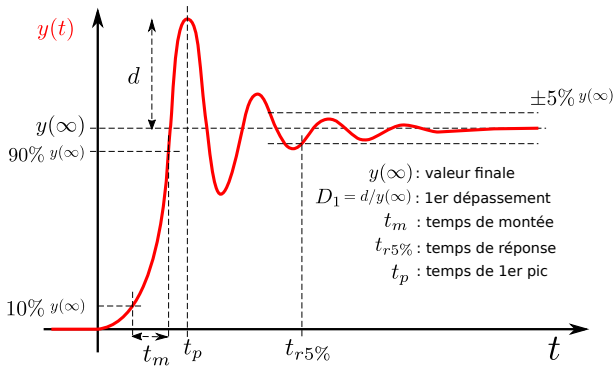
► à l'aide de la table, nous obtenons la réponse temporelle

$$\omega(t) = 1000e^{-\frac{1}{2}t} + 500t - 1000$$



Caractéristiques temporelles

Certaines caractéristiques du système sont relevés sur la réponse indicielle.



⇒ Ces caractéristiques donnent des indices de performances.

Cas des systèmes du 1^{er} ordre

Modèle canonique :

$$\hat{y}(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \hat{u}(s)$$

- ▶ τ la *constante de temps*
- ▶ k le *gain statique*

Cas des systèmes du 1^{er} ordre

Modèle canonique :

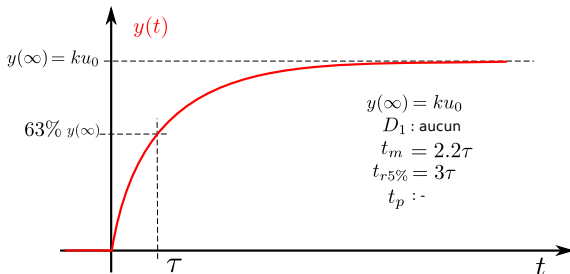
$$\hat{y}(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \hat{u}(s)$$

► τ la *constante de temps*

► k le *gain statique*

Réponse à un échelon d'amplitude u_0 :

$$y(t) = u_0 k \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} t} \right)$$



Cas des systèmes du 2nd ordre

Modèle canonique :

$$\hat{y}(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \hat{u}(s)$$

- ▶ ζ le *coefficient d'amortissement*
- ▶ ω_n la *pulsation propre*
- ▶ K le *gain statique*

Cas des systèmes du 2nd ordre

Modèle canonique :

$$\hat{y}(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \hat{u}(s)$$

- ▶ ζ le *coefficient d'amortissement*
- ▶ ω_n la *pulsation propre*
- ▶ K le *gain statique*

3 cas pour la réponse indicielle :

- ▶ cas $\zeta > 1$: régime apériodique, $p_{1/2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$,

$$y(t) = Ku_0 \left[1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right]$$

- ▶ cas $\zeta = 1$: régime critique, $p_1 = -\omega_n$,

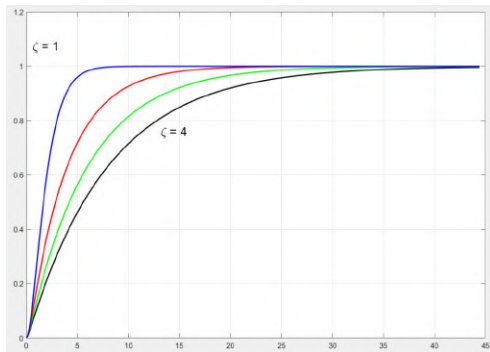
$$y(t) = Ku_0 \left[1 - (1 - p_1 t) e^{p_1 t} \right]$$

- ▶ cas $0 < \zeta < 1$: régime pseudo-périodique, $\omega_p = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$,

$$y(t) = Ku_0 \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos(\omega_p t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_p t) \right) \right]$$

Cas $\zeta \geq 1$

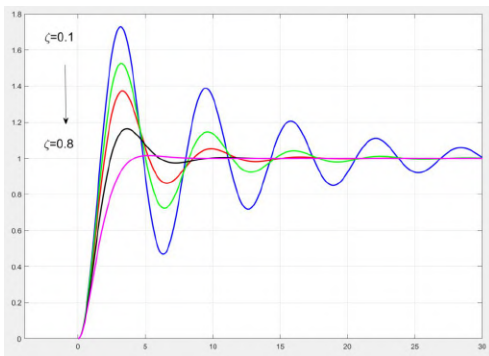
(ici, pour le tracé : $u_0 = 1$, $K = 1$ et $\omega_n = 1$)



- ▶ pas de dépassement
- ▶ quand $\zeta \searrow$ ou $\omega_n \nearrow$, les temps de réponse et de montée $\searrow$
- ▶ valeur finale $y(\infty) = Ku_0$

Cas $0 < \zeta < 1$

(ici, pour le tracé : $u_0 = 1$, $K = 1$ et $\omega_n = 1$)

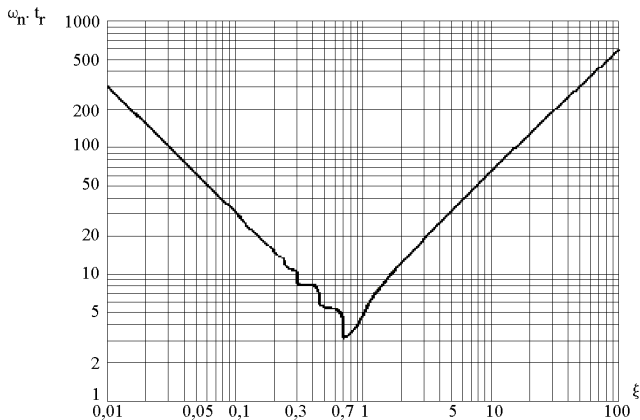


- ▶ dépassement : $D_1 = 100 e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ à $t_p = \frac{\pi}{\omega_p}$
- ▶ temps de réponse : $t_{r5\%} \simeq \frac{3}{\zeta \omega_n}$
- ▶ valeur finale : $y(\infty) = Ku_0$

Abaque pour le temps de réponse à 5%

abscisses : coefficient d'amortissement ζ

ordonnées : temps de réponse réduit $t_{r5\%} \times \omega_n$



Exemple 1

Soit le système d'ordre 2

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{s^2 + s + 4} \hat{u}(s)$$

Quelle est l'allure de sa réponse indicielle?

Exemple 1

Soit le système d'ordre 2

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{s^2 + s + 4} \hat{u}(s)$$

Quelle est l'allure de sa réponse indicielle?

Identifions ses paramètres caractéristiques :

$$\omega_n = 2$$

$$K = 0.5$$

$$\zeta = 0.25$$

Exemple 1

Soit le système d'ordre 2

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{s^2 + s + 4} \hat{u}(s)$$

Quelle est l'allure de sa réponse indicielle ?

Identifions ses paramètres caractéristiques :

$$\omega_n = 2$$

$$K = 0.5$$

$$\zeta = 0.25$$

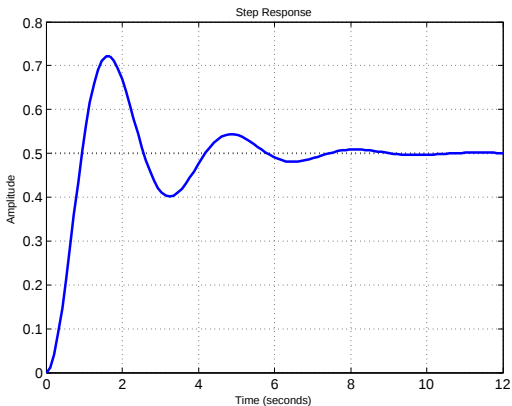
Nous pouvons donc conclure pour la réponse

- ▶ régime pseudo-périodique,
- ▶ valeur finale $y(\infty) = 0.5$,
- ▶ premier dépassement de 44% à $t = 1.62s$,
- ▶ temps de réponse $t_{r5\%} \simeq 6s$.

Exemple 1

Réponse indicielle (par application de la formule) :

$$y(t) = 0.5 \left(1 - e^{-\frac{1}{2}t} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{15}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \right) \right)$$

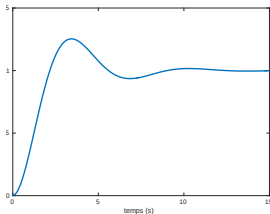


QCM interactif

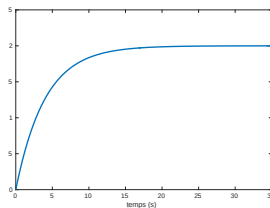
Sans calcul, quelle est la réponse indicielle de l'équation différentielle ?

(avec condition initiale nulle)

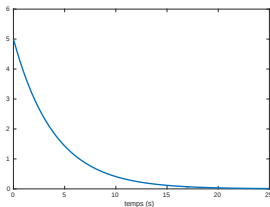
$$4 \dot{y}(t) + y(t) = 2 u(t)$$



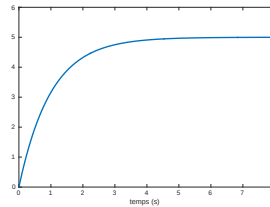
(A)



(B)



(C)

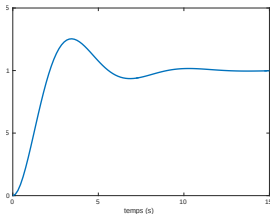


(D)

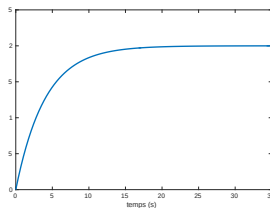
QCM interactif

Sans calcul, quelle est la réponse indicielle de l'équation différentielle ?
(avec condition initiale nulle)

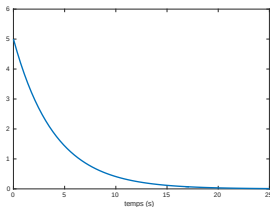
$$4 \dot{y}(t) + y(t) = 2 u(t)$$



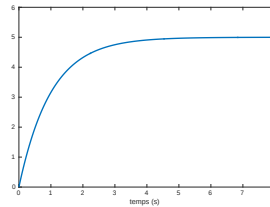
(A)



(B)



(C)



(D)

QCM interactif

La réponse indicielle de l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

est caractérisée par

- (A) une valeur finale égale à l'amplitude de l'échelon d'excitation
- (B) une valeur finale négative
- (C) l'absence de dépassement
- (D) un régime transitoire pseudo-périodique

QCM interactif

La réponse indicielle de l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

est caractérisée par

- (A) une valeur finale égale à l'amplitude de l'échelon d'excitation
- (B) une valeur finale négative
- (C) l'absence de dépassement
- (D) un régime transitoire pseudo-périodique

Notion de stabilité

Soit la fonction de transfert

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s + a} \hat{u}(s)$$

a , un paramètre constant

Notion de stabilité

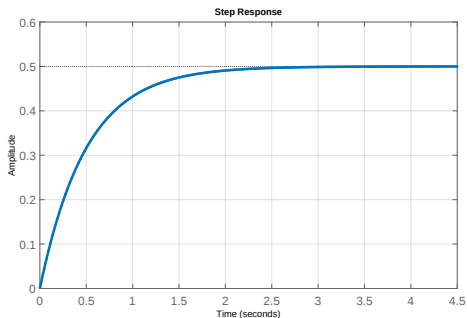
Soit la fonction de transfert

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s+a} \hat{u}(s) \quad a, \text{ un paramètre constant}$$

Réponse à un échelon unité : $y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$

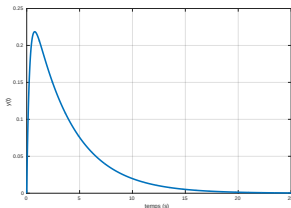
cas $a > 0$

(ici $a = 2$)

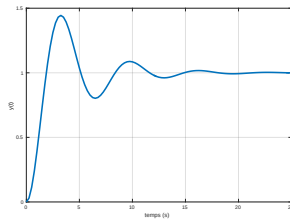


QCM interactif

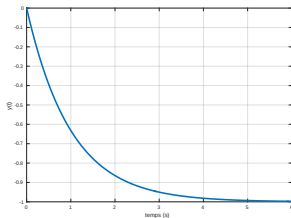
Quelle est la réponse si $a < 0$?



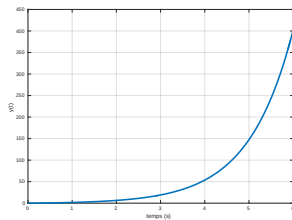
(A)



(B)



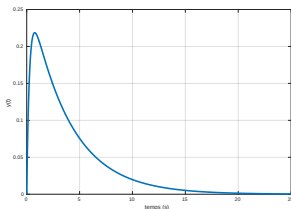
(C)



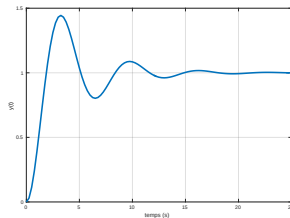
(D)

QCM interactif

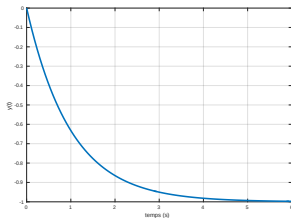
Quelle est la réponse si $a < 0$?



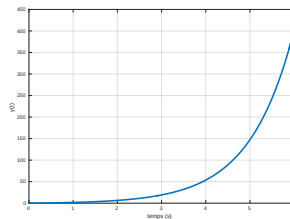
(A)



(B)



(C)



(D)

Réponse :
$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

Observation de 2 cas :

- ▶ si $a > 0$, la réponse converge vers la valeur finale 0.5

$$\hookrightarrow \text{quand } t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-at} \rightarrow 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow 0.5$$

- ▶ si $a < 0$, la réponse diverge

$$\hookrightarrow \text{quand } t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-at} \rightarrow \infty \Rightarrow y(t) \rightarrow \infty$$

Réponse :
$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

Observation de 2 cas :

- ▶ si $a > 0$, la réponse converge vers la valeur finale 0.5

$$\hookrightarrow \text{quand } t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-at} \rightarrow 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow 0.5$$

- ▶ si $a < 0$, la réponse diverge

$$\hookrightarrow \text{quand } t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-at} \rightarrow \infty \Rightarrow y(t) \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ notion de **stabilité**

Réponse :
$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

Observation de 2 cas :

- ▶ si $a > 0$, la réponse converge vers la valeur finale 0.5

$$\hookrightarrow \text{quand } t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-at} \rightarrow 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow 0.5$$

- ▶ si $a < 0$, la réponse diverge

$$\hookrightarrow \text{quand } t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-at} \rightarrow \infty \Rightarrow y(t) \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ notion de **stabilité**

Remarque

Pôle de la fonction de transfert : $p_1 = -a$

$\hookrightarrow$ correspond au coefficient dans l'exponentiel

Autre exemple, soit la fonction de transfert

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1} \hat{u}(s)$$

avec $|a| < 2$.

Autre exemple, soit la fonction de transfert

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1} \hat{u}(s) \quad \text{avec } |a| < 2.$$

Réponse à un échelon unité :

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{a}{2}t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{a/2}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$$

Remarque

Pôles de la fonction de transfert :

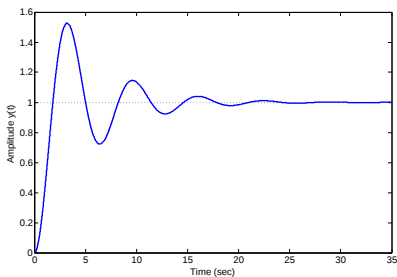
$$p_1 = -\frac{a}{2} + i\sqrt{|a^2 - 4|}/2$$

$$p_2 = -\frac{a}{2} - i\sqrt{|a^2 - 4|}/2$$

↪ le coefficient dans l'exponentiel correspond à la partie réelle

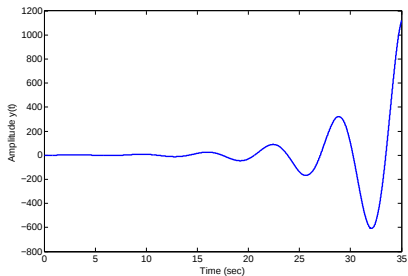
Observation de 2 cas :

cas $0 < a < 2$



le terme $e^{-\frac{a}{2}t}$ tend vers 0

cas $-2 < a < 0$



le terme $e^{-\frac{a}{2}t}$ tend vers $+\infty$

Notion de stabilité

Définition

Un système est dit **stable** si pour toute entrée bornée la sortie est bornée.

Théorème

Un système de fonction de transfert $F(s)$ est **stable** si et seulement si tous les pôles de $F(s)$ sont à partie réelle strictement négative, c'est-à-dire qu'ils appartiennent au demi-plan gauche du plan complexe.

Notion de stabilité

Définition

Un système est dit **stable** si pour toute entrée bornée la sortie est bornée.

Théorème

Un système de fonction de transfert $F(s)$ est **stable** si et seulement si tous les pôles de $F(s)$ sont à partie réelle strictement négative, c'est-à-dire qu'ils appartiennent au demi-plan gauche du plan complexe.

Exemples

$$\frac{1}{s-2}$$

$$\frac{4}{s+0.5}$$

$$\frac{3}{(s+1)(s+3)}$$

$$\frac{1}{s(5s+1)}$$

$$\frac{10}{s^2+2s+2}$$

$$\frac{2s-1}{(s+1)(s+2)(s-6)}$$

Notion de stabilité

Définition

Un système est dit **stable** si pour toute entrée bornée la sortie est bornée.

Théorème

Un système de fonction de transfert $F(s)$ est **stable** si et seulement si tous les pôles de $F(s)$ sont à partie réelle strictement négative, c'est-à-dire qu'ils appartiennent au demi-plan gauche du plan complexe.

Exemples

$$\frac{1}{s-2} \Rightarrow \text{Instable}$$

$$\frac{4}{s+0.5} \Rightarrow \text{Stable}$$

$$\frac{3}{(s+1)(s+3)} \Rightarrow \text{Stable}$$

$$\frac{1}{s(5s+1)} \Rightarrow \text{Instable}$$

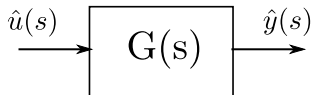
$$\frac{10}{s^2+2s+2} \Rightarrow \text{Stable}$$

$$\frac{2s-1}{(s+1)(s+2)(s-6)} \Rightarrow \text{Instable}$$

Analyse de la stabilité entrée-sortie

Comment analyser la stabilité d'un système d'entrée $\hat{u}(s)$ et de sortie $\hat{y}(s)$?

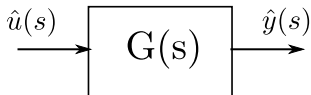
$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$



Analyse de la stabilité entrée-sortie

Comment analyser la stabilité d'un système d'entrée $\hat{u}(s)$ et de sortie $\hat{y}(s)$?

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$



Méthodes :

- Calcul direct des pôles $\Rightarrow$ trouver les racines de l'équation caractéristique

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0.$$

Si elles sont toutes à partie réelle négative alors le système est stable.

- Critère algébrique de Routh.

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

Procédure :

1. Condition nécessaire : tous les coeff. a_i doivent être strictement de même signe.

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

Procédure :

1. Condition nécessaire : tous les coeff. a_i doivent être strictement de même signe.
2. Construction du tableau

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	...
s^{n-3}	c_1	c_2	...	
⋮	⋮	⋮	⋮	
s^0	α			

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

Procédure :

1. Condition nécessaire : tous les coeff. a_i doivent être strictement de même signe.
2. Construction du tableau

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\dots$
s^{n-3}	c_1	c_2	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
s^0	α			

avec

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \quad b_3 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

Procédure :

1. Condition nécessaire : tous les coeff. a_i doivent être strictement de même signe.
2. Construction du tableau

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\dots$
s^{n-3}	c_1	c_2	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
s^0	α			

avec

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \quad b_3 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

3. Le système est stable ssi tous les coefficients de la 1^{ère} colonne sont de même signe.

Exemple 1 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \frac{s+4}{s^4 + s^3 + 4s^2 + 2s + 1}$, stable ?

Exemple 2 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \frac{7}{3s^3 + s^2 + 2s + 4}$, stable ?

Exemple 1 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \frac{s+4}{s^4 + s^3 + 4s^2 + 2s + 1}$, stable ?

s^4	1	4	1	0	$b_1 = -\frac{1}{1}(2-4) = 2$
s^3	1	2	0	0	$b_2 = -\frac{1}{1}(0-1) = 1$
s^2	2	1	0		$c_1 = -\frac{1}{2}(1-4) = \frac{3}{2}$
s^1	$\frac{3}{2}$	0			$c_2 = 0$
s^0	1				$\alpha = -\frac{2}{3}(0 - \frac{3}{2}) = 1$

⇒ Système stable.

Exemple 2 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \frac{7}{3s^3 + s^2 + 2s + 4}$, stable ?

s^3	3	2	0	$b_1 = -\frac{1}{1}(12-2) = -10$
s^2	1	4	0	
s^1	-10	0		$\alpha = -\frac{1}{-10}(0+40) = 4$
s^0	4			

⇒ Système instable.

Exemple 3 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \frac{s^2 + s + 4}{s^4 + 2s^3 - 2s^2 + 5s + 1}$, stable ?

Exemple 4 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \frac{9K}{s(s+1)(s+2) + (s+6)K}$, stable ?

Exemple 3 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \frac{s^2 + s + 4}{s^4 + 2s^3 - 2s^2 + 5s + 1}$, stable ?

Les coefficients du polynôme du dénominateur ne sont pas de même signe

$\Rightarrow$ Condition nécessaire non satisfaite $\Rightarrow$ Système instable.

Exemple 4 :

Soit la fonction de transfert $F(s) = \frac{9K}{s(s+1)(s+2) + (s+6)K}$, stable ?

s^3	1	$K + 2$	0
s^2	3	$6K$	0
s^1	$2 - K$	0	
s^0	$6K$		

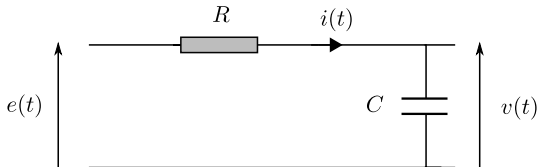
$$b_1 = -\frac{1}{3}(6K - 3(K + 2)) = 2 - K$$

$$\alpha = -\frac{1}{2-K}(0 - 6K(2 - K)) = 6K$$

$\Rightarrow$ Système stable ssi $0 < K < 2$.

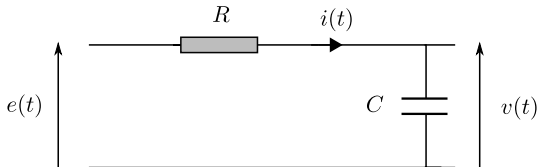
Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Reprenons le circuit RC



Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Reprenons le circuit RC



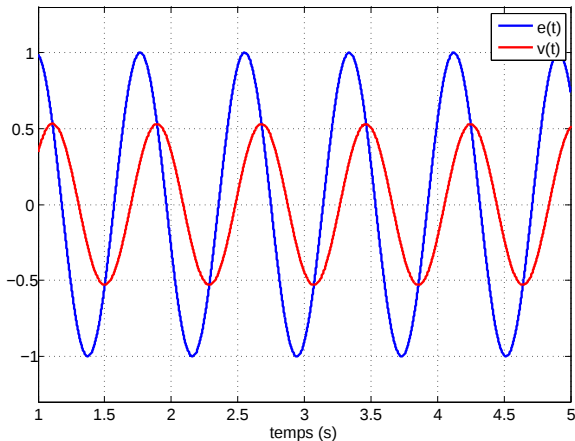
Régime sinusoïdale :

$$\begin{cases} e(t) = e_m \cos(\omega t) \\ v(t) = v_m \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

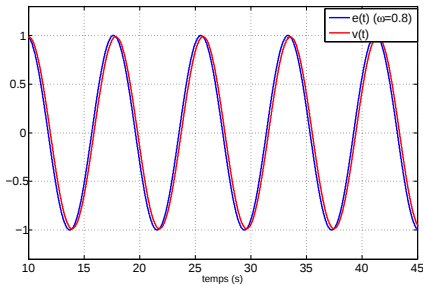
- Sinusoïde en entrée $\Rightarrow$ sinusoïde en sortie de même fréquence
mais d'amplitude et de phase différentes

Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

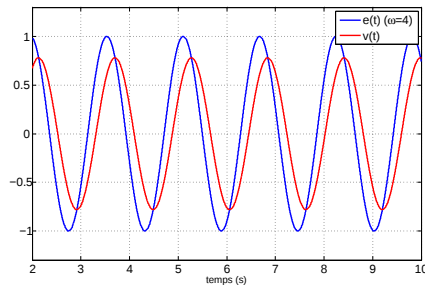
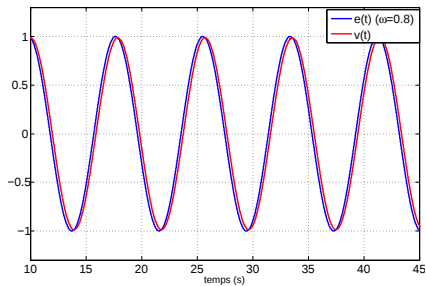
Pour $R = 1k\Omega$ et $C = 200\mu F$, appliquons une tension $e(t) = \cos(8t)$.



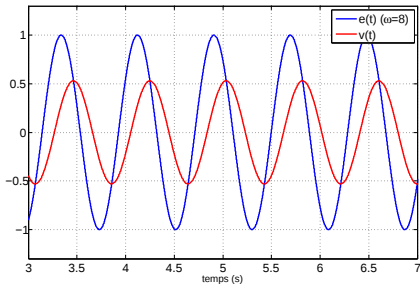
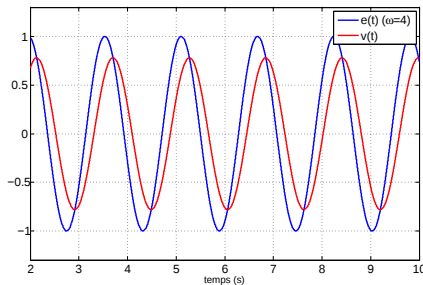
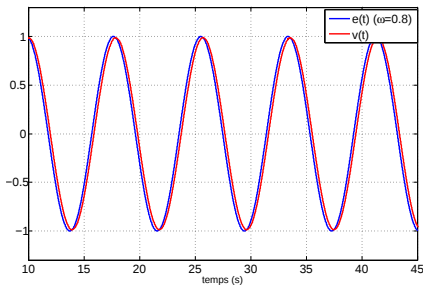
Testons les réponses du circuit pour $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$



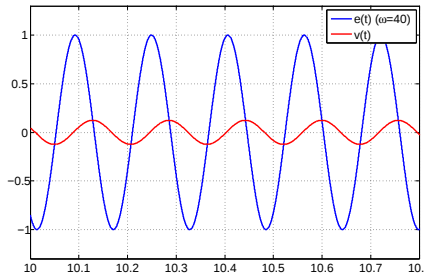
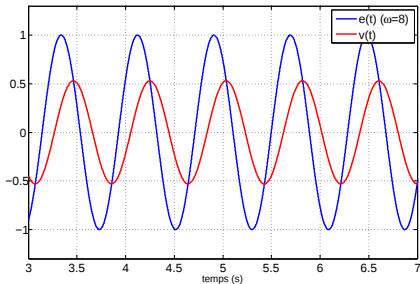
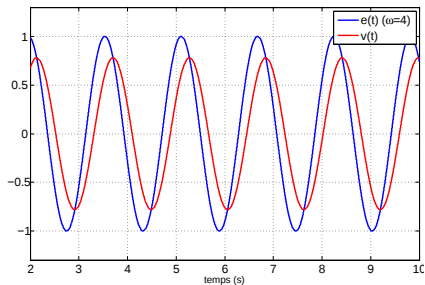
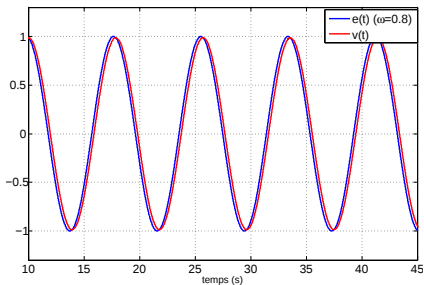
Testons les réponses du circuit pour $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$



Testons les réponses du circuit pour $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$



Testons les réponses du circuit pour $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$



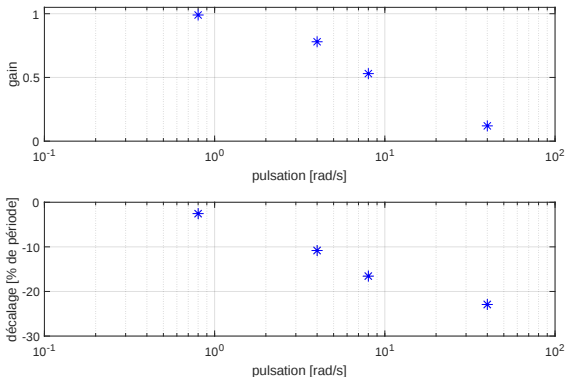
Observation : quand la fréquence ω augmente

- ▶ l'amplitude de la sortie diminue
- ▶ le décalage du signal de sortie augmente

Observation : quand la fréquence ω augmente

- ▶ l'amplitude de la sortie diminue
- ▶ le décalage du signal de sortie augmente

Traçons le gain $= \left| \frac{v_m}{e_m} \right|$ et le décalage $= \frac{d}{T}$ en fonction de la pulsation ω



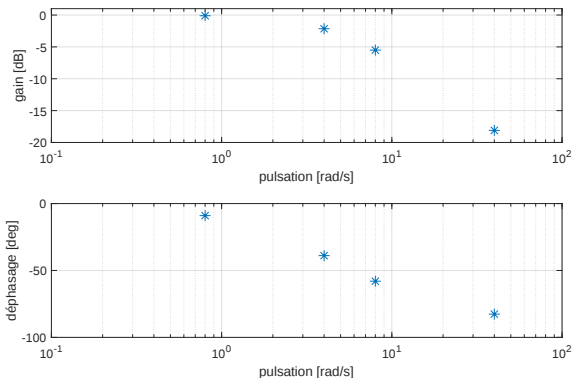
Généralement

- ▶ le gain est exprimé en dB : $\text{gain}_{dB} = 20 \log \left| \frac{v_m}{e_m} \right|$
- ▶ on parle de déphasage en deg : $\phi = \frac{d}{T} 360$

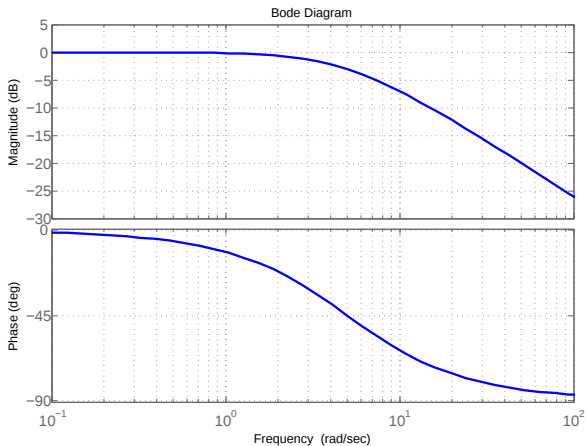
Généralement

- ▶ le gain est exprimé en dB : $\text{gain}_{dB} = 20 \log \left| \frac{v_m}{e_m} \right|$
- ▶ on parle de déphasage en deg : $\phi = \frac{d}{T} 360$

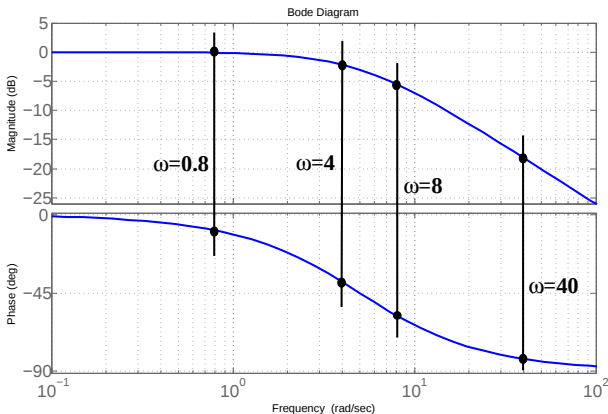
Traçons le gain en dB et le déphasage en deg en fonction de la pulsation ω



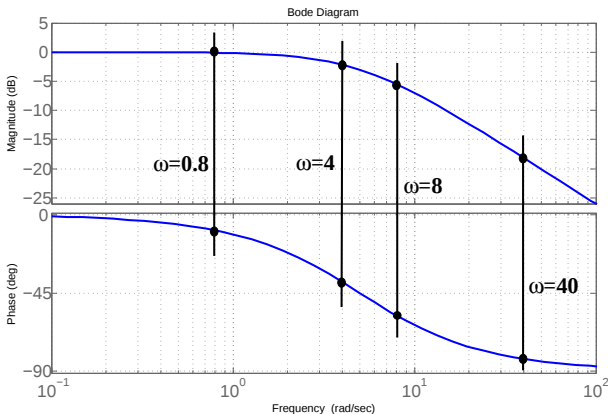
En répétant l'opération pour toutes les pulsations entre 0.1 rad/s et 100 rad/s



En répétant l'opération pour toutes les pulsations entre 0.1rad/s et 100rad/s



En répétant l'opération pour toutes les pulsations entre 0.1rad/s et 100rad/s



⇒ Ce graphique s'appelle le diagramme de Bode

Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Analysons le circuit. Loi d'Ohm : $u = Zi$

$$Z_R = R \quad \text{et} \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Analysons le circuit. Loi d'Ohm : $u = Zi$

$$Z_R = R \quad \text{et} \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Appliquons le pont diviseur de tension

$$v = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} e$$

Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Analysons le circuit. Loi d'Ohm : $u = Zi$

$$Z_R = R \quad \text{et} \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Appliquons le pont diviseur de tension

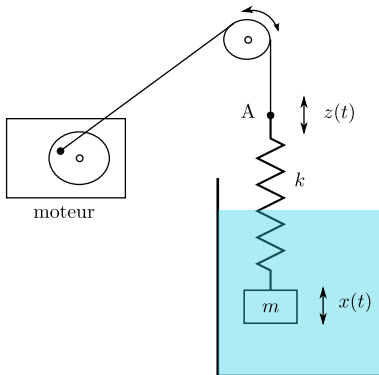
$$v = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} e$$

La transmittance du circuit s'écrit donc :

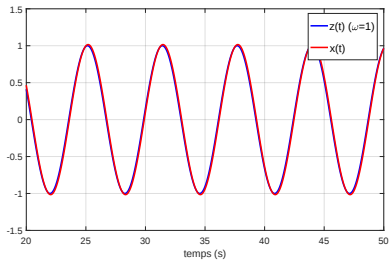
$$T = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{j\omega RC + 1}.$$

Réponse fréquentielle : exemple introductif 2

Oscillations forcées d'un pendule

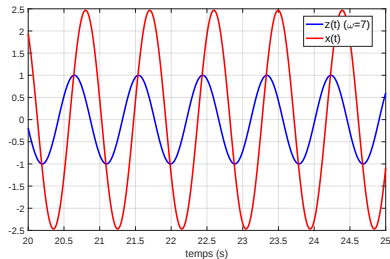
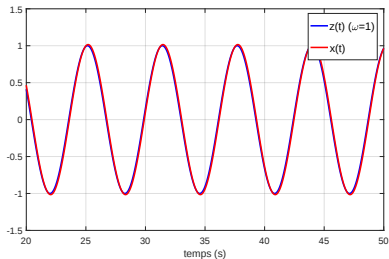


Testons les réponses de la masse pour différentes oscillations du point A
 $\omega = \{1, 7, 12, 25\}$ (excitation moteur)



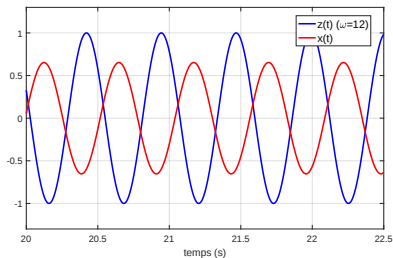
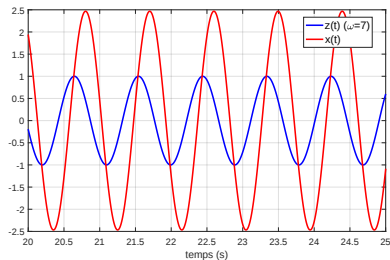
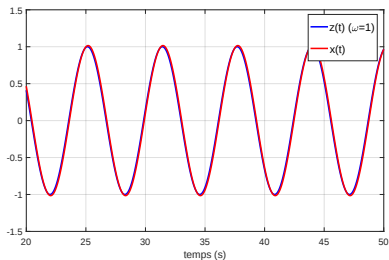
Testons les réponses de la masse pour différentes oscillations du point A

$\omega = \{1, 7, 12, 25\}$ (excitation moteur)



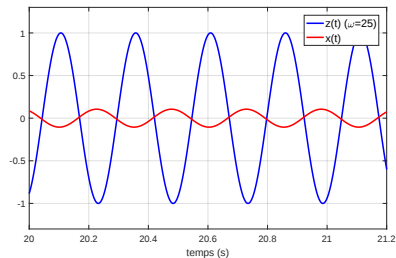
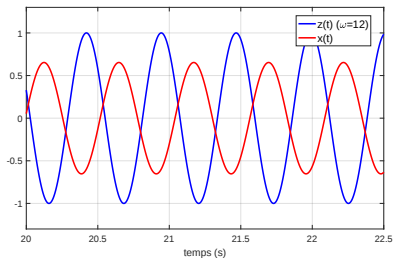
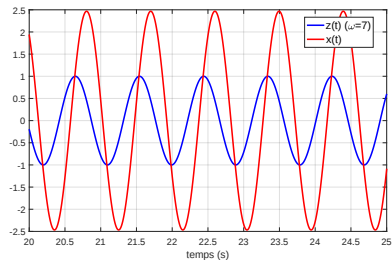
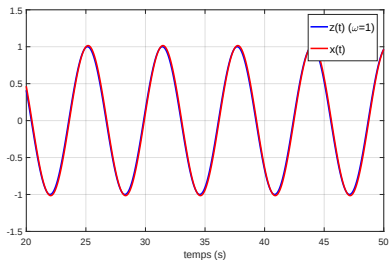
Testons les réponses de la masse pour différentes oscillations du point A

$\omega = \{1, 7, 12, 25\}$ (excitation moteur)

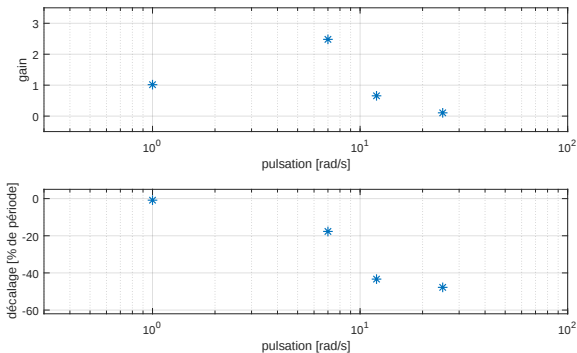


Testons les réponses de la masse pour différentes oscillations du point A

$\omega = \{1, 7, 12, 25\}$ (excitation moteur)



Traçons le gain = $\left| \frac{x_m}{z_m} \right|$ et le décalage = $\frac{d}{T}$ en fonction de la pulsation ω



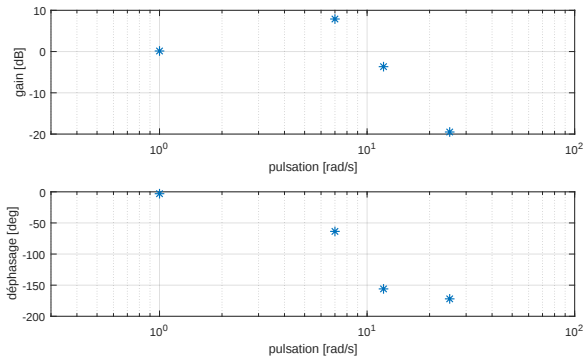
Généralement

- ▶ le gain est exprimé en dB : $\text{gain}_{dB} = 20 \log \left| \frac{x_m}{z_m} \right|$
- ▶ on parle de déphasage en deg : $\phi = \frac{d}{T} 360$

Généralement

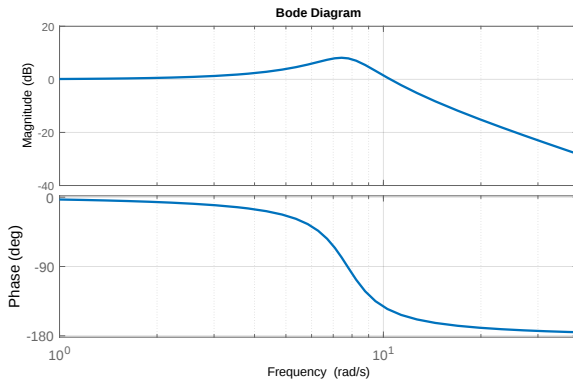
- ▶ le gain est exprimé en dB : $\text{gain}_{dB} = 20 \log \left| \frac{x_m}{z_m} \right|$
- ▶ on parle de déphasage en deg : $\phi = \frac{d}{T} 360$

Traçons le gain en dB et le déphasage en deg en fonction de la pulsation ω



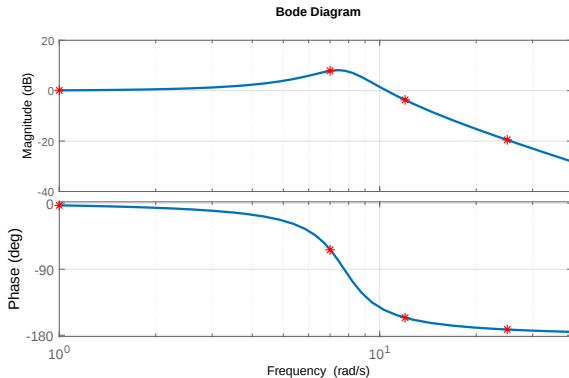
Réponse fréquentielle : exemple introductif 2

Diagramme de Bode correspondant :



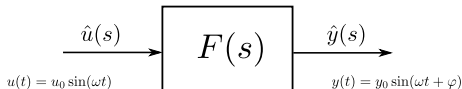
Réponse fréquentielle : exemple introductif 2

Diagramme de Bode correspondant :



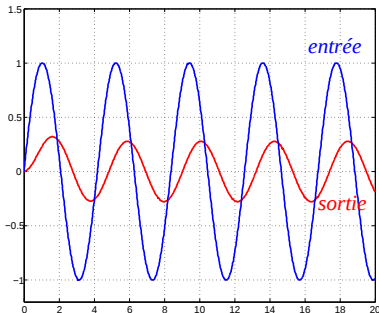
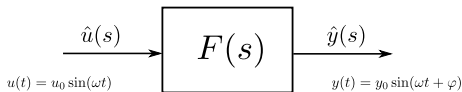
Réponse fréquentielle

L'analyse fréquentielle consiste à étudier la réponse d'un système linéaire à des entrées sinusoïdales.

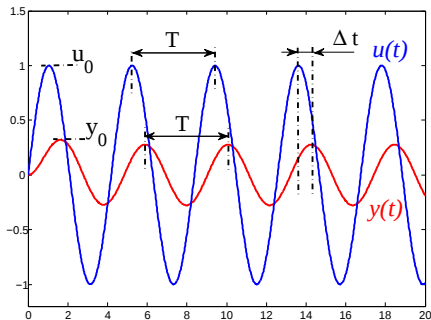


Réponse fréquentielle

L'analyse fréquentielle consiste à étudier la réponse d'un système linéaire à des entrées sinusoïdales.



Le signal de sortie est sinusoïdale, de même pulsation, d'amplitude différente et présente un déphasage.



La réponse fréquentielle est caractérisée par

- ▶ son amplification : $\frac{y_0}{u_0}$
- ▶ son déphasage : $\pm 360 \frac{\Delta t}{T}$

L'amplification et le déphasage induit par le système dépendent de la pulsation ω

Exemple : considérons le système

$$F(s) = \frac{1/2}{s + 1}$$

Observons sa réponse aux 3 entrées :

$$u_1 = \sin(0.05 t)$$

$$u_2 = \sin(1.5 t)$$

$$u_3 = \sin(10 t)$$

Exemple : considérons le système

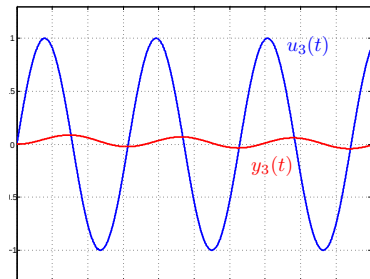
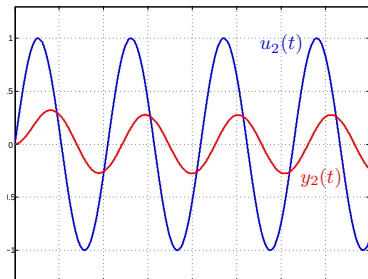
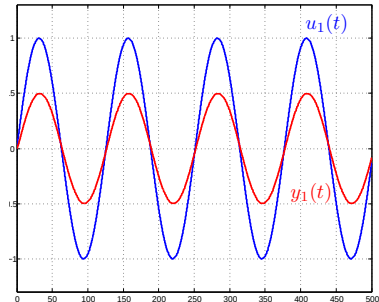
$$F(s) = \frac{1/2}{s + 1}$$

Observons sa réponse aux 3 entrées :

$$u_1 = \sin(0.05 t)$$

$$u_2 = \sin(1.5 t)$$

$$u_3 = \sin(10 t)$$



On montre que :

- ▶ l'amplification = $|F(j\omega)|$,
- ▶ le déphasage = $\arg F(j\omega)$.

$F(j\omega)$ est obtenue en remplaçant la variable de Laplace s par $j\omega$.

On montre que :

- ▶ l'amplification = $|F(j\omega)|$,
- ▶ le déphasage = $\arg F(j\omega)$.

$F(j\omega)$ est obtenue en remplaçant la variable de Laplace s par $j\omega$.

Reprenons l'exemple précédent : $F(j\omega) = \frac{1/2}{j\omega + 1}$

- ▶ pour $\omega = 0.05 \text{ rad/s}$: $|F(j0.05)| = 0.5$ et $\arg F(j0.05) = -2.86^\circ$.
- ▶ pour $\omega = 1.5 \text{ rad/s}$: $|F(j1.5)| = 0.277$ et $\arg F(j1.5) = -56.3^\circ$.
- ▶ pour $\omega = 10 \text{ rad/s}$: $|F(j10)| = 0.05$ et $\arg F(j10) = -84.3^\circ$.

$F(j\omega)$ est une fonction complexe de la pulsation ω (ou la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$).

On distingue trois représentations graphiques :

- ▶ les diagrammes de Bode,
- ▶ la représentation de Nyquist,
- ▶ la représentation de Black-Nichols.

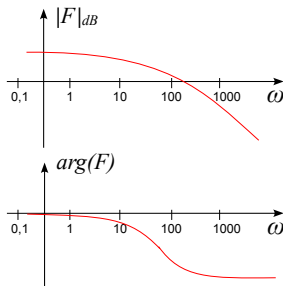
Représentation dans le diagramme de Bode

Représentation du transfert $F(j\omega)$ en fonction de ω sur deux graphes :

- ▶ le **diagramme de gain** = module de $F(j\omega)$ en décibel

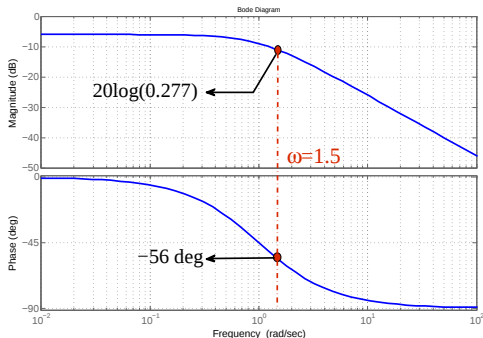
$$\Rightarrow |F|_{dB} = 20 \log |F(j\omega)|$$

- ▶ le **diagramme de phase** = argument de $F(j\omega)$ en degré ou radian.



Représentation dans le diagramme de Bode

Exemple : Réponse fréq. de $F(s) = \frac{1/2}{s + 1} \Rightarrow$ représentation de $F(j\omega) = \frac{1/2}{j\omega + 1}$



Pour une sollicitation sinusoïdale de pulsation $\omega = 1.5$:

- ▶ amplification de 0.277,
- ▶ déphasage de -56 deg.

Propriété : le diagramme d'une fonction donnée est obtenu à partir de la somme des tracés élémentaires.

Soit $F(s) = F_1(s) \times F_2(s)$,

- ▶ gain $\rightarrow 20\log|F(j\omega)| = 20\log|F_1(j\omega)| + 20\log|F_2(j\omega)|$,
- ▶ phase $\rightarrow \arg(F(j\omega)) = \arg(F_1(j\omega)) + \arg(F_2(j\omega))$.

Propriété : le diagramme d'une fonction donnée est obtenu à partir de la somme des tracés élémentaires.

Soit $F(s) = F_1(s) \times F_2(s)$,

- ▶ gain $\rightarrow 20\log|F(j\omega)| = 20\log|F_1(j\omega)| + 20\log|F_2(j\omega)|$,
- ▶ phase $\rightarrow \arg(F(j\omega)) = \arg(F_1(j\omega)) + \arg(F_2(j\omega))$.

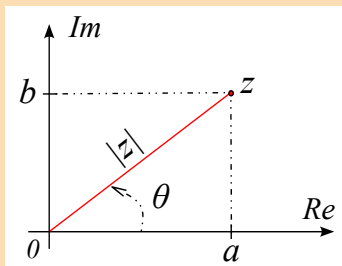
Méthodes :

- ▶ tracé asymptotique, analyse du transfert lorsque $\omega \rightarrow 0$ et $+\infty$ ainsi qu'en quelques points particuliers,
- ▶ tracé complet, à l'aide de logiciel de calcul numérique tel que Matlab[®],
- ▶ tracé expérimental, solliciter le procédé avec des entrées sinusoïdales de différentes pulsations ω . Mesurer en sortie l'amplification/atténuation et le déphasage du signal à l'oscilloscope.

Tracés élémentaires

Rappel

Soit un nombre complexe $z = a + jb$.



- $z = |z|e^{j\theta}$

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$

Tracés élémentaires

Terme constant : $F(s) = k, \quad (k > 0)$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = k$

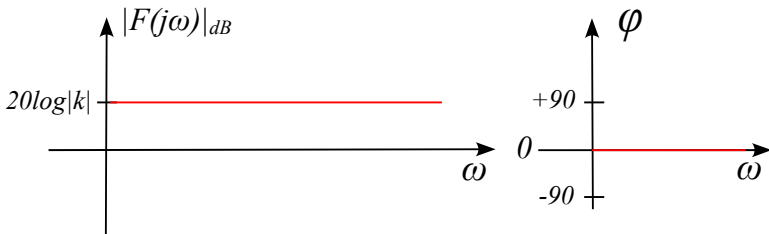
$$\left\{ \begin{array}{lcl} |F(j\omega)|_{db} & = & 20 \log(k) \\ \phi & = & 0 \end{array} \right.$$

Tracés élémentaires

Terme constant : $F(s) = k, (k > 0)$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = k$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{db} &= 20 \log(k) \\ \phi &= 0 \end{cases}$$



Tracés élémentaires

Dérivateur : $F(s) = s$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = j\omega$

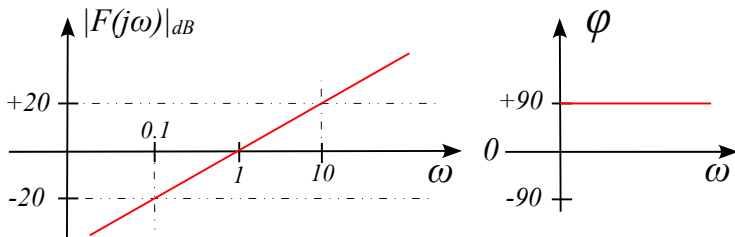
$$\left\{ \begin{array}{lcl} |F(j\omega)|_{db} & = & 20 \log(\omega) \\ \phi & = & +90^\circ \end{array} \right.$$

Tracés élémentaires

Dérivateur : $F(s) = s$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = j\omega$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{dB} &= 20 \log(\omega) \\ \phi &= +90^\circ \end{cases}$$



Tracés élémentaires

Intégrateur : $F(s) = \frac{1}{s}$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

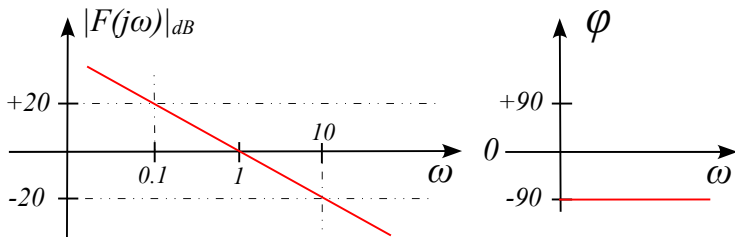
$$\left\{ \begin{array}{lcl} |F(j\omega)|_{db} & = & -20 \log(\omega) \\ \phi & = & \arg(-j \frac{1}{\omega}) = -90^\circ \end{array} \right.$$

Tracés élémentaires

Intégrateur : $F(s) = \frac{1}{s}$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{dB} &= -20 \log(\omega) \\ \phi &= \arg(-j \frac{1}{\omega}) = -90^\circ \end{cases}$$



Fonction du premier ordre

$$F(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

Fonction de transfert complexe : $F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$

► Module :

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{|1 + j\tau\omega|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$$

► Argument :

$$\arg(F(j\omega)) = \arg\left(\frac{1}{1 + j\tau\omega}\right) = \arg(1) - \arg(1 + j\tau\omega) = -\arctan\frac{\tau\omega}{1}$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{db} &= -20\log(\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}) \\ \phi &= -\arctan(\tau\omega) \end{cases}$$

Fonction du premier ordre

Courbe de gain :

- $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ $|F|_{db} \rightarrow -20\log(1) = 0$
- $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ $|F|_{db} \rightarrow -20\log(\tau\omega)$
(pente à $-20dB/dec$)
- $\omega = \frac{1}{\tau}$ $|F|_{db} = -20\log(\sqrt{2}) \simeq -3dB$

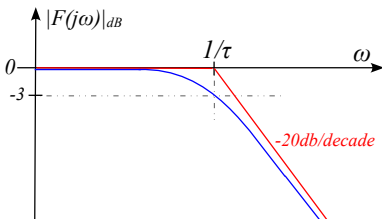
Courbe de phase :

- $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ $\phi \rightarrow 0$
- $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ $\phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$
- $\omega = \frac{1}{\tau}$ $\phi = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$

Fonction du premier ordre

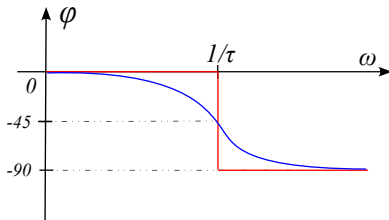
Courbe de gain :

- $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ $|F|_{db} \rightarrow -20\log(1) = 0$
- $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ $|F|_{db} \rightarrow -20\log(\tau\omega)$
(pente à $-20dB/dec$)
- $\omega = \frac{1}{\tau}$ $|F|_{db} = -20\log(\sqrt{2}) \simeq -3dB$



Courbe de phase :

- $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ $\phi \rightarrow 0$
- $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ $\phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$
- $\omega = \frac{1}{\tau}$ $\phi = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$



Fonction du second ordre

$$F(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

Fonction de transfert complexe :

$$F(j\omega) = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j}$$

► Module :

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\left| (1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j \right|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\zeta \frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

► Argument :

$$\arg(F(j\omega)) = -\arg\left((1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j\right) = -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{db} &= -20 \log \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\zeta \frac{\omega}{\omega_n})^2} \\ \phi &= -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{cases}$$

Fonction du second ordre

Courbe de gain :

- $\omega \ll \omega_n$ $|F|_{db} \rightarrow -20\log(1) = 0$
- $\omega \gg \omega_n$ $|F|_{db} \rightarrow -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$
(pente à $-40dB/dec$)
- $\omega = \omega_n$ $|F|_{db} = -20\log(2\zeta)$

Courbe de phase :

- $\omega \ll \omega_n$ $\phi \rightarrow 0$
- $\omega \gg \omega_n$ $\phi \rightarrow -\arctan \frac{2\zeta\omega_n}{-\omega} = -\pi$
- $\omega = \omega_n$ $\phi \rightarrow -\arctan \frac{2\zeta}{0} = -\frac{\pi}{2}$

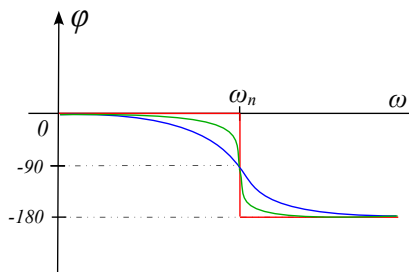
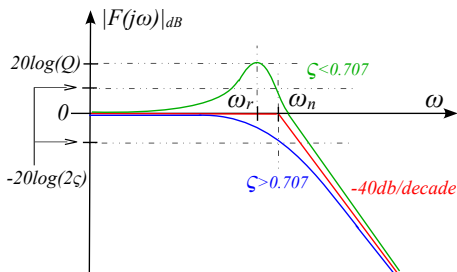
Fonction du second ordre

Courbe de gain :

- $\omega \ll \omega_n$ $|F|_{db} \rightarrow -20\log(1) = 0$
- $\omega \gg \omega_n$ $|F|_{db} \rightarrow -40\log(\frac{\omega}{\omega_n})$
(pente à -40dB/dec)
- $\omega = \omega_n$ $|F|_{db} = -20\log(2\zeta)$

Courbe de phase :

- $\omega \ll \omega_n$ $\phi \rightarrow 0$
- $\omega \gg \omega_n$ $\phi \rightarrow -\arctan \frac{2\zeta\omega_n}{-\omega} = -\pi$
- $\omega = \omega_n$ $\phi \rightarrow -\arctan \frac{2\zeta}{0} = -\frac{\pi}{2}$



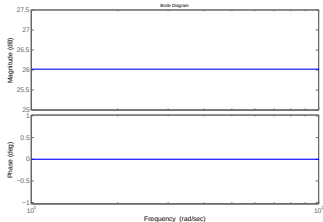
- Résonance si $\zeta < 0.707$: $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

et $Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$

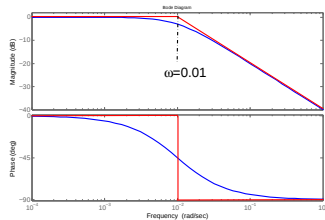
Exemple

Diagramme de Bode de la fonction de transfert $F(s) = \frac{20(10s+1)}{(100s+1)(s+1)}$

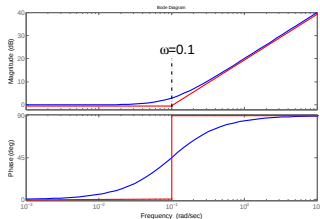
Fonction de transfert : 20



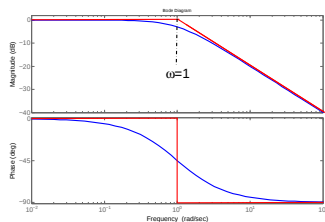
Fonction de transfert : $\frac{1}{100s+1}$



Fonction de transfert : $10s + 1$



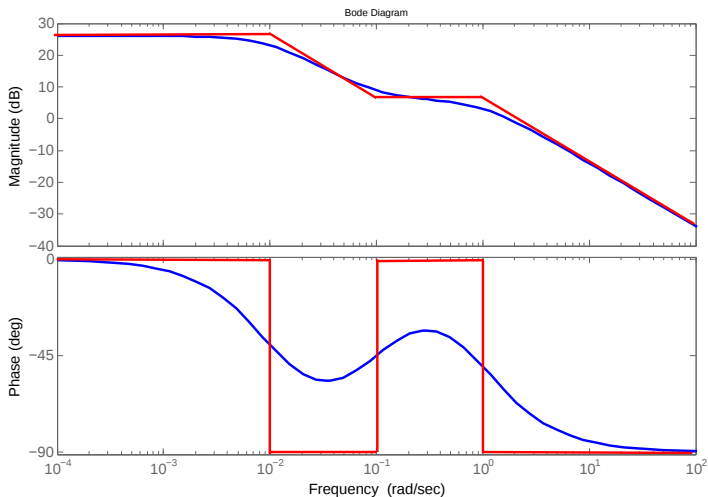
Fonction de transfert : $\frac{1}{s+1}$



Exemple

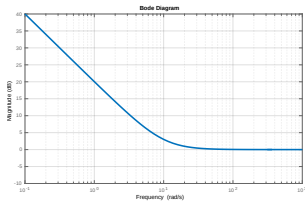
Diagramme de Bode de la fonction de transfert $F(s) = \frac{20(10s+1)}{(100s+1)(s+1)}$

Somme des tracés

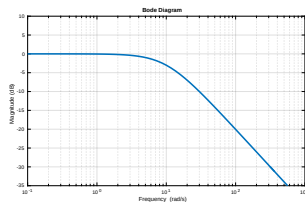


QCM interactif

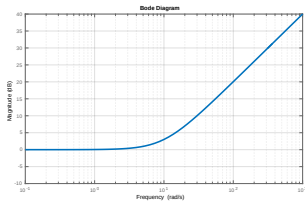
Quelle est la forme typique de la réponse fréquentielle d'un système passe-bas ?



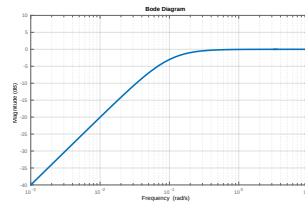
(A)



(B)



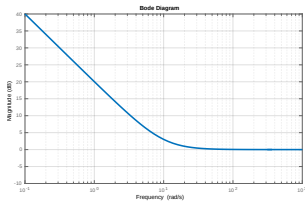
(C)



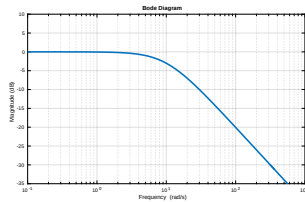
(D)

QCM interactif

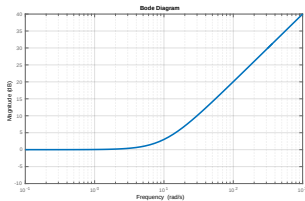
Quelle est la forme typique de la réponse fréquentielle d'un système passe-bas ?



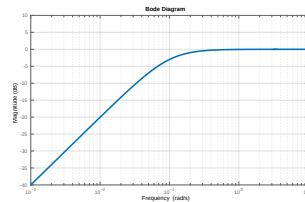
(A)



(B)



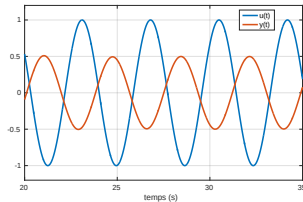
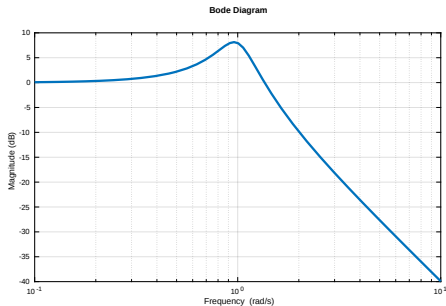
(C)



(D)

QCM interactif

Considérons la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale $u(t) = \sin(\omega t)$.
Déduez à partir de son diagramme de Bode la pulsation d'excitation.



(A) $\omega = 0.2$ rad/s

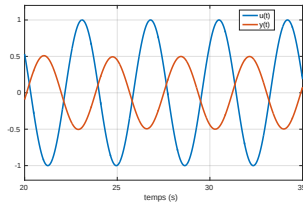
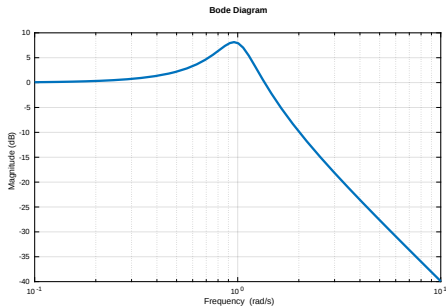
(C) $\omega = 1.7$ rad/s

(B) $\omega = 0.9$ rad/s

(D) $\omega = 3.5$ rad/s

QCM interactif

Considérons la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale $u(t) = \sin(\omega t)$.
Déduez à partir de son diagramme de Bode la pulsation d'excitation.



(A) $\omega = 0.2$ rad/s

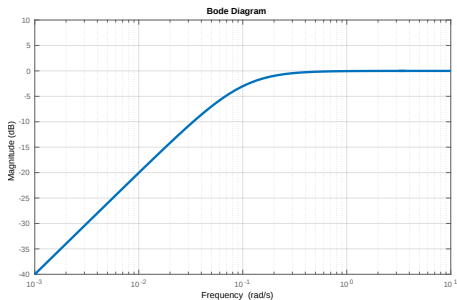
(C) $\omega = 1.7$ rad/s

(B) $\omega = 0.9$ rad/s

(D) $\omega = 3.5$ rad/s

QCM interactif

Considérons la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale $u(t) = 10 \sin(2 t)$.
Déduez à partir de son diagramme de Bode l'amplitude du signal de sortie $y(t)$ résultant.



(A) amplitude nulle

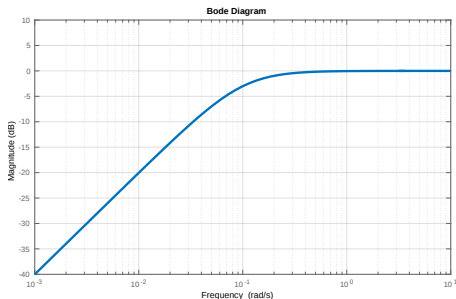
(C) 0.1

(B) 10

(D) 100

QCM interactif

Considérons la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale $u(t) = 10 \sin(2 t)$.
Déduez à partir de son diagramme de Bode l'amplitude du signal de sortie $y(t)$ résultant.



(A) amplitude nulle

(C) 0.1

(B) 10

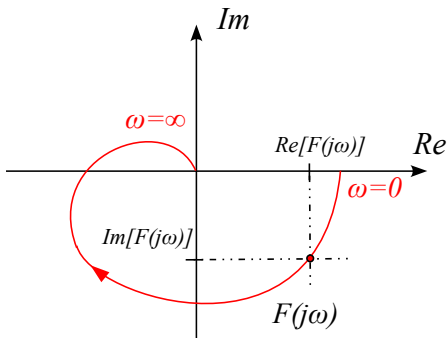
(D) 100

Représentation de Nyquist

Représentation graphique du transfert $F(j\omega)$ dans le plan complexe.

$$F(j\omega) = \operatorname{Re}[F(j\omega)] + j \operatorname{Im}[F(j\omega)]$$

La courbe est paramétrée par la pulsation ω et doit être orientée suivant le sens des ω croissants.

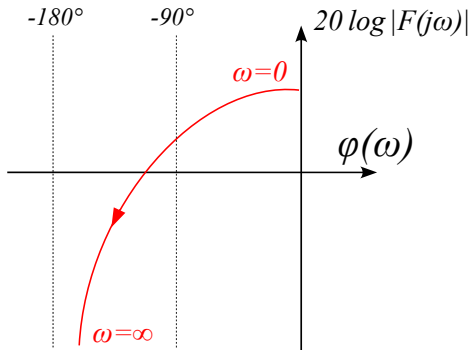


Représentation de Black-Nichols

Représentation graphique du gain par rapport au déphasage.

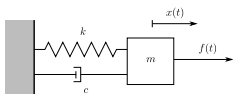
- ▶ En abscisses, le déphasage en degré : $\arg [F(j\omega)]$
- ▶ En ordonnées, le gain en dB : $20 \log |F(j\omega)|$

La courbe est paramétrée par la pulsation ω et doit être orientée suivant le sens des ω croissants.



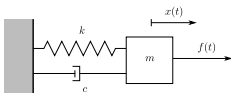
Résumé

Etude d'un système :



Résumé

Etude d'un système :

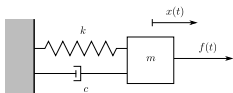

 $\Rightarrow$

Modèles mathématiques :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \\ \hat{x}(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \hat{f}(s) \end{cases}$$

Résumé

Etude d'un système :

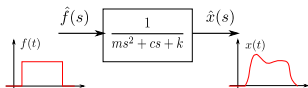

 $\Rightarrow$

Modèles mathématiques :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \\ \hat{x}(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \hat{f}(s) \end{cases}$$

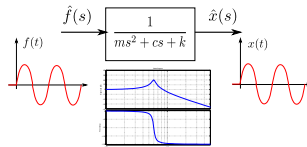
Analyse du "comportement" du système :

réponse temporelle



+

réponse fréquentielle





Stabilité et performances d'un asservissement

Sommaire

Introduction

- Notion de signal et de système
- Un peu de vocabulaire
- Qu'est-ce que l'automatique ?
- Le système de commande

Modélisation

- Exemples introductifs
- Fonction de transfert
- Schéma fonctionnel

Réponse d'un système

- Réponse temporelle
- Notion de stabilité
- Réponse fréquentielle
- Résumé

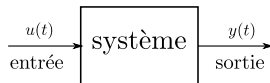
Stabilité et performances d'un asservissement

- Généralités et exemple introductif
- Stabilité
- Précision
- Rapidité
- Marges de stabilité

Synthèse de correcteurs

- Introduction
- Synthèse directe
- Actions élémentaires
- Combinaisons d'actions
- Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif?

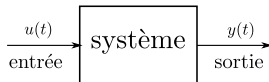
⇒ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs?

⇒ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

⇒ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif?

⇒ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs?

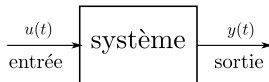
Vu au chapitre 3

⇒ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

Vu au chapitre 2

⇒ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif?

⇒ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs?

Vu au chapitre 3

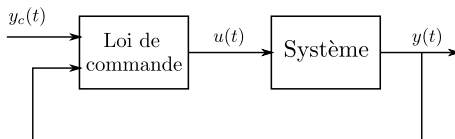
⇒ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

Vu au chapitre 2

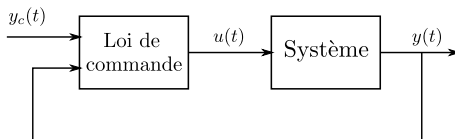
⇒ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

⇒ $u(t)$ donné *automatiquement* par la loi de commande en boucle fermée

Principe fondamental en Automatique : la commande en **boucle fermée**

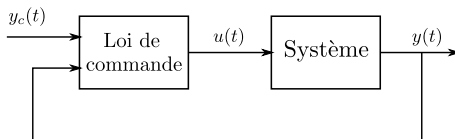


Principe fondamental en Automatique : la commande en **boucle fermée**



Question : comment déterminer la loi de commande ?

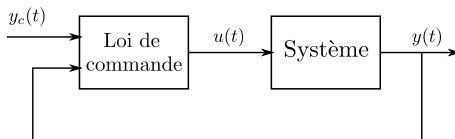
Principe fondamental en Automatique : la commande en **boucle fermée**



Question : comment déterminer la loi de commande ?

... on verra au dernier chapitre... avant ça

Principe fondamental en Automatique : la commande en **boucle fermée**



Question : comment déterminer la loi de commande ?

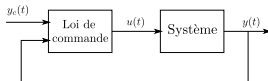
... on verra au dernier chapitre... avant ça

Question : pour une loi donnée, qu'est-ce que ça change ? qu'est-ce qui se passe ?

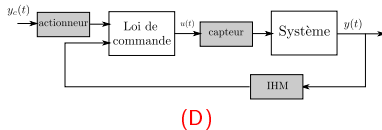
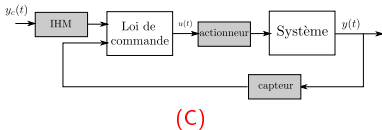
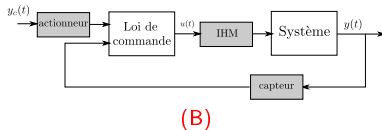
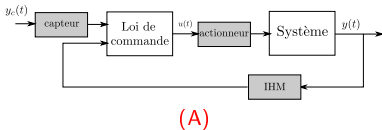
⇒ il faudrait analyser le système en BF avec ce qu'on a déjà vu

QCM interactif

Principe théorique de la commande en boucle fermée

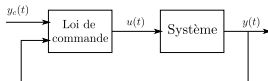


Quels sont les organes matériels nécessaires?

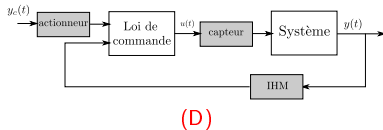
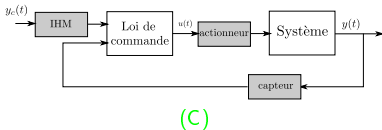
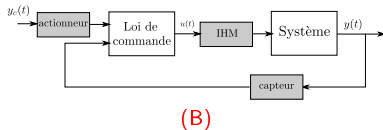
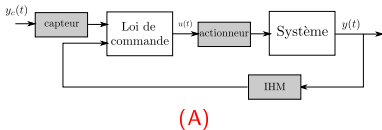


QCM interactif

Principe théorique de la commande en boucle fermée

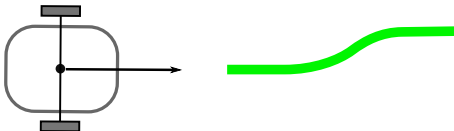


Quels sont les organes matériels nécessaires?



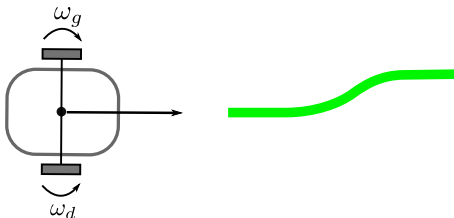
Exemple : problème de suivi de ligne

Un robot mobile, à deux roues motrices, doit suivre une ligne de référence



Exemple : problème de suivi de ligne

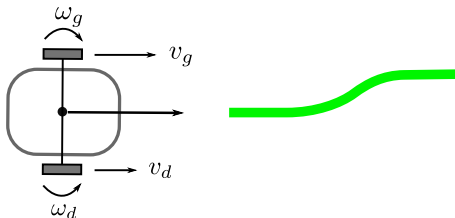
Un robot mobile, à deux roues motrices, doit suivre une ligne de référence



- Moyen d'action : rotation des deux moteurs ω_d et ω_g

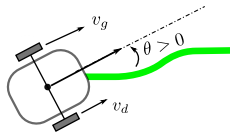
Exemple : problème de suivi de ligne

Un robot mobile, à deux roues motrices, doit suivre une ligne de référence

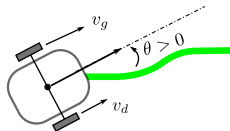


- ▶ Moyen d'action : rotation des deux moteurs ω_d et ω_g
- ▶ Vitesses linéaires résultantes : $v_d = r \omega_d$ et $v_g = r \omega_g$
- ▶ Mesure présence ligne : LED + photodiode ou caméra

Identification des signaux entrée/sortie



Identification des signaux entrée/sortie



Décomposition de la vitesse :

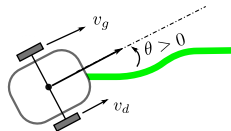
- ▶ vitesse d'avancement : v_0
- ▶ vitesse différentielle pour rotation : u

$$v_d = v_0 + u$$

et

$$v_g = v_0 - u$$

Identification des signaux entrée/sortie



Décomposition de la vitesse :

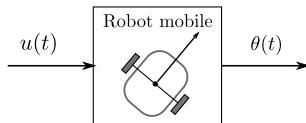
- ▶ vitesse d'avancement : v_0
- ▶ vitesse différentielle pour rotation : u

$$v_d = v_0 + u$$

et

$$v_g = v_0 - u$$

Mesure de l'angle de déviation θ

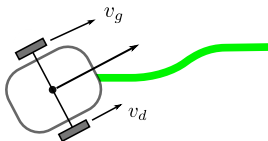


Une 1^{ière} stratégie simple

- ▶ Si cap aligné $\longrightarrow$ on impose $v_g = v_d$ donc $u = 0$

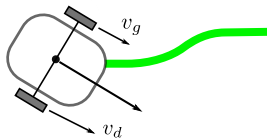
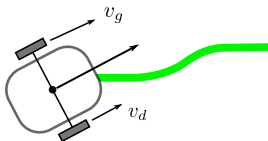
Une 1^{ière} stratégie simple

- ▶ Si cap aligné $\rightarrow$ on impose $v_g = v_d$ donc $u = 0$
- ▶ Si cap à gauche $\rightarrow$ on impose $v_g > v_d$ donc $u < 0$



Une 1^{ière} stratégie simple

- ▶ Si cap aligné $\rightarrow$ on impose $v_g = v_d$ donc $u = 0$
- ▶ Si cap à gauche $\rightarrow$ on impose $v_g > v_d$ donc $u < 0$
- ▶ Si cap à droite $\rightarrow$ on impose $v_g < v_d$ donc $u > 0$

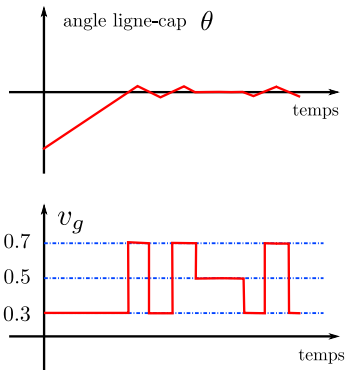


Intuitivement, quel sera le comportement ?

(par exemple pour $v_0 = 0.5 \text{ m/s}$ et $u = 0.2 \text{ m/s}$)

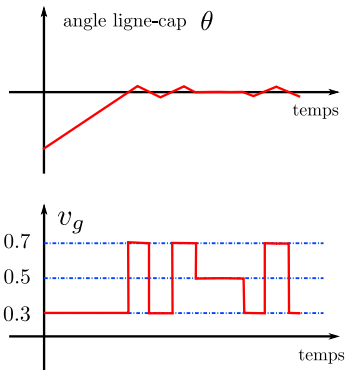
Intuitivement, quel sera le comportement ?

(par exemple pour $v_0 = 0.5 \text{ m/s}$ et $u = 0.2 \text{ m/s}$)

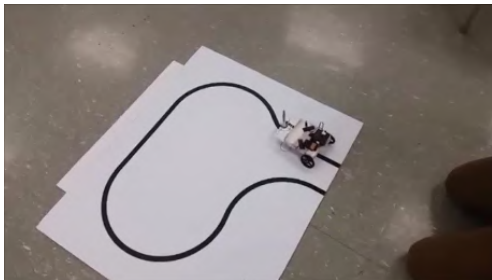


Intuitivement, quel sera le comportement ?

(par exemple pour $v_0 = 0.5 \text{ m/s}$ et $u = 0.2 \text{ m/s}$)



- ▶ présence d'oscillations ou chattering
- ▶ fortes sollicitations des moteurs
- ▶ quelle valeur pour u ?
- ▶ avantage : stratégie très simple à mettre en oeuvre.



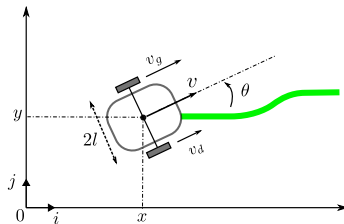
Miro et Frederick, Line Follower "Bang-Bang" Algorithm - YouTube

2^{nde} stratégie

Modélisons le système

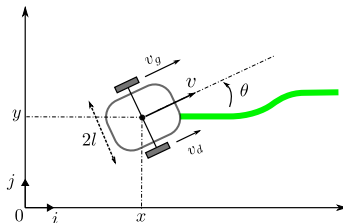
2^{de} stratégie

Modélisons le système



2^{de} stratégie

Modélisons le système



vitesse longitudinale :

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{v_d + v_g}{2} \\
 &= \frac{(v_0 + u) + (v_0 - u)}{2} \\
 &= v_0
 \end{aligned}$$

vitesse de rotation :

$$\begin{aligned}
 \omega &= \frac{v_d - v_g}{2l} \\
 &= \frac{(v_0 + u) - (v_0 - u)}{2l} \\
 &= \frac{u}{l}
 \end{aligned}$$

Quelle relation entre $u(t)$ et $\theta(t)$?

Or $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

Quelle relation entre $u(t)$ et $\theta(t)$?

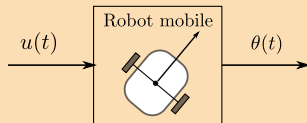
Or $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

On obtient un modèle cinématique simple

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{l} u(t)$$

soit la fonction de transfert

$$\hat{\theta}(s) = \frac{1}{s l} \hat{u}(s)$$



Quelle relation entre $u(t)$ et $\theta(t)$?

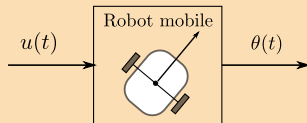
Or $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

On obtient un modèle cinématique simple

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{l} u(t)$$

soit la fonction de transfert

$$\hat{\theta}(s) = \frac{1}{s l} \hat{u}(s)$$



★ Quelle est la réponse indicielle de θ ? stabilité ?

★ Comment agir sur u pour que θ converge vers 0 ?

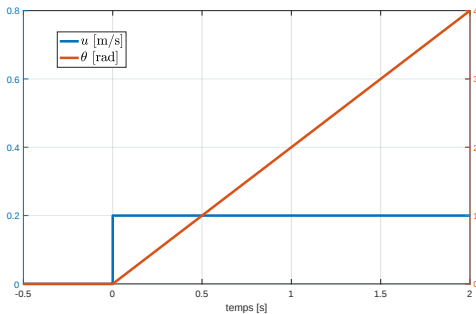
Réponse à un échelon d'amplitude $u(t) = 0.2 \text{ m/s}$ pour $t \geq 0$

$$\hat{\theta}(s) = \frac{0.2}{s^2 I} \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \frac{0.2}{I} t$$

Réponse à un échelon d'amplitude $u(t) = 0.2 \text{ m/s}$ pour $t \geq 0$

$$\hat{\theta}(s) = \frac{0.2}{s^2 l} \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \frac{0.2}{l} t$$

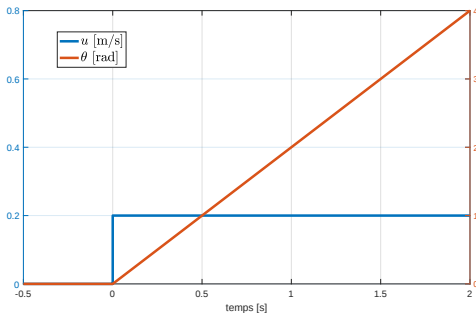
(simulation pour $l = 10 \text{ cm}$)



Réponse à un échelon d'amplitude $u(t) = 0.2 \text{ m/s}$ pour $t \geq 0$

$$\hat{\theta}(s) = \frac{0.2}{s^2 l} \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \frac{0.2}{l} t$$

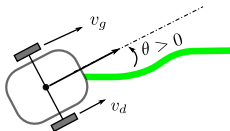
(simulation pour $l = 10 \text{ cm}$)



Fonction de transfert avec 1 pôle : 0 $\Rightarrow$ système en BO instable (prévisible?)

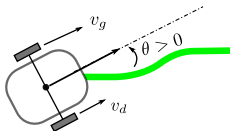
Intuitivement

- Si cap à gauche $\rightarrow$ il faut $v_g > v_d \Rightarrow u < 0 \Rightarrow \dot{\theta} < 0 \Rightarrow \theta \searrow$

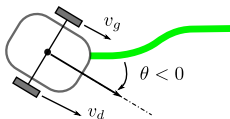


Intuitivement

- Si cap à gauche $\rightarrow$ il faut $v_g > v_d \Rightarrow u < 0 \Rightarrow \dot{\theta} < 0 \Rightarrow \theta \searrow$

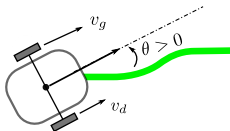


- Si cap à droite $\rightarrow$ il faut $v_g < v_d \Rightarrow u > 0 \Rightarrow \dot{\theta} > 0 \Rightarrow \theta \nearrow$

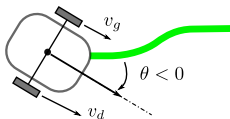


Intuitivement

- Si cap à gauche $\rightarrow$ il faut $v_g > v_d \Rightarrow u < 0 \Rightarrow \dot{\theta} < 0 \Rightarrow \theta \searrow$



- Si cap à droite $\rightarrow$ il faut $v_g < v_d \Rightarrow u > 0 \Rightarrow \dot{\theta} > 0 \Rightarrow \theta \nearrow$



★ Plutôt que de fixer u constant, calculons u en proportion de l'écart angulaire :

$$\Rightarrow u(t) = -k \theta(t) \quad (k > 0)$$

Loi de commande :

→ choix de la vitesse à imposer : $u(t) = -k \theta(t)$ ($k > 0$)

Loi de commande :

→ choix de la vitesse à imposer : $u(t) = -k \theta(t)$ ($k > 0$)

Le modèle du comportement devient :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{u(t)}{I} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}(t) = -\frac{k}{I} \theta(t)$$

Loi de commande :

→ choix de la vitesse à imposer : $u(t) = -k \theta(t)$ ($k > 0$)

Le modèle du comportement devient :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{u(t)}{I} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}(t) = -\frac{k}{I} \theta(t)$$

Soit une équation différentielle d'ordre 1 :

$$\dot{\theta}(t) + \frac{k}{I} \theta(t) = 0$$

Loi de commande :

→ choix de la vitesse à imposer : $u(t) = -k \theta(t)$ ($k > 0$)

Le modèle du comportement devient :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{u(t)}{I} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}(t) = -\frac{k}{I} \theta(t)$$

Soit une équation différentielle d'ordre 1 :

$$\dot{\theta}(t) + \frac{k}{I} \theta(t) = 0$$

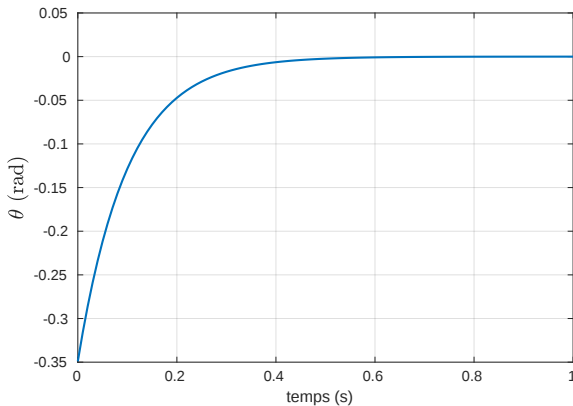
Que l'on sait résoudre facilement :

$$\theta(t) = \theta(0) e^{-\frac{k}{I} t}$$

Réponse temporelle :

$$\theta(t) = \theta(0) e^{-\frac{k}{I}t}$$

Simulation pour $I = 10$ cm, $k = 1$ et $\theta(0) = -0.35$ rad.



Loi de commande :

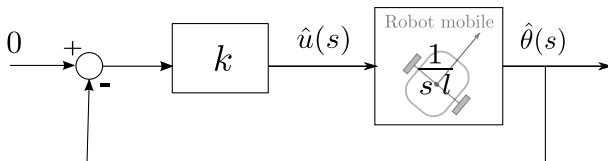
→ expression temporelle : $u(t) = -k \theta(t)$ ($k > 0$)

→ expression domaine de Laplace : $\hat{u}(s) = -k \hat{\theta}(s)$ ($k > 0$)

Loi de commande :

→ expression temporelle : $u(t) = -k \theta(t)$ ($k > 0$)

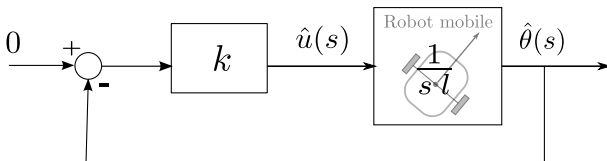
→ expression domaine de Laplace : $\hat{u}(s) = -k \hat{\theta}(s)$ ($k > 0$)



Loi de commande :

→ expression temporelle : $u(t) = -k \theta(t)$ ($k > 0$)

→ expression domaine de Laplace : $\hat{u}(s) = -k \hat{\theta}(s)$ ($k > 0$)



Commande en boucle fermée avec une correction proportionnelle

Étudions l'asservissement

- Fonction de transfert en boucle fermée :

$$F(s) = \frac{1}{\frac{J}{k}s + 1}$$

Étudions l'asservissement

- Fonction de transfert en boucle fermée :

$$F(s) = \frac{1}{\frac{I}{k}s + 1}$$

- Pôle : $p_1 = -k/I \Rightarrow$ asservissement stable pour $k > 0$

Étudions l'asservissement

- Fonction de transfert en boucle fermée :

$$F(s) = \frac{1}{\frac{I}{k}s + 1}$$

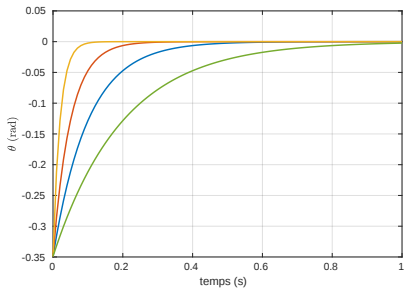
- Pôle : $p_1 = -k/I \Rightarrow$ asservissement stable pour $k > 0$

- Réponse à une condition initiale θ_0 :

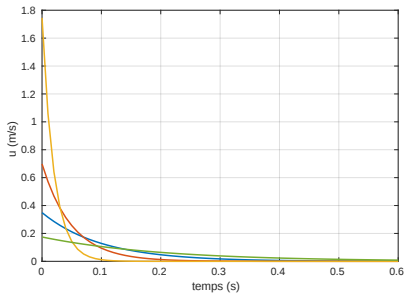
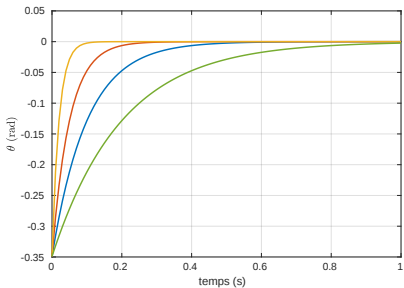
$$\hat{\theta}(s) = \frac{\theta_0}{\frac{I}{k}s + 1} \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{k}{I}t} \quad \triangle ! \neq \text{réponse échelon}$$

$\Rightarrow$ si $k \nearrow$ le temps de réponse $\searrow$

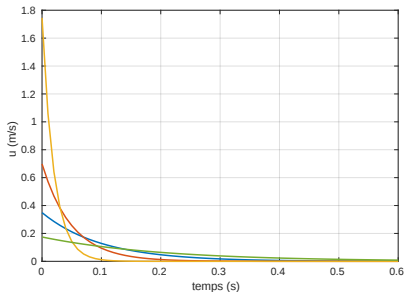
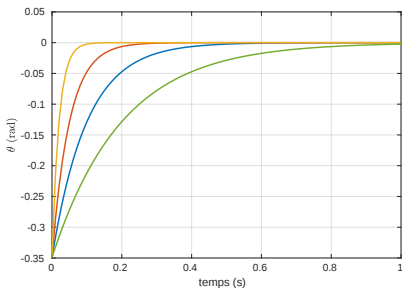
Simulations pour $k = \{0.5, 1, 2, 5\}$.



Simulations pour $k = \{0.5, 1, 2, 5\}$.



Simulations pour $k = \{0.5, 1, 2, 5\}$.



- ▶ la réponse converge vers 0
- ▶ il n'y a pas de commutations rapides comme avec la 1^{er} stratégie
- ▶ on peut contrôler la dynamique avec le paramètre k
- ▶ on observe bien que si $k \nearrow$
 - ▶ le temps de réponse $\searrow$
 - ▶ mais la vitesse à imposer $\nearrow$

Illustration résultat avec loi de commande PID

$$u(t) = -k_p\theta(t) - k_i \int_0^t \theta(\tau) d\tau - k_d \frac{d\theta(t)}{dt}$$



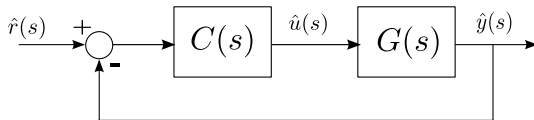
GeekTechnophiles, How To Make Line Follower Robot Using PID Controller
YouTube

Quelques remarques générales :

- ▶ Attention à ne pas confondre avec l'Automatisme ou l'informatique industrielle.
- ▶ Composante Mathématiques appliquées importante.
- ▶ Pluridisciplinaire par ses applications.
- ▶ L'Automatique est une science cachée ?

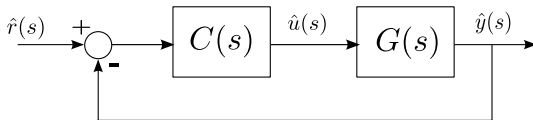
Stabilité d'un asservissement

Comment analyser la stabilité d'un système asservi ?



Stabilité d'un asservissement

Comment analyser la stabilité d'un système asservi ?



Méthodes :

- Ecrire la fonction de transfert globale équivalente $F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$,
 ⇒ Appliquer l'une des deux méthodes vues précédemment.
- Critère du revers (critère graphique).

Si le système en boucle ouverte est stable et à minimum de phase (pôles et zéros à partie réelle strictement négative) alors le système asservi est stable si et seulement si le point critique $(-1, 0)$ est laissé à gauche quand on parcourt le lieu de transfert de la boucle ouverte dans le plan de Nyquist dans le sens des ω croissants.

Exemple 1 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{10}{10s^2 + 18s + 8} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}.$$

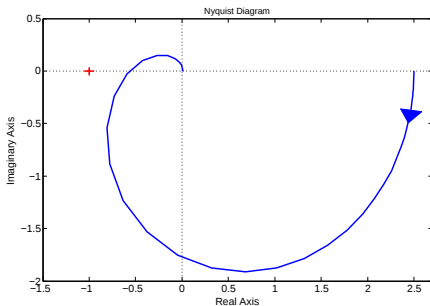
Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.

Exemple 1 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{10}{10s^2 + 18s + 8} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}.$$

Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.

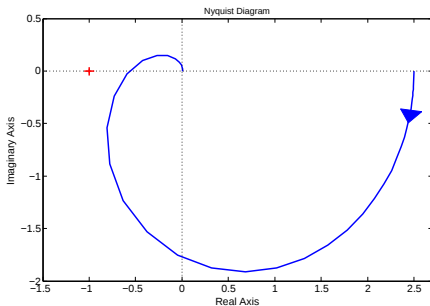


Exemple 1 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{10}{10s^2 + 18s + 8} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}.$$

Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.



⇒ le système en boucle fermée est stable.

Exemple 2 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 0.4s + 1} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{s + 3}{10s + 1}.$$

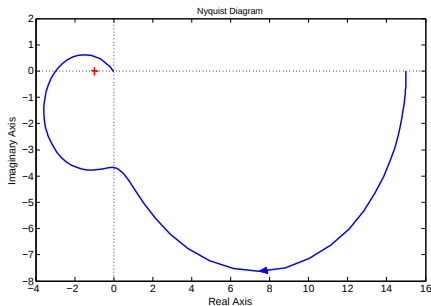
Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.

Exemple 2 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 0.4s + 1} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{s + 3}{10s + 1}.$$

Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.

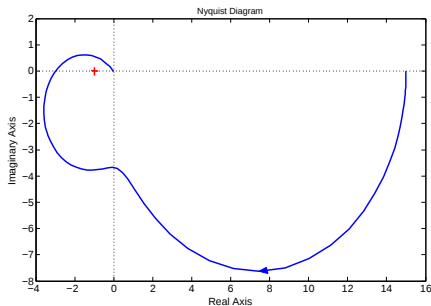


Exemple 2 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 0.4s + 1} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{s + 3}{10s + 1}.$$

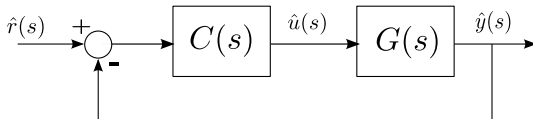
Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.



⇒ le système en boucle fermée est instable.

Performance d'un asservissement

Il existe différents critères pour caractériser un asservissement.



En plus de la stabilité, d'autres propriétés peuvent être intéressantes :

- ▶ la précision.
- ▶ la rapidité.
- ▶ la marge de stabilité.

Précision

La précision est déterminée par l'**erreur d'asservissement** en régime permanent :

$$\varepsilon(t) = r(t) - y(t) \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

Précision

La précision est déterminée par l'**erreur d'asservissement** en régime permanent :

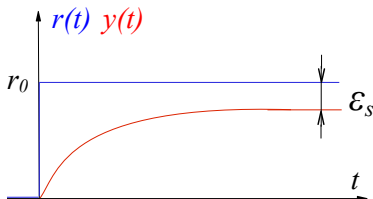
$$\varepsilon(t) = r(t) - y(t) \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

On définit :

► **erreur statique** ε_s

Lorsque l'entrée est un échelon

$$r(t) = r_0, \forall t \geq 0$$



Précision

La précision est déterminée par l'**erreur d'asservissement** en régime permanent :

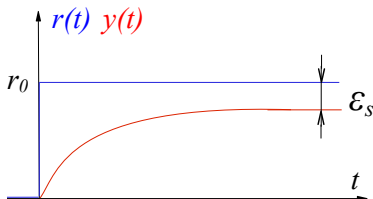
$$\varepsilon(t) = r(t) - y(t) \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

On définit :

► erreur statique ε_s

Lorsque l'entrée est un échelon

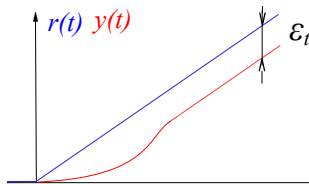
$$r(t) = r_0, \forall t \geq 0$$



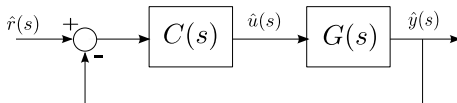
► erreur de trainage ε_t

Lorsque l'entrée est une rampe

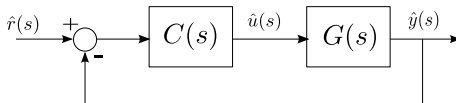
$$r(t) = r_0 t, \forall t \geq 0$$



L'erreur en régime permanent s'exprime par $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) - y(t)$.

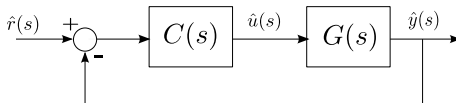


L'erreur en régime permanent s'exprime par $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) - y(t)$.



Selon le théorème de la valeur finale $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{\varepsilon}(s)$.

L'erreur en régime permanent s'exprime par $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) - y(t)$.



Selon le théorème de la valeur finale $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{\varepsilon}(s)$.

En pratique, on utilise la transformée de Laplace :

$$\hat{\varepsilon}(s) = \hat{r}(s) - \hat{y}(s) = \left(1 - F(s)\right) \hat{r}(s)$$

où $F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$ est la fonction de transfert en boucle fermée.

Exemple 1 : $G(s) = \frac{10}{s + 20}$

Quelques calculs donnent : $F(s) = \frac{10}{s + 30}$ et $\hat{e}(s) = \frac{s + 20}{s + 30} \hat{r}(s)$.

Exemple 1 : $G(s) = \frac{10}{s+20}$

Quelques calculs donnent : $F(s) = \frac{10}{s+30}$ et $\hat{e}(s) = \frac{s+20}{s+30} \hat{r}(s)$.

On en déduit :

$$\text{erreur statique } \epsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+20}{s+30} \frac{r_0}{s} = \frac{2}{3} r_0,$$

$$\text{erreur de trainage } \epsilon_t = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+20}{s+30} \frac{r_0}{s^2} = +\infty.$$

Exemple 1 : $G(s) = \frac{10}{s + 20}$

Quelques calculs donnent : $F(s) = \frac{10}{s + 30}$ et $\hat{e}(s) = \frac{s + 20}{s + 30} \hat{r}(s)$.

On en déduit :

$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s + 20}{s + 30} \frac{r_0}{s} = \frac{2}{3} r_0,$$

$$\text{erreur de trainage } \varepsilon_t = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s + 20}{s + 30} \frac{r_0}{s^2} = +\infty.$$

Exemple 2 : $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Quelques calculs donnent :

$$F(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(K + 1)} \quad \text{et} \quad \hat{e}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(K + 1)} \hat{r}(s).$$

Exemple 1 : $G(s) = \frac{10}{s + 20}$

Quelques calculs donnent : $F(s) = \frac{10}{s + 30}$ et $\hat{e}(s) = \frac{s + 20}{s + 30} \hat{r}(s)$.

On en déduit :

$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s + 20}{s + 30} \frac{r_0}{s} = \frac{2}{3} r_0,$$

$$\text{erreur de trainage } \varepsilon_t = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s + 20}{s + 30} \frac{r_0}{s^2} = +\infty.$$

Exemple 2 : $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Quelques calculs donnent :

$$F(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(K + 1)} \quad \text{et} \quad \hat{e}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(K + 1)} \hat{r}(s).$$

On en déduit :

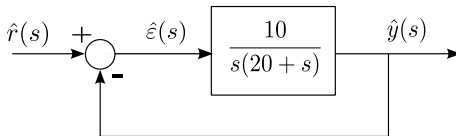
$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(1 - F(s) \right) \frac{r_0}{s} = \frac{1}{K + 1} r_0,$$

$$\text{erreur de trainage } \varepsilon_t = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(1 - F(s) \right) \frac{r_0}{s^2} = +\infty.$$

Règles générales :

- ▶ Un gain statique élevé en boucle ouverte permet d'obtenir une erreur de position (en asservissement) plus faible.
 - ▶ Loi des intégrateurs : l'erreur en régime permanent, pour une entrée $\hat{r}(s)$, est nulle si la boucle ouverte comprend au moins autant d'intégrateurs que le signal $\hat{r}(s)$.
-
- S'il n'y a pas d'intégrateur pur dans la FTBO, l'erreur de position est finie et l'erreur de trainage est infinie.
 - S'il y a un intégrateur pur dans la FTBO, l'erreur de position est nulle et l'erreur de trainage est finie.
 - S'il y a deux intégrateur pur dans la FTBO, l'erreur de position est nulle et l'erreur de trainage est nulle.

Exemple 3 :



Quelques calculs donnent : $F(s) = \frac{10}{10 + s(20 + s)}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \frac{s(20 + s)}{10 + s(20 + s)} \hat{r}(s)$.

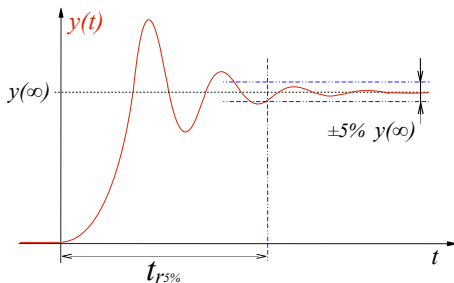
$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(20 + s)}{10 + s(20 + s)} \frac{r_0}{s} = 0,$$

$$\text{erreur de trainage } \varepsilon_t = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(20 + s)}{10 + s(20 + s)} \frac{r_0}{s^2} = 2r_0.$$

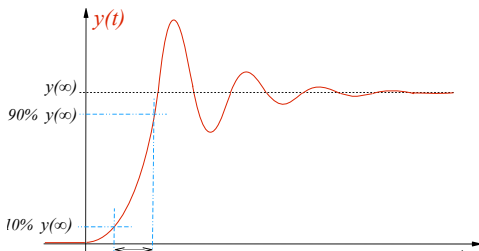
Rapidité

La performance en rapidité d'un asservissement est caractérisée par le temps de réponse et le temps de montée.

Le temps de réponse est le temps mis par le signal de sortie pour atteindre sa valeur finale à $n\%$ près (souvent 5%) sans ressortir de cet intervalle.



Le temps de montée correspond à l'intervalle de temps dans lequel la sortie passe de 10% à 90% de la valeur finale.



Marges de stabilité

Soit le système à commander : $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$.

Stabilité du système asservi $F(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2) + k}$?

Marges de stabilité

Soit le système à commander : $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$.

Stabilité du système asservi $F(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)+k}$?

s^3	1	2	0
s^2	3	k	0
s^1	$\frac{6-k}{3}$	0	
s^0	k		

$\Rightarrow$ système stable si $0 < k < 6$.

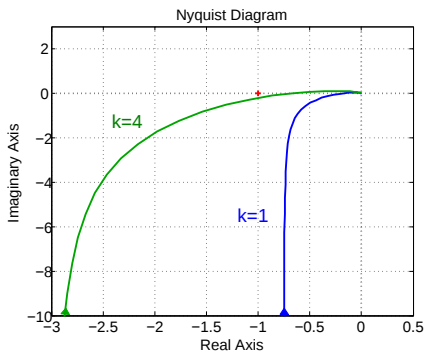
Marges de stabilité

Soit le système à commander : $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$.

Stabilité du système asservi $F(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2) + k}$?

s^3	1	2	0
s^2	3	k	0
s^1	$\frac{6-k}{3}$	0	
s^0	k		

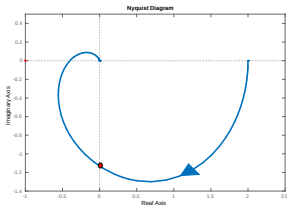
⇒ système stable si $0 < k < 6$.



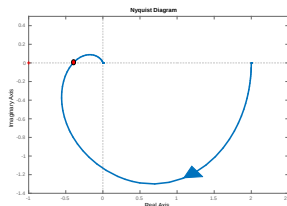
★ Notion de **marges de stabilité** : quantifie “l'éloignement” par rapport au seuil critique d'instabilité.

QCM interactif

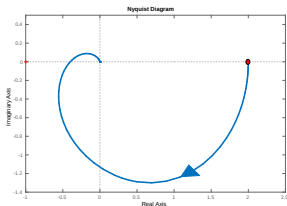
Dans la représentation de Nyquist, quel est le point du lieu pour lequel la fonction de transfert $G(j\omega)$ déphase de -180° ?



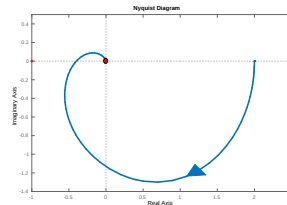
(A)



(B)



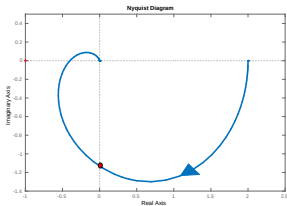
(C)



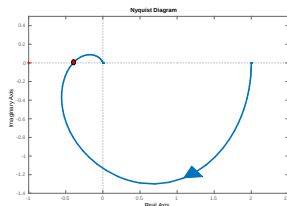
(D)

QCM interactif

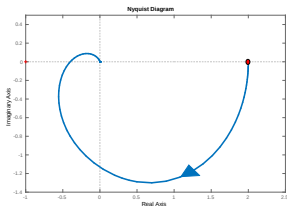
Dans la représentation de Nyquist, quel est le point du lieu pour lequel la fonction de transfert $G(j\omega)$ déphase de -180° ?



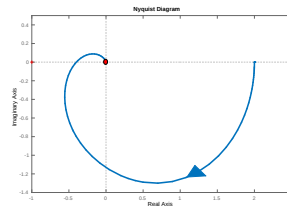
(A)



(B)



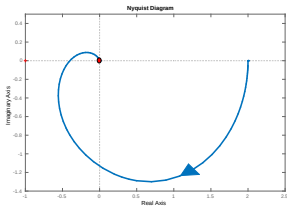
(C)



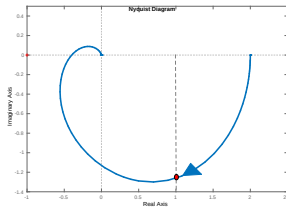
(D)

QCM interactif

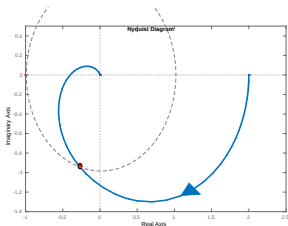
Dans la représentation de Nyquist, quel est le point du lieu pour lequel la fonction de transfert $G(j\omega)$ a un gain de 0dB ?



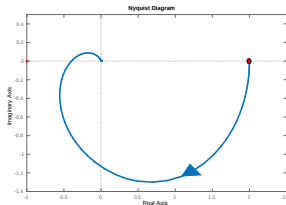
(A)



(B)



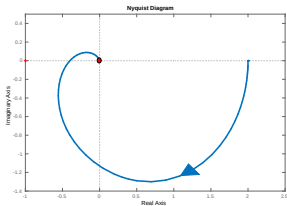
(C)



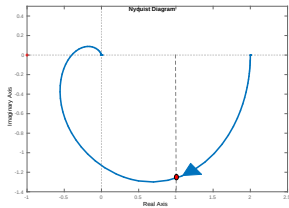
(D)

QCM interactif

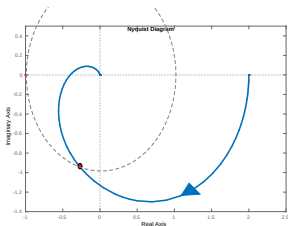
Dans la représentation de Nyquist, quel est le point du lieu pour lequel la fonction de transfert $G(j\omega)$ a un gain de 0dB ?



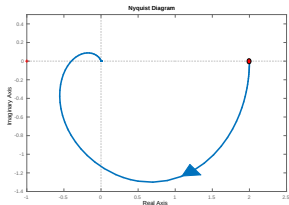
(A)



(B)



(C)



(D)

Marge de gain

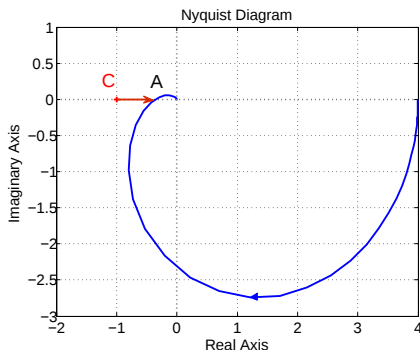
La marge de gain se définit comme le gain qu'il faut apporter au système en boucle ouverte pour déstabiliser le système asservi (en boucle fermée).

Mesure :

La marge de gain d'un système asservi est donnée par la formule :

$$\Delta G = -20 \log |G(j\omega_{-\pi})|$$

où $\omega_{-\pi}$ est la pulsation pour laquelle la FTBO $G(j\omega)$ est déphasé de -180° .



Marge de phase

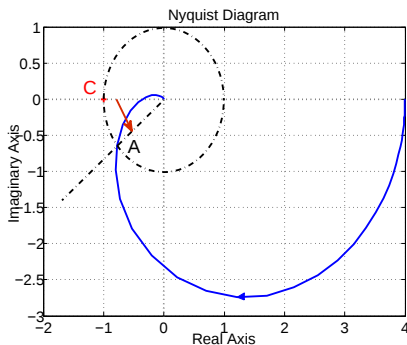
La marge de phase se définit comme le déphasage qu'il faut apporter au système en boucle ouverte pour déstabiliser le système asservi (en boucle fermée).

Mesure :

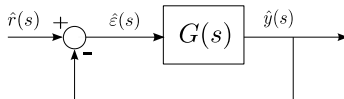
La marge de phase d'un système asservi est donnée par la formule :

$$\Delta\phi = \pi + \arg G(j\omega_{0dB})$$

où ω_{0dB} est la pulsation pour laquelle la FTBO $G(j\omega)$ a un gain unitaire (0 en décibel).

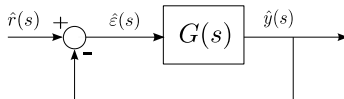


Exemple 1 : Soit l'asservissement suivant

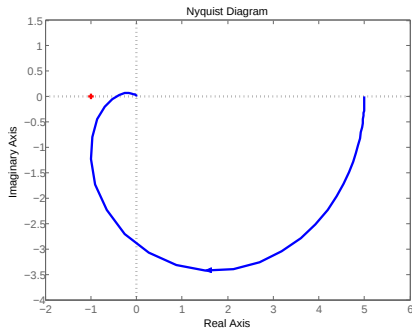


avec $G(s) = \frac{5}{s^3 + 3.5s^2 + 3.5s + 1}$. L'asservissement est-il stable?

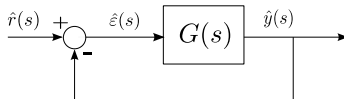
Exemple 1 : Soit l'asservissement suivant



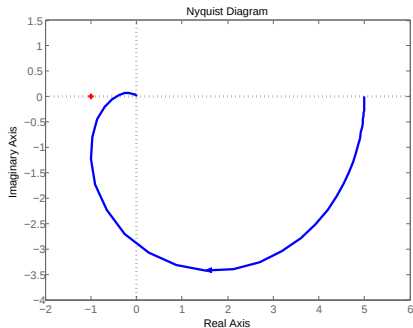
avec $G(s) = \frac{5}{s^3 + 3.5s^2 + 3.5s + 1}$. L'asservissement est-il stable?



Exemple 1 : Soit l'asservissement suivant



avec $G(s) = \frac{5}{s^3 + 3.5s^2 + 3.5s + 1}$. L'asservissement est-il stable?



⇒ Par application du critère du revers : stable

Quelle est sa marge de stabilité ?

Quelle est sa marge de stabilité ?

Des mesures sur le lieu de $G(s)$ dans Bode ou Nyquist donnent

- ▶ $|G(j\omega)| = 1$ pour la pulsation $\omega = 1.24 \text{ rad/s}$,
- ▶ $\arg(G(j\omega)) = -180^\circ$ pour la pulsation $\omega = 1.87 \text{ rad/s}$.

Quelle est sa marge de stabilité ?

Des mesures sur le lieu de $G(s)$ dans Bode ou Nyquist donnent

- ▶ $|G(j\omega)| = 1$ pour la pulsation $\omega = 1.24 \text{ rad/s}$,
- ▶ $\arg(G(j\omega)) = -180^\circ$ pour la pulsation $\omega = 1.87 \text{ rad/s}$.

Calculs des marges

- ▶ marge de gain :

$$\Delta G = -20 \log \frac{5}{|(j\omega)^3 + 3.5(j\omega)^2 + 3.5(j\omega) + 1|}, \text{ avec } \omega = 1.87$$

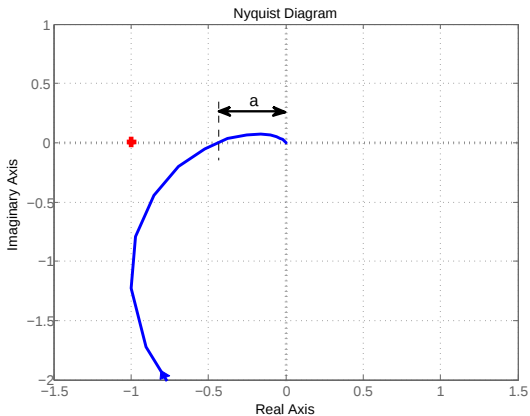
$$= 7.04 \text{ dB}$$

- ▶ marge de phase :

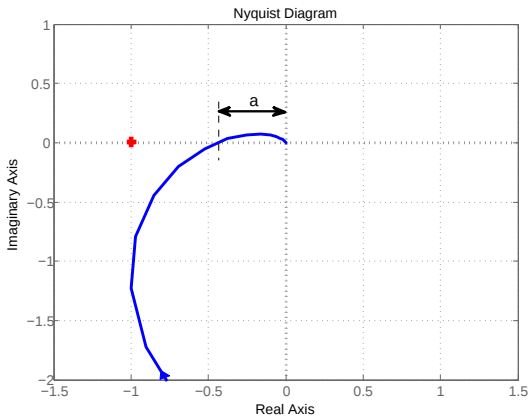
$$\Delta\phi = \pi + \arg \frac{5}{(j\omega)^3 + 3.5(j\omega)^2 + 3.5(j\omega) + 1}, \text{ avec } \omega = 1.24$$

$$= 0.51 \text{ rad } (29.2 \text{ deg})$$

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$

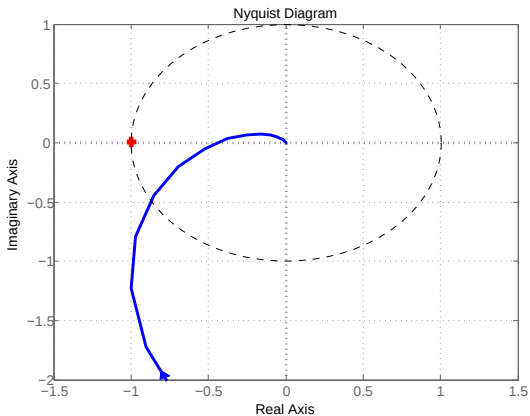


Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$



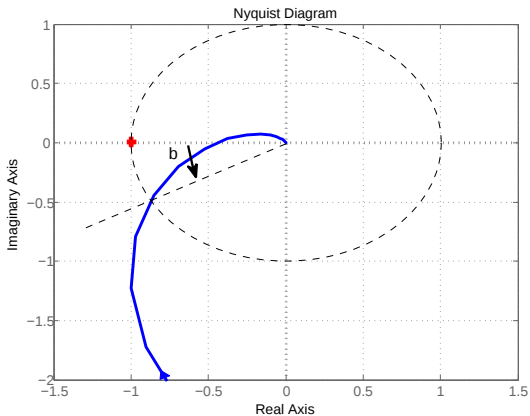
- distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = 20 \log(a) \simeq 7.05 \text{ dB}$.

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$



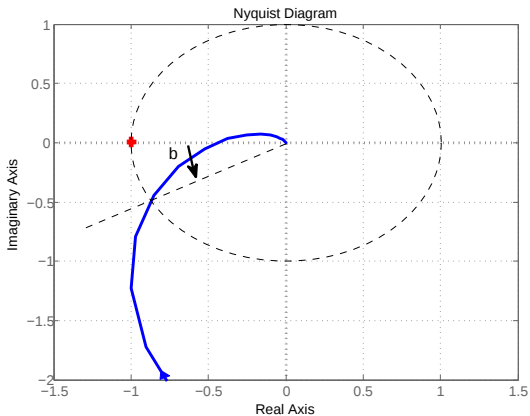
► distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = 20 \log(a) \simeq 7.05 \text{ dB}$.

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$



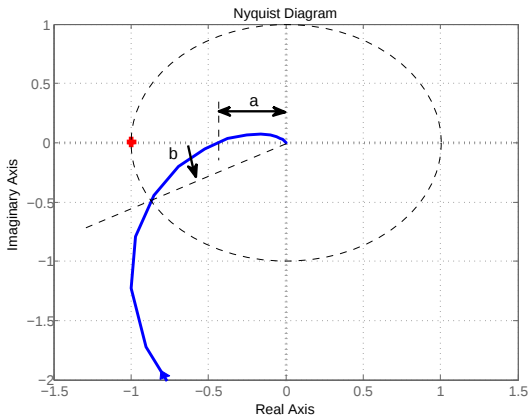
- distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = 20 \log(a) \simeq 7.05 \text{ dB}$.

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$



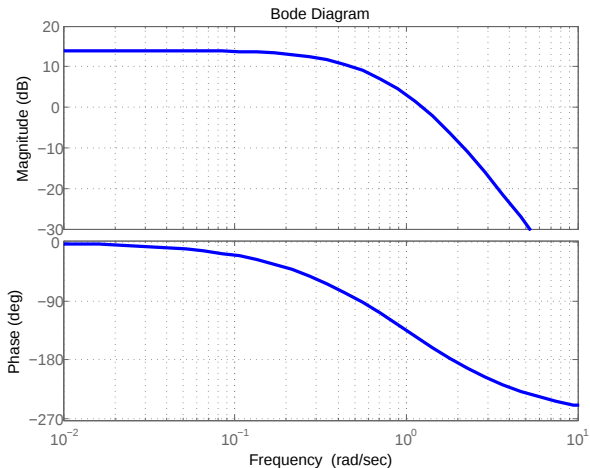
- distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = 20 \log(a) \simeq 7.05 \text{ dB}$.
- angle $b \simeq 29$: marge de gain $\Delta \phi = b \simeq 29 \text{ deg}$.

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$

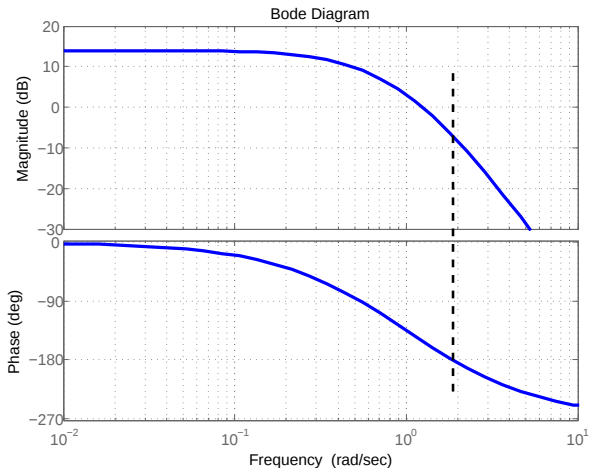


- distance $a \simeq 0.44$: marge de gain $\Delta G = 20 \log(a) \simeq 7.05 \text{ dB}$.
- angle $b \simeq 29$: marge de gain $\Delta \phi = b \simeq 29 \text{ deg}$.

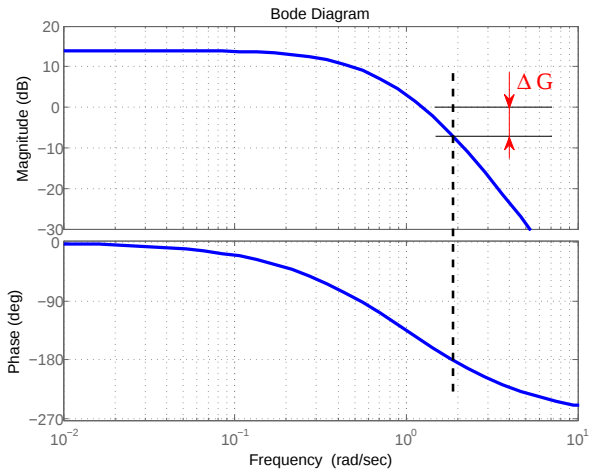
Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



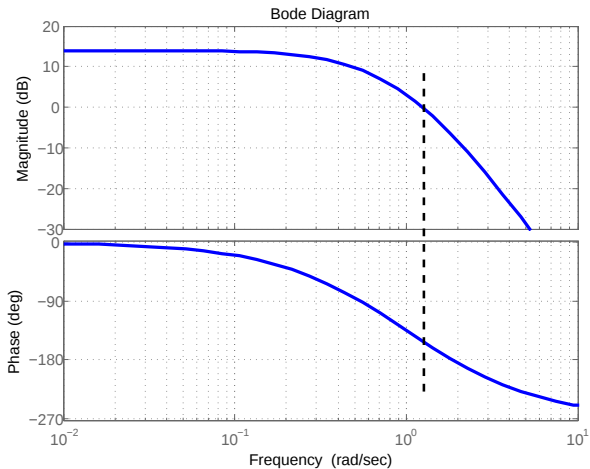
Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



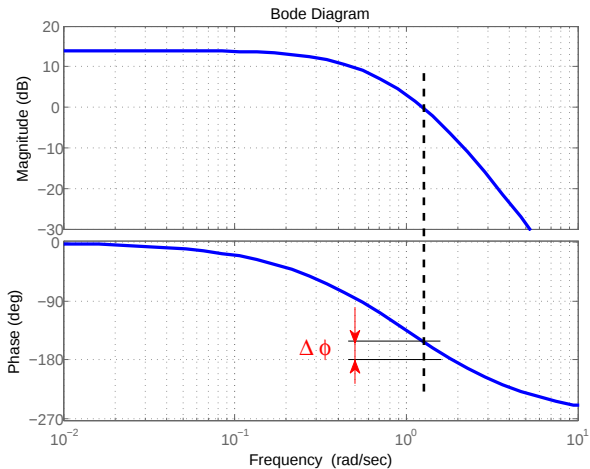
Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



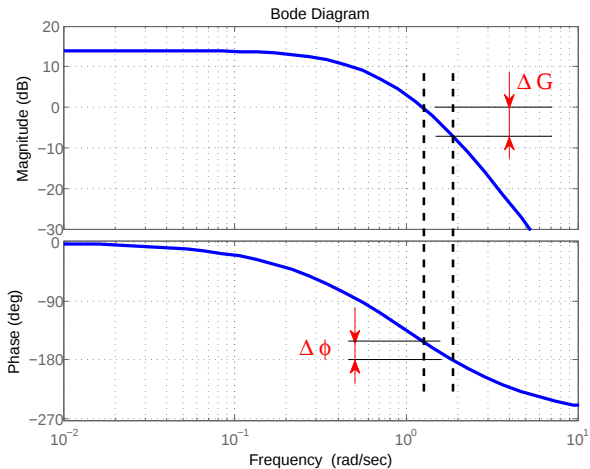
Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$

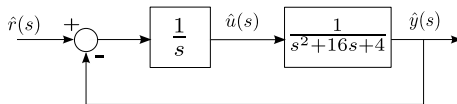


Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$

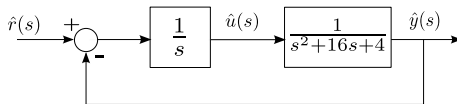


Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$

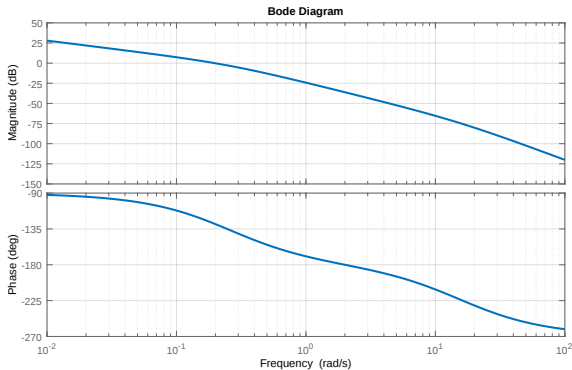


Exemple 2 :

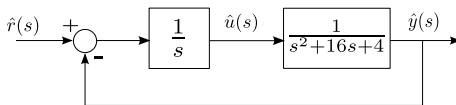
Exemple 2 :



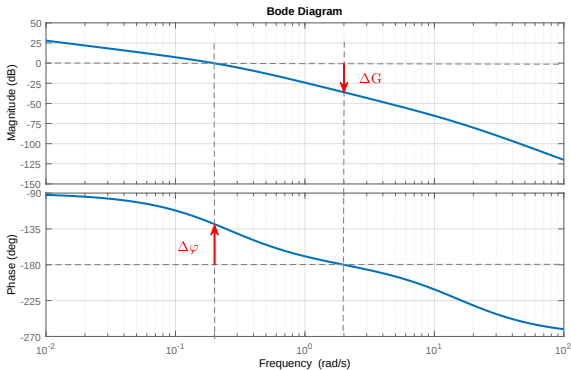
Le système est stable en BF. Quelles sont les marges ?



Exemple 2 :



Le système est stable en BF. Quelles sont les marges ?



⇒ marge de gain $\Delta G = 36 \text{ dB}$ et marge de phase $\Delta \varphi = 51 \text{ deg}$



Synthèse de correcteurs

Sommaire

Introduction

- Notion de signal et de système
- Un peu de vocabulaire
- Qu'est-ce que l'automatique ?
- Le système de commande

Modélisation

- Exemples introductifs
- Fonction de transfert
- Schéma fonctionnel

Réponse d'un système

- Réponse temporelle
- Notion de stabilité
- Réponse fréquentielle
- Résumé

Stabilité et performances d'un asservissement

- Généralités et exemple introductif
- Stabilité
- Précision
- Rapidité
- Marges de stabilité

Synthèse de correcteurs

Introduction

Synthèse directe

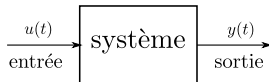
Actions élémentaires

Combinaisons d'actions

Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Introduction

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif?

⇒ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs?

Vu au chapitre 3

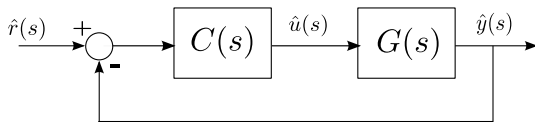
⇒ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

Vu au chapitre 2

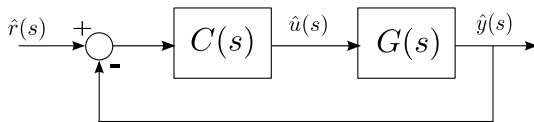
⇒ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

⇒ $u(t)$ donné *automatiquement* par la loi de commande en boucle fermée

Principe de commande en **boucle fermée**



Principe de commande en **boucle fermée**



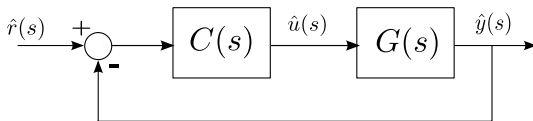
Question : comment déterminer la loi de commande ?

... on verra au dernier chapitre... avant ça

Question : pour une loi donnée, qu'est-ce que ça change ? qu'est-ce qui se passe ?

⇒ il faudrait analyser le système en BF avec ce qu'on a déjà vu

Principe de commande en **boucle fermée**



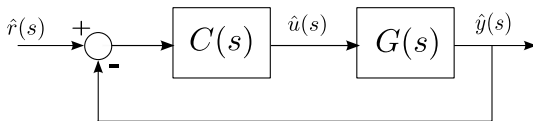
Question : comment déterminer la loi de commande ?

... on verra au dernier chapitre... avant ça

Question : pour une loi donnée, qu'est-ce que ça change ? qu'est-ce qui se passe ?

Vu au chapitre 5

⇒ il faudrait analyser le système en BF avec ce qu'on a déjà vu

Principe de commande en **boucle fermée**

Question : comment déterminer la loi de commande ?

... on verra au dernier chapitre... avant ça → on y est donc

↪ il s'agit de déterminer un correcteur $C(s)$

Question : pour une loi donnée, qu'est-ce que ça change ? qu'est-ce qui se passe ?

Vu au chapitre 5

⇒ il faudrait analyser le système en BF avec ce qu'on a déjà vu

Récapitulons

Phase de modélisation :

Chercher un modèle représentant le comportement du système.

- ▶ relation entrée-sortie ?
- ▶ équation différentielle, fonction de transfert, schéma-bloc...

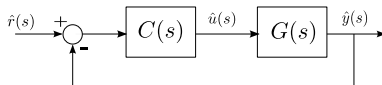
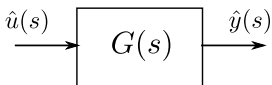
Récapitulons

Phase de modélisation :

Chercher un modèle représentant le comportement du système.

- ▶ relation entrée-sortie ?
- ▶ équation différentielle, fonction de transfert, schéma-bloc...

Phase d'analyse :



Analyse des propriétés du modèle et ses performances (en bo ou bf).

- ▶ réponses temporelles et fréquentielles
- ▶ stabilité
- ▶ analyse d'un asservissement pour un correcteur $C(s)$ donné

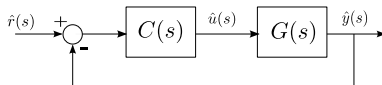
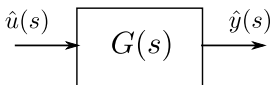
Récapitulons

Phase de modélisation :

Chercher un modèle représentant le comportement du système.

- ▶ relation entrée-sortie ?
- ▶ équation différentielle, fonction de transfert, schéma-bloc...

Phase d'analyse :

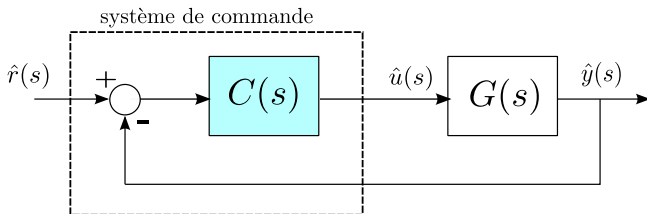


Analyse des propriétés du modèle et ses performances (en bo ou bf).

- ▶ réponses temporelles et fréquentielles
- ▶ stabilité
- ▶ analyse d'un asservissement pour un correcteur $C(s)$ donné

⇒ Ce que vous avez vu jusqu'à maintenant.

Phase de synthèse :



Conception d'un système de commande.

- ▶ rechercher un correcteur
- ▶ stabilisation
- ▶ amélioration des performances

⇒ Le système en boucle fermée doit satisfaire un certain cdc.

Un système de commande a pour objectif de doter le système asservi de certaines propriétés telles que

- ▶ la stabilité du système asservi,
- ▶ la rapidité de la réponse temporelle (régime transitoire),
- ▶ la précision en régime permanent,
- ▶ la robustesse (marges de stabilité, rejet de perturbation).

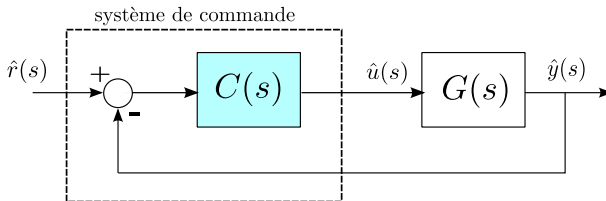
Un système de commande a pour objectif de doter le système asservi de certaines propriétés telles que

- ▶ la stabilité du système asservi,
- ▶ la rapidité de la réponse temporelle (régime transitoire),
- ▶ la précision en régime permanent,
- ▶ la robustesse (marges de stabilité, rejet de perturbation).

Dans ce cours, seule la synthèse par méthodes fréquentielles classiques est considérée. Elles sont très utilisées en entreprises du fait de

- ▶ leur aspect pratique,
- ▶ l'existence de techniques de synthèse simples ou empiriques,
- ▶ la possibilité de régler les gains intuitivement.

Pour la suite de l'exposé, nous garderons les notations suivantes :



- ▶ $C(s)$ représente le correcteur.
- ▶ $G(s)$ représente le système à commander.
- ▶ $\hat{u}(s)$ est le signal de commande.
- ▶ $F(s)$ représente la fonction de transfert en boucle fermée.
- ▶ Dans cette configuration la FTBO correspond à la chaîne directe : $C(s)G(s)$.
- ▶ L'erreur d'asservissement est notée $\hat{e}(s) = \hat{e}(s) - \hat{y}(s)$.

Synthèse directe : modèle imposé

Une 1^{ière} méthode directe et pratique consiste à imposer un modèle pour la FTBF.

Synthèse directe : modèle imposé

Une 1^{ière} méthode directe et pratique consiste à imposer un modèle pour la FTBF.

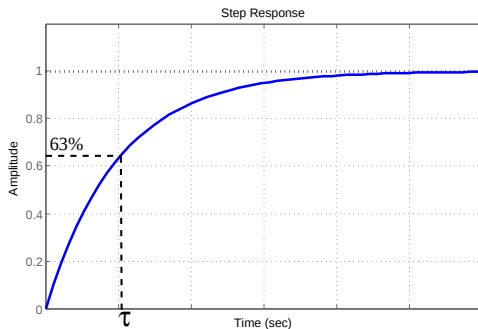
Qu'est-ce qu'un modèle "idéal" ?

Synthèse directe : modèle imposé

Une 1^{ière} méthode directe et pratique consiste à imposer un modèle pour la FTBF.

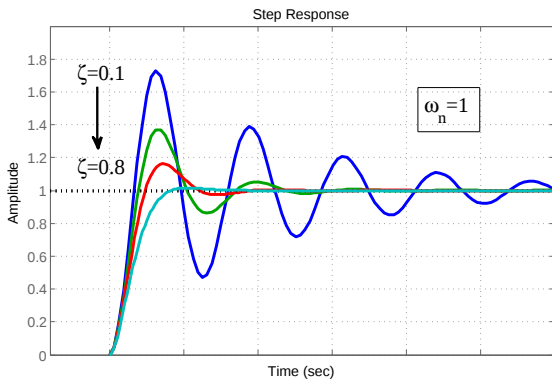
Qu'est-ce qu'un modèle "idéal" ?

pour un premier ordre : $F_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$



la constante de temps τ définit la rapidité : $t_{r5\%} = 3\tau$

pour un second ordre :
$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$



- ▶ l'amortissement ζ définit le dépassement : $D_1 = 100 e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
- ▶ la pulsation propre et l'amortissement définissent la rapidité $t_{r5\%} \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$

Méthode :

1. Spécifier une FTBF ayant une dynamique souhaitée “idéale”.

- ▶ type premier ordre

$$F_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

- ▶ type second ordre

$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

- ▶ pour les ordres supérieurs on peut envisager : un pôle multiples ou un second ordre dominant.

Méthode :

1. Spécifier une FTBF ayant une dynamique souhaitée “idéale”.

- ▶ type premier ordre

$$F_d(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

- ▶ type second ordre

$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

- ▶ pour les ordres supérieurs on peut envisager : un pôle multiples ou un second ordre dominant.

2. En identifiant la FTBF avec la fonction désirée, calculer le correcteur :

$$F_d(s) = F(s) \quad \Rightarrow \quad F_d(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

$$\Rightarrow \quad C(s) = \frac{F_d(s)}{G(s)(1 - F_d(s))}$$

3. Le correcteur doit être propre pour être réalisable.
(ordre numérateur $\leq$ ordre dénominateur)

3. Le correcteur doit être propre pour être réalisable.
(ordre numérateur $\leq$ ordre dénominateur)
4. Une phase de simulation est nécessaire pour valider le fonctionnement
(comportement attendu, pas de saturation...).

3. Le correcteur doit être propre pour être réalisable.
(ordre numérateur $\leq$ ordre dénominateur)
4. Une phase de simulation est nécessaire pour valider le fonctionnement
(comportement attendu, pas de saturation...).

Remarques :

- ▶ L'approche est valide seulement si le modèle du système est bien connu.
- ▶ Le système à commander doit posséder des pôles et zéros stables.
- ▶ L'approche est adaptée plutôt pour des systèmes d'ordre faible.

Exemple

Soit le système à commander de fonction de transfert :

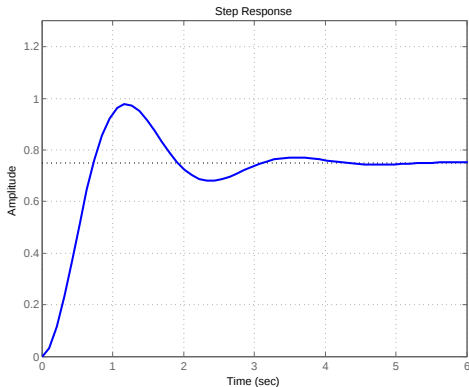
$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 2s + 8}.$$

Exemple

Soit le système à commander de fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 2s + 8}.$$

Simulons sa réponse indicielle :



Dépassement = 30% ; temps de réponse à 5% = 2.78s ; erreur statique = 25%.

Choisissons un modèle de référence du second ordre :

$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}.$$

Choisissons un modèle de référence du second ordre :

$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}.$$

- ▶ L'amortissement ζ est fixé à 0.8 de sorte que le dépassement soit inférieur à 2%.
- ▶ La pulsation propre ω_n est fixée à 1.87 de sorte que le temps de réponse soit de l'ordre de 2s.
(formule approximative : $t_{r5\%} \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$)
- ▶ La FTBF désirée s'écrit donc :

$$F_d(s) = \frac{1}{0.284s^2 + 0.853s + 1}.$$

Choisissons un modèle de référence du second ordre :

$$F_d(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}.$$

- ▶ L'amortissement ζ est fixé à 0.8 de sorte que le dépassement soit inférieur à 2%.
- ▶ La pulsation propre ω_n est fixée à 1.87 de sorte que le temps de réponse soit de l'ordre de 2s.
(formule approximative : $t_{r5\%} \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$)

- ▶ La FTBF désirée s'écrit donc :

$$F_d(s) = \frac{1}{0.284s^2 + 0.853s + 1}.$$

Enfin, nous pouvons en déduire le correcteur :

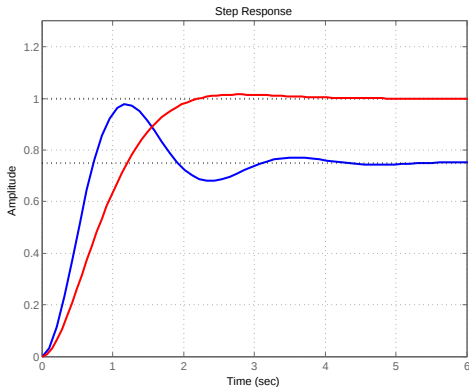
$$C(s) = \frac{s^2 + 2s + 8}{\frac{6}{\omega_n^2}s^2 + \frac{12\zeta}{\omega_n}s} = \frac{s^2 + 2s + 8}{1.707s^2 + 5.12s}$$

Simulons la réponse indicielle du système asservi par notre correcteur :

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

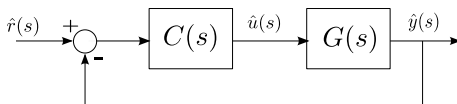
Simulons la réponse indicielle du système asservi par notre correcteur :

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$



Dépassement = 1.51% ; temps de réponse à 5% = 1.81s ; erreur statique = 0%.

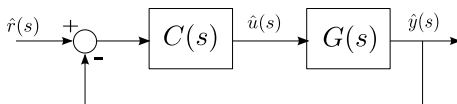
Retour sur l'erreur d'asservissement



Exprimons l'erreur d'asservissement $\varepsilon(t) = r(t) - y(t)$

$$\hat{\varepsilon}(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)} \hat{r}(s)$$

Retour sur l'erreur d'asservissement



Exprimons l'erreur d'asservissement $\varepsilon(t) = r(t) - y(t)$

$$\hat{\varepsilon}(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)} \hat{r}(s)$$

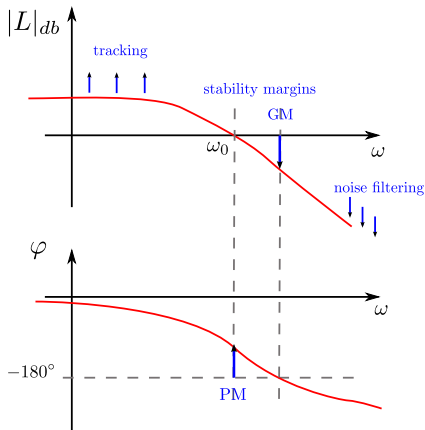
Un gain important implique un bon suivi de la consigne :
(tendance générale)

- ▶ meilleure précision et réponse plus rapide
- ▶ mais résulte en une commande u plus agressive
- ▶ mais réduit les marges de stabilité

Analyse avec le diagramme de Bode

Des indices de performances peuvent être déduits du diagramme de Bode de la FTBO :

$$L(s) = G(s)C(s)$$



Principe des méthodes fréquentielles classiques

★ principe : déterminer un correcteur $C(s)$ pour “modeler” l’allure de $L(s)$

► Allure spécifiée par un certain CDC

► Rappelons que

$$\text{bode}[L] = \text{bode}[G \times C] = \text{bode}[G] + \text{bode}[C]$$

► G étant le modèle du système physique, son diagramme est imposé

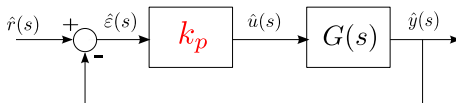
► On peut jouer sur celui de C

Action élémentaires

- ▶ La méthode de la section précédente présente plusieurs limitations
- ▶ Présentation maintenant des méthodes classiques
 - ↔ méthodes fréquentielles
 - ↔ basées sur l'analyse du diagramme de Bode
- ▶ Il existe 3 types de corrections élémentaires :
 - ▶ action proportionnelle
 - ▶ action intégrale
 - ▶ action dérivée

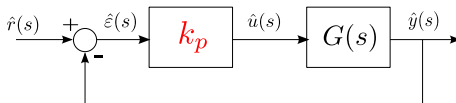
Action proportionnelle

Ce correcteur est un simple amplificateur de gain réglable



Action proportionnelle

Ce correcteur est un simple amplificateur de gain réglable

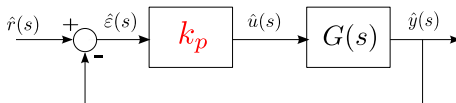


Correcteur :

$$C(s) = k_p \quad \text{avec } k_p > 0$$

Action proportionnelle

Ce correcteur est un simple amplificateur de gain réglable



Correcteur :

$$C(s) = k_p \quad \text{avec } k_p > 0$$

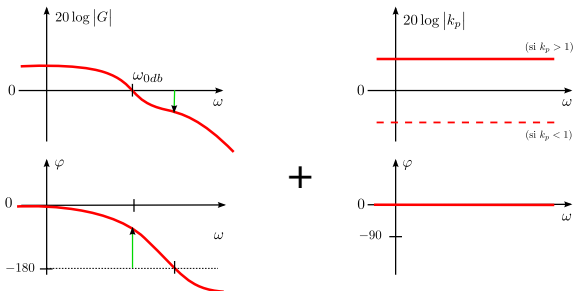
Loi de commande :

$$\hat{u}(s) = k_p \hat{\varepsilon}(s) \quad \Rightarrow \quad u(t) = k_p \varepsilon(t).$$

Action proportionnelle

Analyse de l'effet sur le diagramme de Bode en FTBO

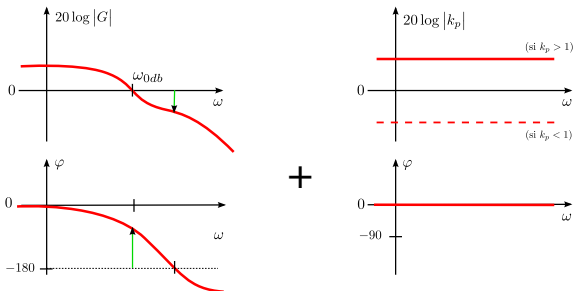
(exemple arbitraire pour le bode de G)



Action proportionnelle

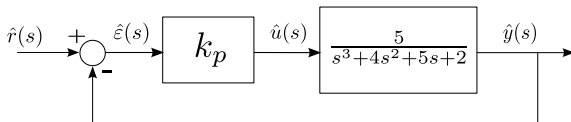
Analyse de l'effet sur le diagramme de Bode en FTBO

(exemple arbitraire pour le bode de G)



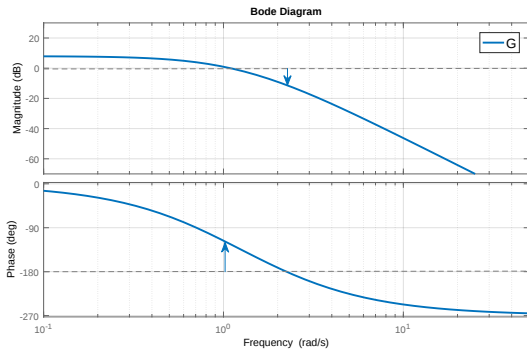
- amplification ($k_p > 1$) ou atténuation ($k_p < 1$)
- pas de déphasage
- résulte en une translation verticale de la courbe de gain de G

Illustration sur un exemple



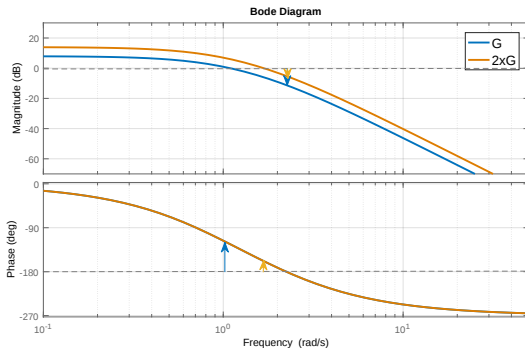
La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

$$L(s) = \frac{5k_p}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

Influence de k_p sur le diagramme de Bode de la FTBO

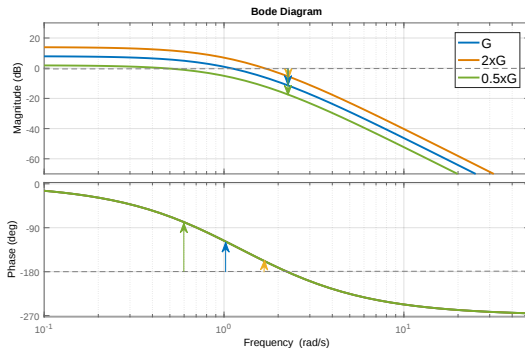
Mesure des marges de stabilité :

- (en bleu) système $G(s)$ seul, marges : $\Delta G = 11 \text{ dB}$ et $\Delta \varphi = 56 \text{ deg}$

Influence de k_p sur le diagramme de Bode de la FTBO

Mesure des marges de stabilité :

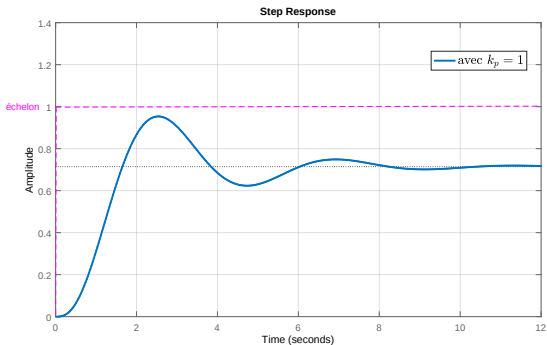
- ▶ (en bleu) système $G(s)$ seul, marges : $\Delta G = 11 \text{ dB}$ et $\Delta\varphi = 56 \text{ deg}$
- ▶ (en orange) avec $k_p = 2$, marges : $\Delta G = 5 \text{ dB}$ et $\Delta\varphi = 21 \text{ deg}$

Influence de k_p sur le diagramme de Bode de la FTBO

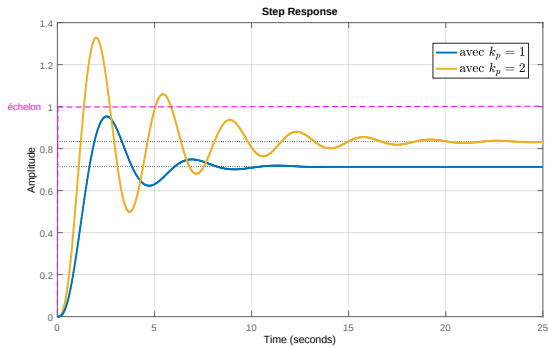
Mesure des marges de stabilité :

- ▶ (en bleu) système $G(s)$ seul, marges : $\Delta G = 11 \text{ dB}$ et $\Delta \varphi = 56 \text{ deg}$
- ▶ (en orange) avec $k_p = 2$, marges : $\Delta G = 5 \text{ dB}$ et $\Delta \varphi = 21 \text{ deg}$
- ▶ (en vert) avec $k_p = 0.5$, marges : $\Delta G = 17 \text{ dB}$ et $\Delta \varphi = 117 \text{ deg}$

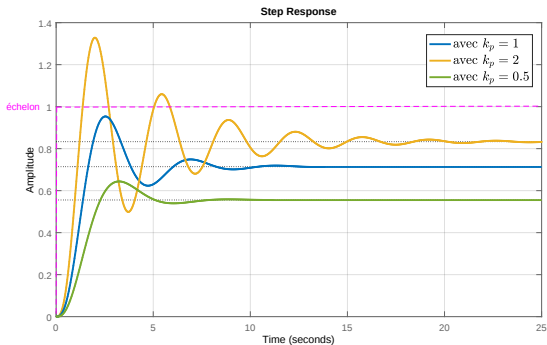
Observation sur la réponse indicielle de la FTBF



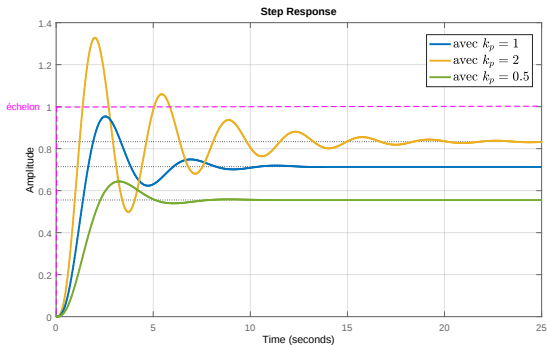
Observation sur la réponse indicielle de la FTBF



Observation sur la réponse indicielle de la FTBF



Observation sur la réponse indicielle de la FTBF



Avantages et Inconvénients du correcteur :

- ▶ Si $k_p \nearrow$, le système répond plus rapidement, l'erreur de position diminue.
- ▶ Si $k_p \searrow$, les marges de stabilité augmentent.
- ▶ Si $k_p \nearrow$, peut entraîner des oscillations et un dépassement préjudiciable.

Autre exemple : avec $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$, soit un système en boucle fermée

$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

Autre exemple : avec $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$, soit un système en boucle fermée

$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

► Analyse à partir de la forme canonique :

$$K_{statique} = \frac{k_p}{k_p + 1}, \quad \omega_n = \sqrt{1 + k_p}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{1 + k_p}}.$$

$\Rightarrow$ si $k_p \nearrow$ alors $\zeta \searrow$, oscillations $\nearrow$ et erreur statique $\varepsilon_s = \frac{1}{1+k_p} \searrow$.

Autre exemple : avec $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$, soit un système en boucle fermée

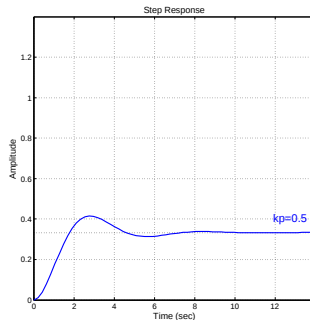
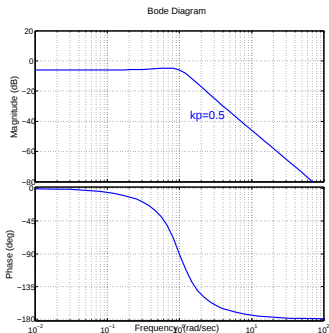
$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

► Analyse à partir de la forme canonique :

$$K_{statique} = \frac{k_p}{k_p + 1}, \quad \omega_n = \sqrt{1 + k_p}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{1 + k_p}}.$$

$\Rightarrow$ si $k_p \nearrow$ alors $\zeta \searrow$, oscillations $\nearrow$ et erreur statique $\varepsilon_s = \frac{1}{1+k_p} \searrow$.

► Analyse par Bode :



Autre exemple : avec $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$, soit un système en boucle fermée

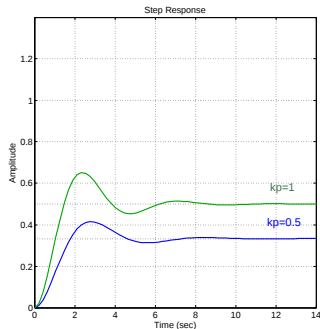
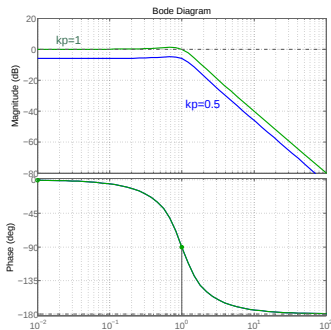
$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

► Analyse à partir de la forme canonique :

$$K_{statique} = \frac{k_p}{k_p + 1}, \quad \omega_n = \sqrt{1 + k_p}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{1 + k_p}}.$$

$\Rightarrow$ si $k_p \nearrow$ alors $\zeta \searrow$, oscillations $\nearrow$ et erreur statique $\varepsilon_s = \frac{1}{1+k_p} \searrow$.

► Analyse par Bode :



Autre exemple : avec $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$, soit un système en boucle fermée

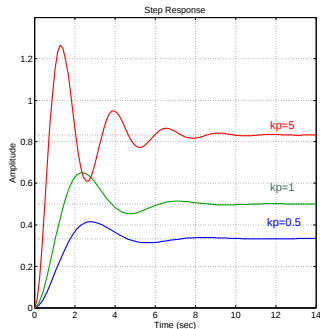
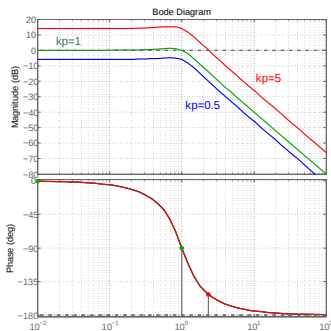
$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

► Analyse à partir de la forme canonique :

$$K_{statique} = \frac{k_p}{k_p + 1}, \quad \omega_n = \sqrt{1 + k_p}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{1 + k_p}}.$$

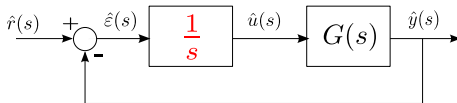
$\Rightarrow$ si $k_p \nearrow$ alors $\zeta \searrow$, oscillations $\nearrow$ et erreur statique $\varepsilon_s = \frac{1}{1+k_p} \searrow$.

► Analyse par Bode :



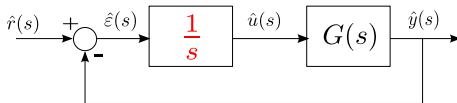
Action intégrale

Ce correcteur intègre l'erreur d'asservissement



Action intégrale

Ce correcteur intègre l'erreur d'asservissement

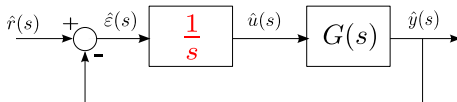


Correcteur :

$$C(s) = \frac{1}{s}$$

Action intégrale

Ce correcteur intègre l'erreur d'asservissement



Correcteur :

$$C(s) = \frac{1}{s}$$

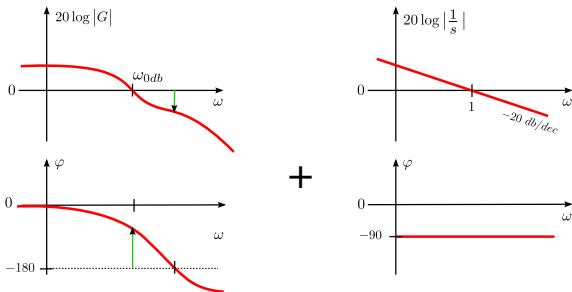
Loi de commande :

$$\hat{u}(s) = \frac{1}{s} \hat{\varepsilon}(s) \quad \Rightarrow \quad u(t) = \int_0^t \varepsilon(\theta) d\theta.$$

Action intégrale

Analyse de l'effet sur le diagramme de Bode en FTBO

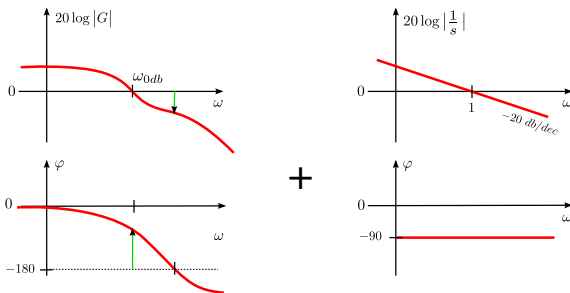
(exemple arbitraire pour le bode de G)



Action intégrale

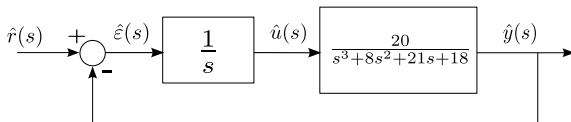
Analyse de l'effet sur le diagramme de Bode en FTBO

(exemple arbitraire pour le bode de G)



- gain décroissant, pente à -20 dB/dec , coupe 0 dB à $\omega = 1 \text{ rad/sec}$
- déphasage de 90 deg quelque soit la fréquence
- résulte en une translation vers le bas de la courbe de phase de G et une accentuation de la pente du gain

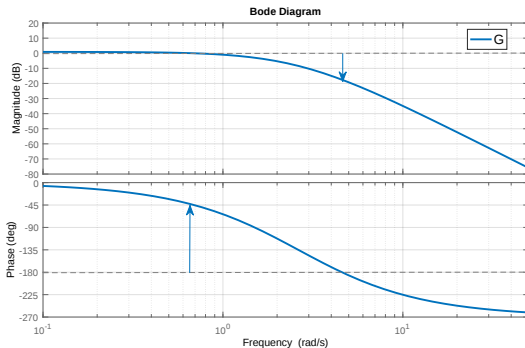
Illustration sur un exemple



La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

$$L(s) = \frac{20}{s(s^3 + 8s^2 + 21s + 18)}$$

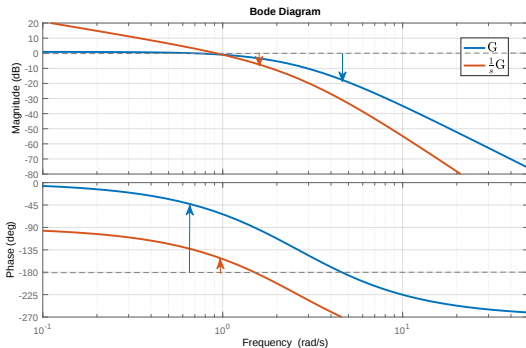
Influence de l'intégrateur sur le diagramme de Bode de la FTBO



Mesure des marges de stabilité :

- (en bleu) système $G(s)$ seul, marges : $\Delta G = 17$ dB et $\Delta \varphi = 136$ deg

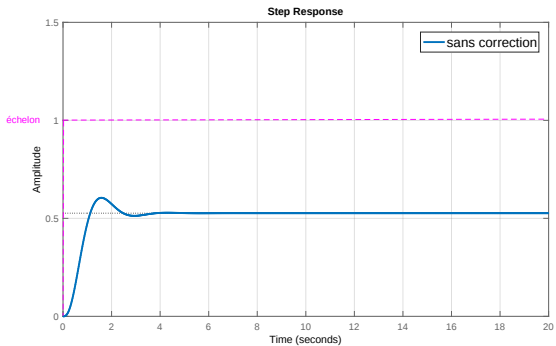
Influence de l'intégrateur sur le diagramme de Bode de la FTBO



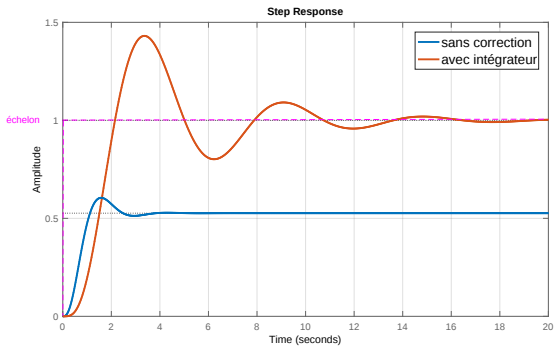
Mesure des marges de stabilité :

- ▶ (en bleu) système $G(s)$ seul, marges : $\Delta G = 17 \text{ dB}$ et $\Delta\varphi = 136 \text{ deg}$
- ▶ (en orange) avec $\frac{1}{s}$, marges : $\Delta G = 6 \text{ dB}$ et $\Delta\varphi = 31 \text{ deg}$

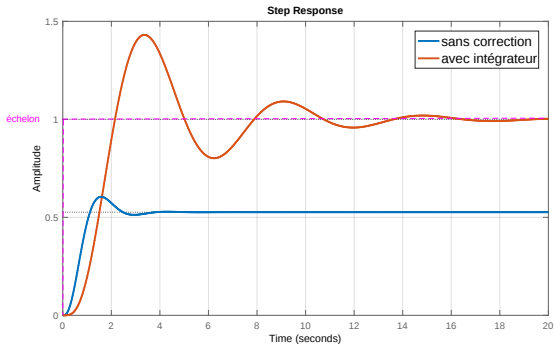
Observation sur la réponse indicielle de la FTBF



Observation sur la réponse indicielle de la FTBF



Observation sur la réponse indicielle de la FTBF



Avantages et Inconvénients du correcteur :

- ▶ Erreur statique nulle.
- ▶ Diminution des marges de stabilité, augmentation des oscillations.

Autre exemple : avec $G(s) = \frac{0.8}{s^2 + s + 1}$, soit un système en boucle fermée

$$F(s) = \frac{0.8}{s^3 + s^2 + s + 0.8}.$$

Autre exemple : avec $G(s) = \frac{0.8}{s^2 + s + 1}$, soit un système en boucle fermée

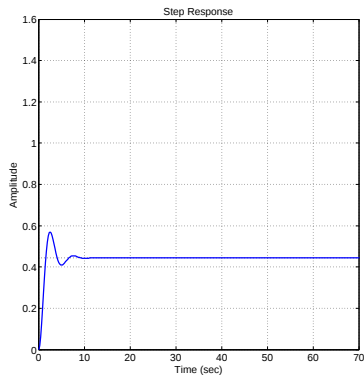
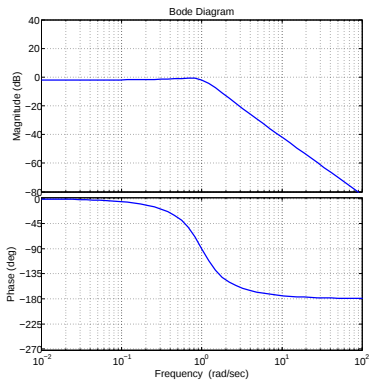
$$F(s) = \frac{0.8}{s^3 + s^2 + s + 0.8}.$$

Courbe plus proche du point critique : marges dégradées, oscillations et dépassement
Pas d'erreur statique

Autre exemple : avec $G(s) = \frac{0.8}{s^2 + s + 1}$, soit un système en boucle fermée

$$F(s) = \frac{0.8}{s^3 + s^2 + s + 0.8}.$$

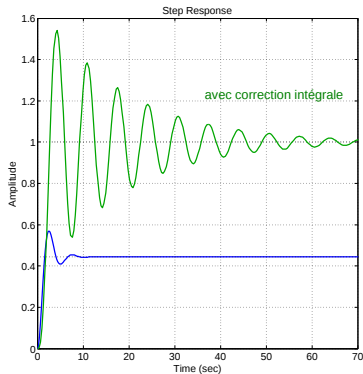
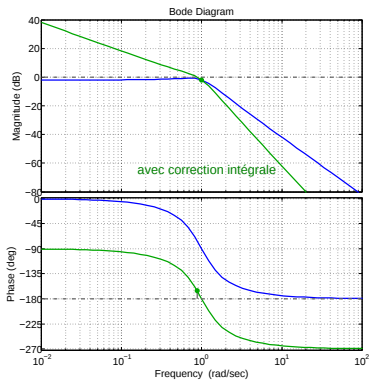
Courbe plus proche du point critique : marges dégradées, oscillations et dépassement
Pas d'erreur statique



Autre exemple : avec $G(s) = \frac{0.8}{s^2 + s + 1}$, soit un système en boucle fermée

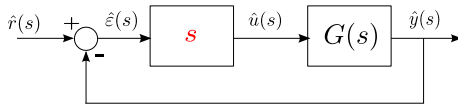
$$F(s) = \frac{0.8}{s^3 + s^2 + s + 0.8}.$$

Courbe plus proche du point critique : marges dégradées, oscillations et dépassement
Pas d'erreur statique



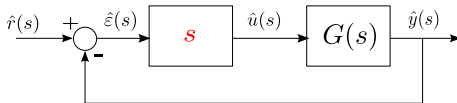
Action dérivée

Ce correcteur dérive l'erreur d'asservissement



Action dérivée

Ce correcteur dérive l'erreur d'asservissement

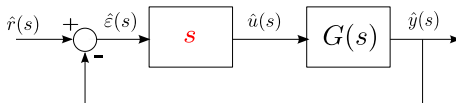


Correcteur :

$$C(s) = s$$

Action dérivée

Ce correcteur dérive l'erreur d'asservissement



Correcteur :

$$C(s) = s$$

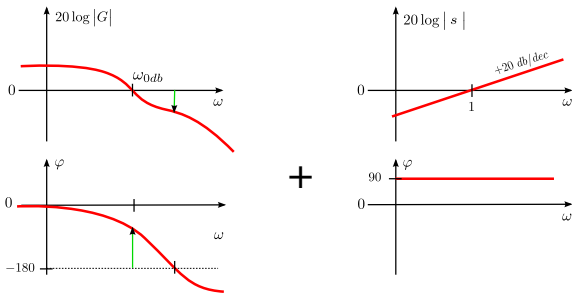
Loi de commande :

$$\hat{u}(s) = s \hat{\varepsilon}(s) \quad \Rightarrow \quad u(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t).$$

Action dérivée

Analyse de l'effet sur le diagramme de Bode en FTBO

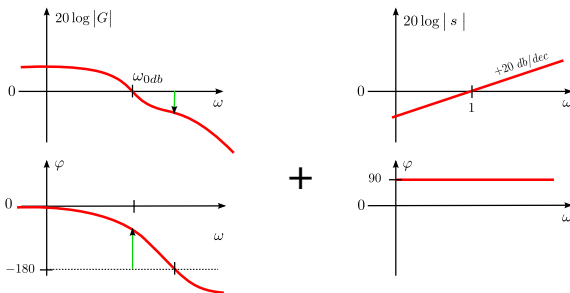
(exemple arbitraire pour le bode de G)



Action dérivée

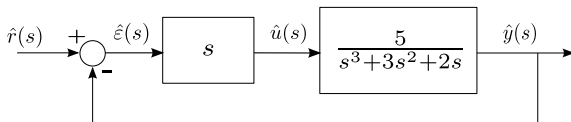
Analyse de l'effet sur le diagramme de Bode en FTBO

(exemple arbitraire pour le bode de G)



- gain croissant, pente à $+20 \text{ dB/dec}$, coupe 0 dB à $\omega = 1 \text{ rad/sec}$
- ajout de phase de 90 deg quelque soit la fréquence
- résulte en une translation vers le haut de la courbe de phase de G et un redressement de la pente du gain

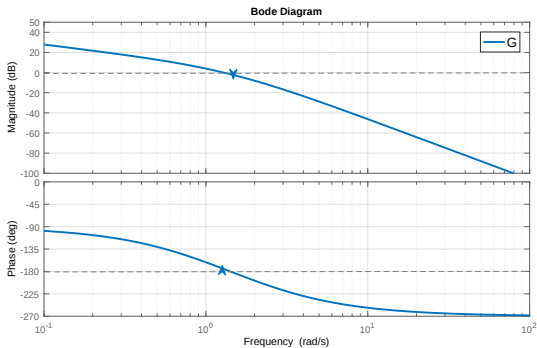
Illustration sur un exemple



La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

$$L(s) = \frac{5s}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

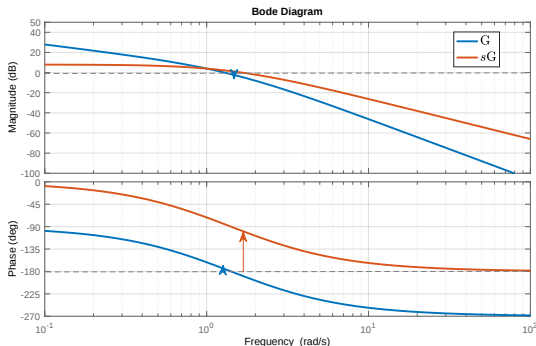
Influence du dérivateur sur le diagramme de Bode de la FTBO



Mesure des marges de stabilité :

- (en bleu) système $G(s)$ seul, marges : $\Delta G = 1.5 \text{ dB}$ et $\Delta\varphi = 5 \text{ deg}$

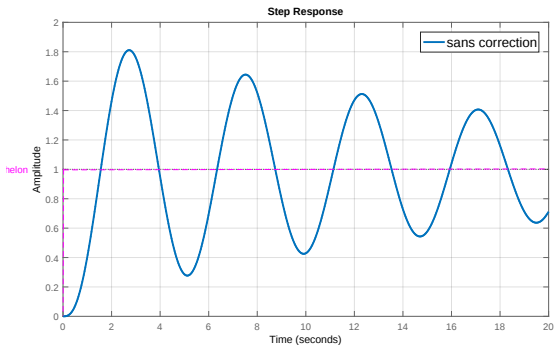
Influence du dérivateur sur le diagramme de Bode de la FTBO



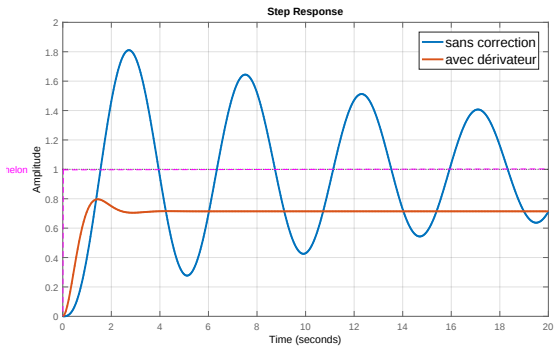
Mesure des marges de stabilité :

- ▶ (en bleu) système $G(s)$ seul, marges : $\Delta G = 1.5 \text{ dB}$ et $\Delta\varphi = 5 \text{ deg}$
- ▶ (en orange) avec s , marges : $\Delta G = +\infty \text{ dB}$ et $\Delta\varphi = 81 \text{ deg}$

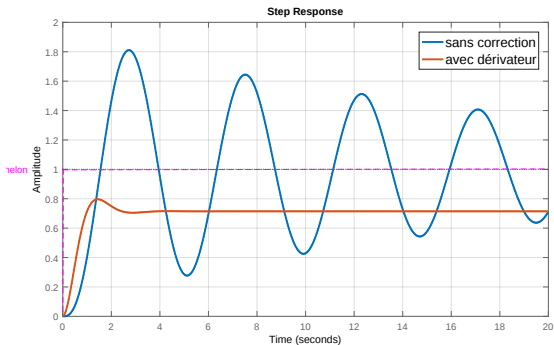
Observation sur la réponse indicielle de la FTBF



Observation sur la réponse indicielle de la FTBF



Observation sur la réponse indicielle de la FTBF



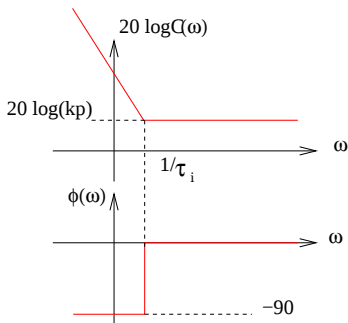
Avantages et Inconvénients du correcteur :

- ▶ Augmentation des marges de stabilité, réduction des oscillations/dépassement
- ▶ Dégradation de la précision.

Correcteur Proportionnel-Intégral (PI)

Ce correcteur a pour objectif de tirer profit des avantages de l'effet de I sans ses inconvénients :

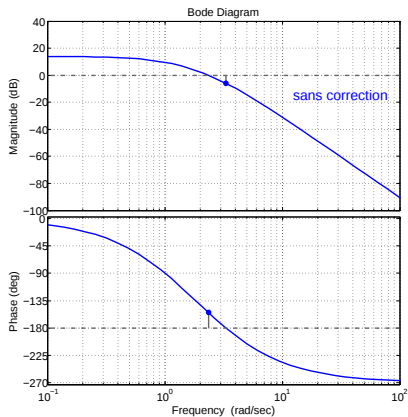
$$C(s) = k_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s}.$$



Idée du correcteur :

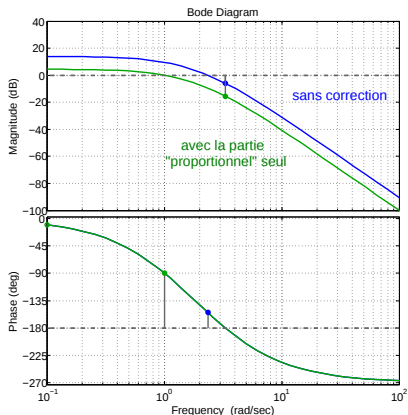
- ▶ Utiliser l'avantage de l'intégrateur en basses fréquences : précision infinie,
- ▶ L'action intégrale ne doit plus avoir d'effet dans les fréquences élevées, en particulier dans la région du point critique,

Réglage intuitif du correcteur :



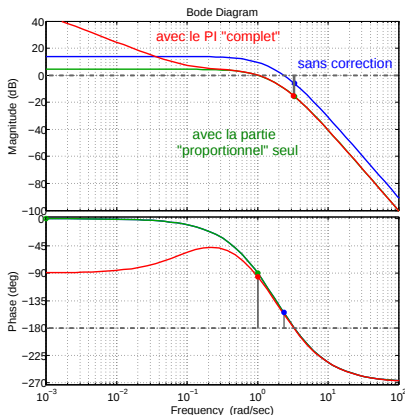
Réglage intuitif du correcteur :

- ▶ Ajuster le gain proportionnel en fonction de l'objectif et des caractéristiques du système avant correction :
- ▶ le diminuer pour augmenter les marges de stabilité,
- ▶ l'augmenter pour améliorer la rapidité du système.



Réglage intuitif du correcteur :

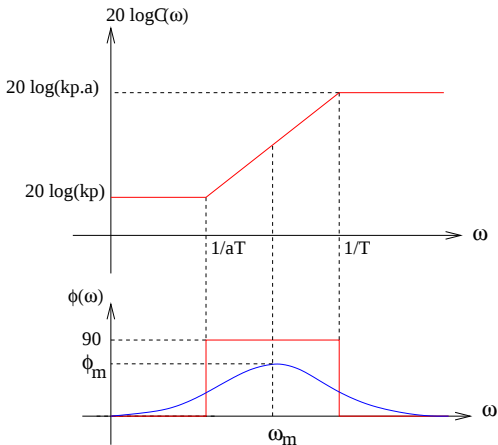
- ▶ Ajuster le gain proportionnel en fonction de l'objectif et des caractéristiques du système avant correction :
 - ▶ le diminuer pour augmenter les marges de stabilité,
 - ▶ l'augmenter pour améliorer la rapidité du système.
- ▶ Ensuite, la partie I est ajoutée en réglant le zero $1/\tau_i$ de façon à ce que la correction ne se fasse qu'en basses fréquences.



Correcteur à Avance de Phase

Ce correcteur a pour objectif d'apporter de la phase autour du point critique afin d'augmenter les marges de stabilité

$$C(s) = k_p \frac{1 + aTs}{1 + Ts}, \quad a > 1.$$



Le principe repose sur le réglage de a et T tels que le correcteur apporte de la phase (plage $[\frac{1}{aT}, \frac{1}{T})$) autour du point critique.

Le principe repose sur le réglage de a et T tels que le correcteur apporte de la phase (plage $[\frac{1}{aT}, \frac{1}{T}]$) autour du point critique.

Méthode de réglage du correcteur :

- ▶ Régler le gain k_p pour ajuster la précision ou la rapidité ou les marges.
- ▶ Mesurer la marge de phase (après la correction prop. k_p) et en déduire la quantité de phase nécessaire

$$\phi_m = \Delta\phi_{\text{désirée}} - \Delta\phi.$$

- ▶ A partir de ϕ_m , a peut être calculé

$$a = \frac{1 + \sin\phi_m}{1 - \sin\phi_m}$$

- ▶ Enfin, nous avons la relation

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}},$$

il s'agit alors de calculer T tel que ω_m coïncide avec ω_{0db} (après correction prop.) :

$$T = \frac{1}{\omega_{0db}\sqrt{a}}.$$

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+\omega_{0db}^2)} = 1 \Rightarrow \omega_{0db} = 9.95 \text{ rad/s}$$

$$M\phi = \pi - 2\arctan\omega_{0db} = 11^\circ$$

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+\omega_{0db}^2)} = 1 \Rightarrow \omega_{0db} = 9.95 \text{ rad/s}$$

$$M\phi = \pi - 2\arctan \omega_{0db} = 11^\circ$$

- La marge est insuffisante, il faut donc remonter la phase de $\phi_m = 34^\circ$ à la pulsation ω_{0db}

$$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} = \frac{1 + \sin 34^\circ}{1 - \sin 34^\circ} = 3.54$$

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+\omega_{0db}^2)} = 1 \Rightarrow \omega_{0db} = 9.95 \text{ rad/s}$$

$$M\phi = \pi - 2\arctan \omega_{0db} = 11^\circ$$

- La marge est insuffisante, il faut donc remonter la phase de $\phi_m = 34^\circ$ à la pulsation ω_{0db}

$$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} = \frac{1 + \sin 34^\circ}{1 - \sin 34^\circ} = 3.54$$

- Puis, on règle T afin d'ajouter la quantité ϕ_m au bon endroit

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{0db} \Rightarrow T = 0.053$$

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+\omega_{0db}^2)} = 1 \Rightarrow \omega_{0db} = 9.95 \text{ rad/s}$$

$$M\phi = \pi - 2\arctan \omega_{0db} = 11^\circ$$

- La marge est insuffisante, il faut donc remonter la phase de $\phi_m = 34^\circ$ à la pulsation ω_{0db}

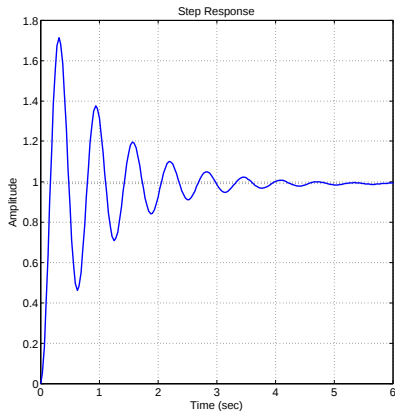
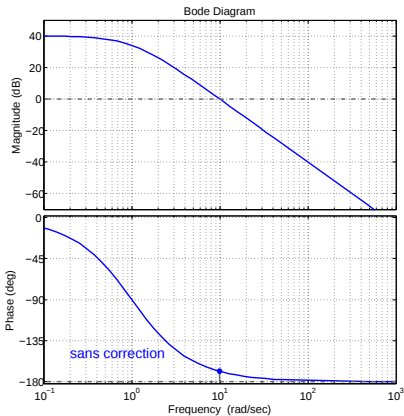
$$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} = \frac{1 + \sin 34^\circ}{1 - \sin 34^\circ} = 3.54$$

- Puis, on règle T afin d'ajouter la quantité ϕ_m au bon endroit

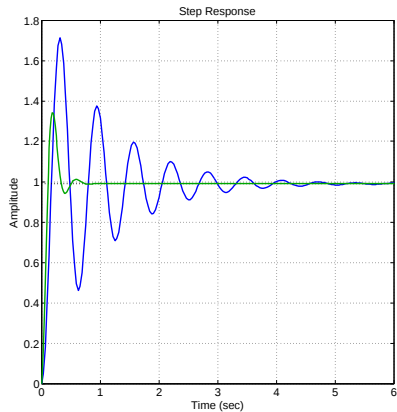
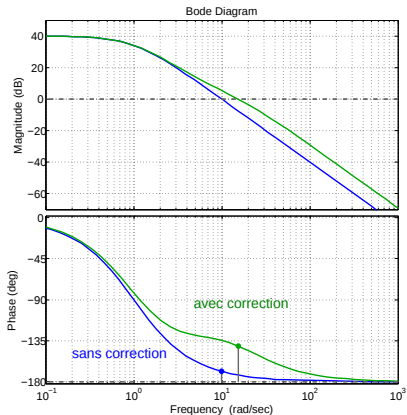
$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{0db} \Rightarrow T = 0.053$$

- Souvent, on choisit $\phi_m = 1.2\phi_{\text{nécessaire}}$ pour compenser le décalage de ω_{0db} après correction.

Schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF



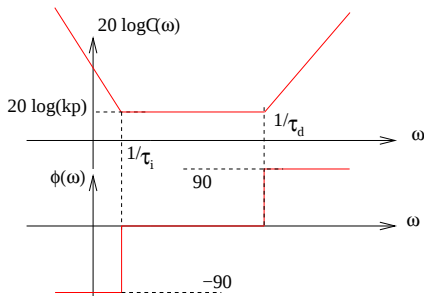
Schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF



Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Ce correcteur PID est une combinaison des actions PI et PD

$$C(s) = k_p \left(\frac{1 + T_i s}{T_i s} \right) (1 + T_d s).$$



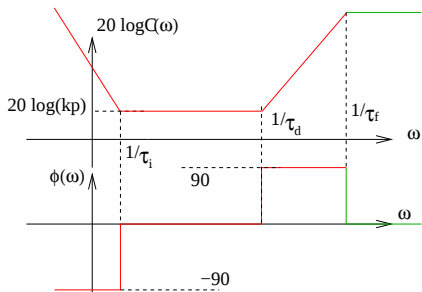
Idée du correcteur :

- ▶ Ajouter du gain en bf (précision ↗),
- ▶ Ajouter de la phase près du point critique ($M\phi$ ↗).

Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Ce correcteur PID est une combinaison des actions PI et PD + un filtre

$$C(s) = k_p \left(\frac{1 + T_i s}{T_i s} \right) (1 + T_d s) \frac{1}{(1 + T_f s)}.$$



Idée du correcteur :

- ▶ Ajouter du gain en bf (précision ↗),
- ▶ Ajouter de la phase près du point critique ($M\phi$ ↗).
- ▶ Le correcteur est propre,
- ▶ Atténuer l'effet du bruit (moins de gain en hf).

Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Méthode de réglage du correcteur :

- ▶ Etudier le système en BO et ses caractéristiques
(marges, précision, rapidité...).
- ▶ Régler le gain proportionnel k_p afin d'obtenir un premier asservissement satisfaisant
(en termes de marges, dépassement, oscillations, rapidité).
- ▶ Régler la constante de temps de l'action intégrale de sorte qu'elle n'agisse qu'en bf
(pour ne pas pénaliser les marges).
- ▶ Régler la constante de temps de l'action dérivée de sorte qu'elle n'agisse qu'autour du point critique
(pour ne pas pénaliser la précision).

Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Méthode de réglage du correcteur :

- ▶ Etudier le système en BO et ses caractéristiques
(marges, précision, rapidité...).
- ▶ Régler le gain proportionnel k_p afin d'obtenir un premier asservissement satisfaisant
(en termes de marges, dépassement, oscillations, rapidité).
- ▶ Régler la constante de temps de l'action intégrale de sorte qu'elle n'agisse qu'en bf
(pour ne pas pénaliser les marges).
- ▶ Régler la constante de temps de l'action dérivée de sorte qu'elle n'agisse qu'autour du point critique
(pour ne pas pénaliser la précision).
- ▶ Régler la constante de temps du filtre de sorte qu'il n'enlève pas de phase près du point critique,
- ▶ L'ordre du filtre peut être augmenté afin de mieux atténuer le bruit en hf.

Exemple : Soit le système $G(s) = \frac{5}{s^2 + s + 1}$.

- ▶ Une étude de ce système nous montre qu'il est stable en BF avec une erreur de position $\epsilon_s = 16.7\%$, un dépassement de 51% et une marge de phase $M_\phi = 27.8^\circ$ à $\omega_{0db} = 2.33rad/s$.
- ▶ On choisit un premier correcteur proportionnel afin de baisser l'erreur et accélérer le système : on prend $k_p = 2$ pour avoir une erreur de 9%. Il en résulte une nouvelle marge de phase $M_\phi = 18.9^\circ$ à $\omega_{0db} = 3.23rad/s$ et un dépassement de 61.9%.
- ▶ On place la constante de temps du I avant le point critique $T_i = 3 \gg 1/3.23$. Le correcteur devient $C(s) = 2 \frac{1 + 3s}{3s}$.
- ▶ L'erreur en régime permanent est maintenant nul mais la nouvelle marge de phase est de $M_\phi = 12.9^\circ$ à $\omega_{0db} = 3.24rad/s$. Il s'agit ensuite de placer la constante de temps de la partie D avant le point critique de façon à laisser le temps au correcteur de remonter la phase jusqu'à obtenir une marge satisfaisante : $T_i \gg T_d = 0.4 > 1/3.24$. On obtient $M_\phi = 70.4^\circ$.
- ▶ Pour finir, afin de synthétiser un correcteur réalisable et pour mieux filtrer le bruit, on ajoute un filtre avec une constante de temps relativement faible $T_f = 0.1 < 1/3.24$. Il en résulte $M_\phi = 45.9^\circ$, ce qui reste satisfaisant.

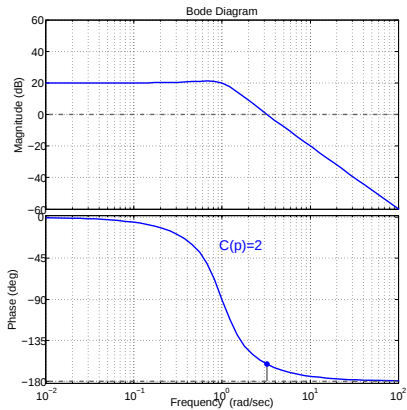
Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ($C(s)G(s)$)

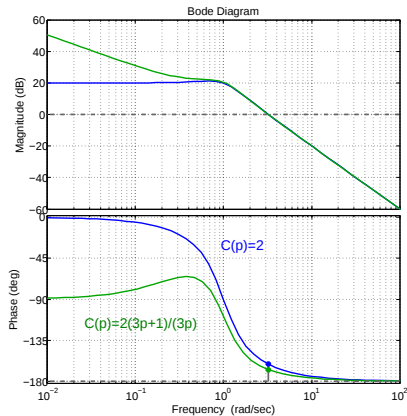
Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ($C(s)G(s)$)

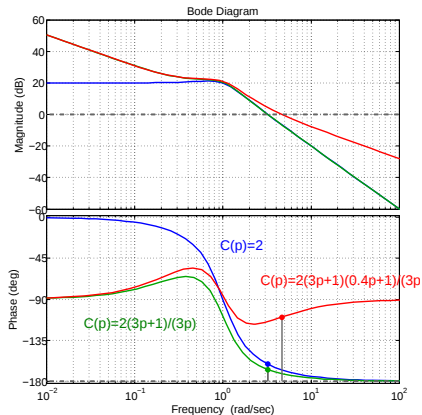
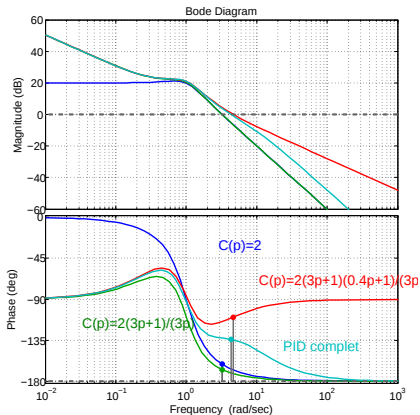
Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ($C(s)G(s)$)

Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ($C(s)G(s)$)

Réponses temporelles de la BF à un échelon unité

