

MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE - TRAITEMENT NUMÉRIQUE

Yassine Ariba

Dpt GEI - Icam, Toulouse.



version 2.3

Informations pratiques

Contact

Tel : 05 34 50 50 38

Email : yassine.ariba@icam.fr

Forum : Moodle. Favorise le partage, l'auto-formation, la capitalisation d'informations...

Contact

Tel : 05 34 50 50 38

Email : yassine.ariba@icam.fr

Forum : Moodle. Favorise le partage, l'auto-formation, la capitalisation d'informations...

Organisation du cours

- Pré-requis : Mathématiques depuis le CP, Mathématiques de l'Ingénieur.
- 8h en amphi : cours. Présentation sur transparents.
- 14h de TD : exercices.
- $2 \times 4h$ de TP.
 - initiation à Scilab
 - grille d'évaluation (CR non-noté, pas de TP bilan).
- 1 examen final (1h30-2h).

Contact

Tel : 05 34 50 50 38

Email : yassine.ariba@icam.fr

Forum : Moodle. Favorise le partage, l'auto-formation, la capitalisation d'informations...

Organisation du cours

- Pré-requis : Mathématiques depuis le CP, Mathématiques de l'Ingénieur.
- 8h en amphi : cours. Présentation sur transparents.
- 14h de TD : exercices.
- $2 \times 4h$ de TP.
 - initiation à Scilab
 - grille d'évaluation (CR non-noté, pas de TP bilan).
- 1 examen final (1h30-2h).

Sur Moodle

- Documents : transparent cours + exercices + sujets TP.
- Forum.

Pourquoi ce cours ?

Pourquoi ce cours ?

- pour compléter vos bases en mathématiques,
- pour voir des notions qui vous seront indispensables dans de futurs cours,
- pour apprendre à être méthodique et prendre du recul par rapport à un problème,
- c'est aussi une introduction à l'analyse numérique et l'algorithmie.

Sommaire

① Suites et séries

- Suites numériques
- Applications
- Séries numériques

② Série de Fourier

- Rappels
- Définitions
- Représentation spectrale
- Exemples
- Transformée de Fourier
- Applications

③ Transformée de Laplace

- Définitions
- Fonctions types
- Applications

Sommaire

1 Suites et séries

- Suites numériques
- Applications
- Séries numériques

2 Série de Fourier

- Rappels
- Définitions
- Représentation spectrale
- Exemples
- Transformée de Fourier
- Applications

3 Transformée de Laplace

- Définitions
- Fonctions types
- Applications

Suites numériques

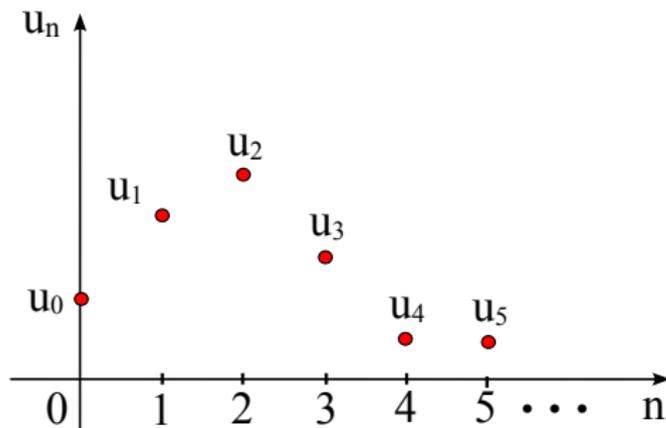
Une suite réelle est une succession d'éléments de \mathbb{R} : $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$.

Suites numériques

Une suite réelle est une succession d'éléments de \mathbb{R} : $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$.

Une suite numérique réelle, notée (u_n) , est une application

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow u_n \end{aligned}$$



Une suite numérique réelle peut être définie de 2 façons :

- définition explicite : $u_n = f(n)$,
- définition par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, le premier terme u_0 étant donné

Une suite numérique réelle peut être définie de 2 façons :

- définition explicite : $u_n = f(n)$,
- définition par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, le premier terme u_0 étant donné

Exemples :

Suite de nombres rationnels

$$u_n = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad \Rightarrow \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$$

Suite de nombres entiers (les carrés)

$$u_n = n^2 \quad \Rightarrow \quad 0, 1, 4, 9 \dots$$

Suite des nombres impairs

$$u_n = 2n + 1 \quad \Rightarrow \quad 1, 3, 5, 9 \dots$$

Suite récurrente

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.5u_n - 2 \\ u_0 = 12 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 16, 6, 1, -2.5 \dots$$

Majoration, minoration

- La suite (u_n) est majorée par M si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est minorée par m si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
- Une suite à la fois majorée et minorée est bornée.

Sens de variation, si pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $u_{n+1} \geq u_n$ est croissante.
- $u_{n+1} \leq u_n$ est décroissante.
- Une suite à termes strictement positifs est croissante si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Convergence d'une suite numériques

Une suite (u_n) est convergente si elle admet une limite finie quand $n \rightarrow \infty$.

Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

Convergence d'une suite numériques

Une suite (u_n) est convergente si elle admet une limite finie quand $n \rightarrow \infty$.

Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

- Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.
- Toute suite croissante majorée (décroissante minorée) est convergente.
- Soient (u_n) une suite croissante et (v_n) une suite décroissante. (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

$$\begin{cases} u_n < v_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0 \end{cases}$$

Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite.

- Soient (v_n) et (w_n) des suites convergentes admettant la même limite l .

$$w_n \leq u_n \leq v_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$$

Suites arithmétiques

Une suite arithmétique de raison r est une suite vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + r$$

On montre que $u_n = u_0 + nr$ (terme général).

- Si $r = 0$, la suite est constante et égale à u_0 .
- Si $r > 0$, la suite est croissante et divergente vers $+\infty$.
- Si $r < 0$, la suite est décroissante et divergente vers $-\infty$.

Exemple

1, 3, 5, 7 est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Suites géométriques

Une suite géométrique de raison q est une suite vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+1} = qu_n$$

On montre que $u_n = u_0q^n$ (terme général).

- Si $q = 1$, la suite est constante et égale à u_0 .
- Si $q > 1$, la suite est croissante et divergente vers $+\infty$.
- Si $|q| < 1$, la suite converge vers 0.
- Si $q = -1$, la suite n'admet pas de limite et alterne entre u_0 et $-u_0$.
- Si $q < -1$, la suite diverge et alterne valeurs négatives valeurs positives.

Exemple

2, 6, 18, 54 est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.

Applications

La suite de Fibonacci

Suite introduite par Leonardo Fibonacci en 1202 pour décrire la croissance d'une population de lapins sous des hypothèses très simplifiées.

- un couple de lapins adultes procréé un nouveau couple de lapins chaque mois.
- un couple ne peut procréer qu'à partir du troisième mois de son existence.

Applications

La suite de Fibonacci

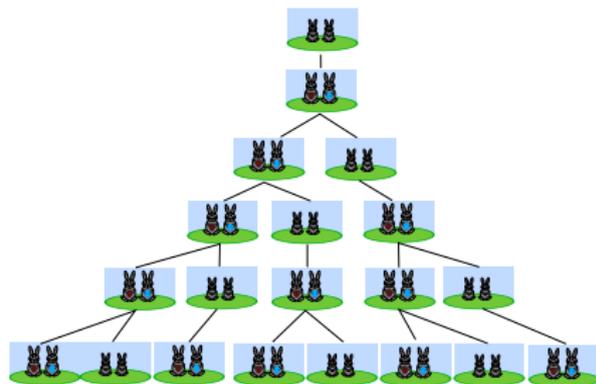
Suite introduite par Leonardo Fibonacci en 1202 pour décrire la croissance d'une population de lapins sous des hypothèses très simplifiées.

- un couple de lapins adultes procréé un nouveau couple de lapins chaque mois.
- un couple ne peut procréer qu'à partir du troisième mois de son existence.

Dans cette suite, chaque terme est en fait la somme des deux qui le précèdent

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.



Remplissage d'un récipient

Soit un récipient vide de contenance 2 litres.

On verse dans celui-ci un litre d'eau, puis un demi-litre, puis un quart, puis un huitième,...

Est-ce que le récipient va déborder ?

Remplissage d'un récipient

Soit un récipient vide de contenance 2 litres.

On verse dans celui-ci un litre d'eau, puis un demi-litre, puis un quart, puis un huitième,...

Est-ce que le récipient va déborder ?

$$\text{On a : } u_0 = 1; \quad u_1 = \frac{1}{2}; \quad u_2 = \frac{1}{4}; \quad u_3 = \frac{1}{8}$$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

$$\text{Somme des } n \text{ premiers termes : } S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Le récipient ne débordera pas.

Évolution d'une dette

A chaque mois n , on définit :

y_n : la dette r : l'intérêt u_n : remboursement mensuel

Évolution d'une dette

A chaque mois n , on définit :

y_n : la dette r : l'intérêt u_n : remboursement mensuel

Modèle de l'évolution de la dette :

$$y_{n+1} = y_n + r y_n - u_n$$

Évolution d'une dette

A chaque mois n , on définit :

y_n : la dette r : l'intérêt u_n : remboursement mensuel

Modèle de l'évolution de la dette :

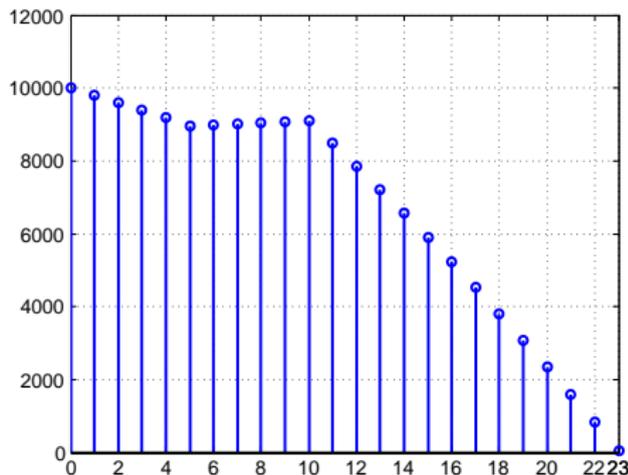
$$y_{n+1} = y_n + r y_n - u_n$$

Evolution de la dette :

$$r = 0.02$$

$$y_0 = 10000 \quad (\text{emprunt initial})$$

$$u_n = \begin{cases} 400, & n = 1, \dots, 5 \\ 150, & n = 6, \dots, 10 \\ 800, & n = 11, \dots, 23 \end{cases}$$



Dynamique des populations (modélisation basique)

Population = ensemble d'individus d'une même espèce vivant dans un même territoire et
pouvant se reproduire entre eux.

$$N_{t+1} - N_t = \text{naissances} - \text{morts} + \text{migrations}$$

Dynamique des populations (modélisation basique)

Population = ensemble d'individus d'une même espèce vivant dans un même territoire et
pouvant se reproduire entre eux.

$$N_{t+1} - N_t = \text{naissances} - \text{morts} + \text{migrations}$$

Modèle exponentiel

- population seule (isolée),
- pas de migrations,
- naissances et morts proportionnelles à la population courante.

Dynamique des populations (modélisation basique)

Population = ensemble d'individus d'une même espèce vivant dans un même territoire et
pouvant se reproduire entre eux.

$$N_{t+1} - N_t = \text{naissances} - \text{morts} + \text{migrations}$$

Modèle exponentiel

- population seule (isolée),
- pas de migrations,
- naissances et morts proportionnelles à la population courante.

$$N_{t+1} = N_t + r N_t$$

r : taux intrinsèque d'accroissement.

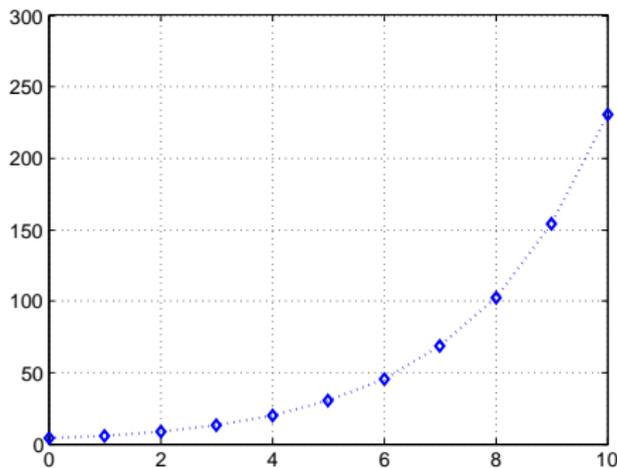
Prédictions (dépend du taux intrinsèque d'accroissement)

- Si $(1 + r) > 1$, croissance exponentielle de la population (div).
- Si $1 > (1 + r) > 0$, extinction exponentielle de la population ($cv \rightarrow 0$).
- Si $r = 0$, équilibre démographique.

Prédictions (dépend du taux intrinsèque d'accroissement)

- Si $(1 + r) > 1$, croissance exponentielle de la population (div).
- Si $1 > (1 + r) > 0$, extinction exponentielle de la population ($cv \rightarrow 0$).
- Si $r = 0$, équilibre démographique.

Considérons une population avec un nombre d'individus initial de $N_0 = 4$ et un taux d'accroissement de $r = 0.5$



Critique du modèle

- La population ne peut pas croître indéfiniment.
- Le milieu possède une capacité maximale (limitation des ressources, surpopulation...)

Critique du modèle

- La population ne peut pas croître indéfiniment.
- Le milieu possède une capacité maximale (limitation des ressources, surpopulation...)

Modèle logistique

- population seule (isolée),
- pas de migrations,
- prise en compte de la limitation des ressources.

Critique du modèle

- La population ne peut pas croître indéfiniment.
- Le milieu possède une capacité maximale (limitation des ressources, surpopulation...)

Modèle logistique

- population seule (isolée),
- pas de migrations,
- prise en compte de la limitation des ressources.

$$N_{t+1} = N_t + r N_t \left(1 - \frac{N_t}{k}\right)$$

r : taux intrinsèque d'accroissement.

k : capacité de charge du milieu.

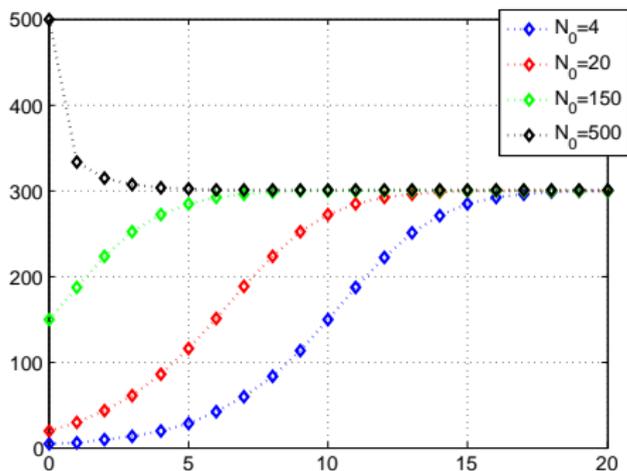
Prédictions (avec $r > 0$)

- Si $N_t < k$, la population croît.
- Si $N_t > k$, la population décroît, la population est supérieure à la capacité du milieu.
- Si $N_t = k$, stabilisation de la population.

Prédictions (avec $r > 0$)

- Si $N_t < k$, la population croît.
- Si $N_t > k$, la population décroît, la population est supérieure à la capacité du milieu.
- Si $N_t = k$, stabilisation de la population.

Considérons une population avec un taux d'accroissement de $r = 0.5$ vivant dans un milieu de capacité maximale $k = 300$ et pour différentes conditions initiales (N_0).



Point fixe d'une fonction

Théorème du point fixe

Soit une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$, telle que

- les valeurs de f sont dans $[a, b]$, c'est-à-dire $f([a, b]) \subseteq [a, b]$
- et $|f'(x)| < 1$,

alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α .

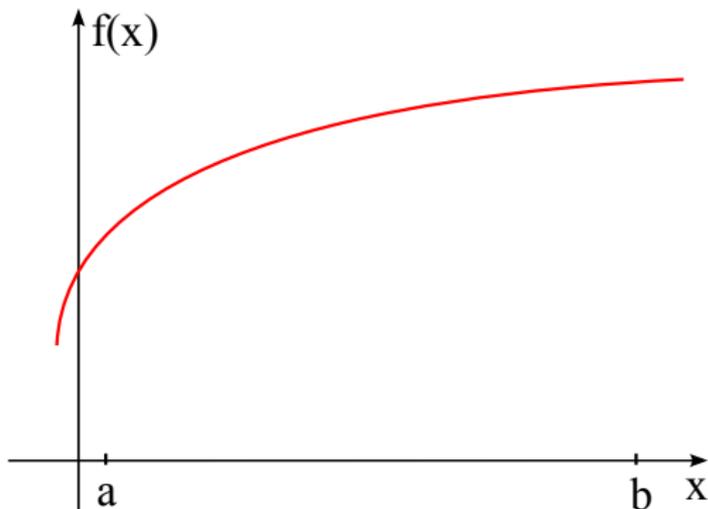
Point fixe d'une fonction

Théorème du point fixe

Soit une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$, telle que

- les valeurs de f sont dans $[a, b]$, c'est-à-dire $f([a, b]) \subseteq [a, b]$
- et $|f'(x)| < 1$,

alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α .



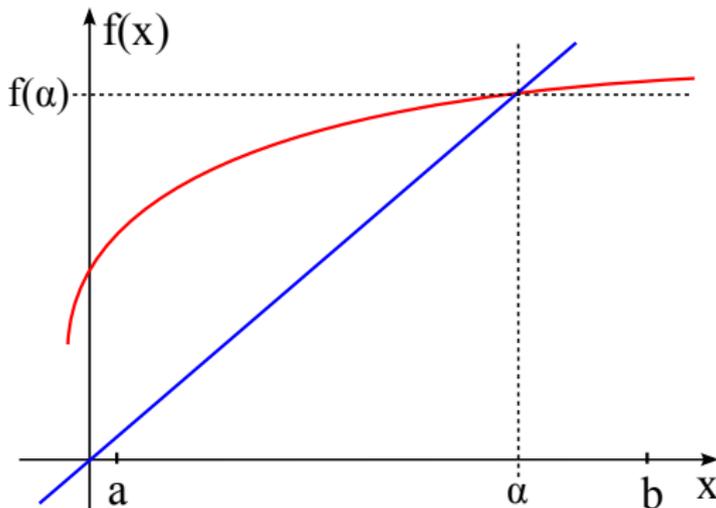
Point fixe d'une fonction

Théorème du point fixe

Soit une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$, telle que

- les valeurs de f sont dans $[a, b]$, c'est-à-dire $f([a, b]) \subseteq [a, b]$
- et $|f'(x)| < 1$,

alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α .



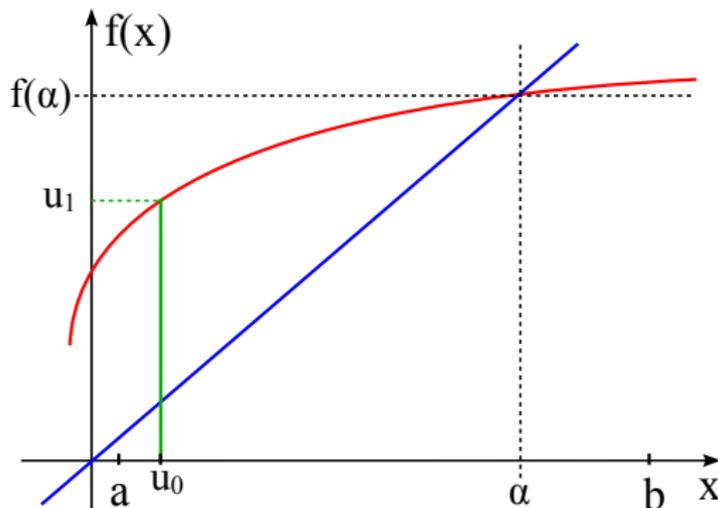
Point fixe d'une fonction

Théorème du point fixe

Soit une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$, telle que

- les valeurs de f sont dans $[a, b]$, c'est-à-dire $f([a, b]) \subseteq [a, b]$
- et $|f'(x)| < 1$,

alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α .



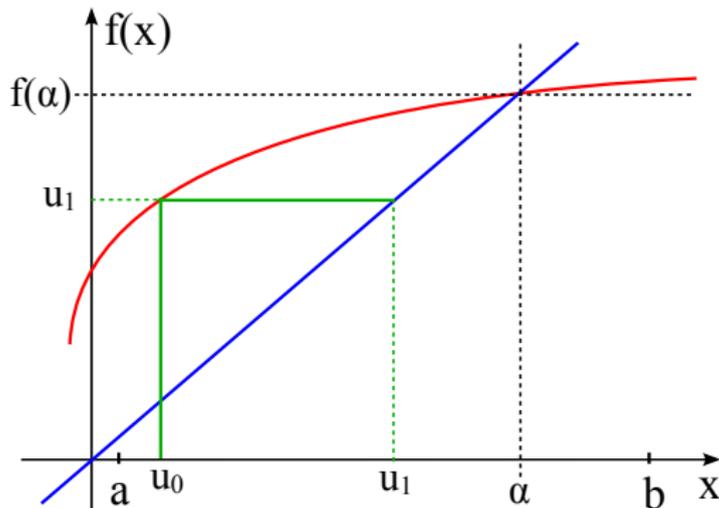
Point fixe d'une fonction

Théorème du point fixe

Soit une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$, telle que

- les valeurs de f sont dans $[a, b]$, c'est-à-dire $f([a, b]) \subseteq [a, b]$
- et $|f'(x)| < 1$,

alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α .



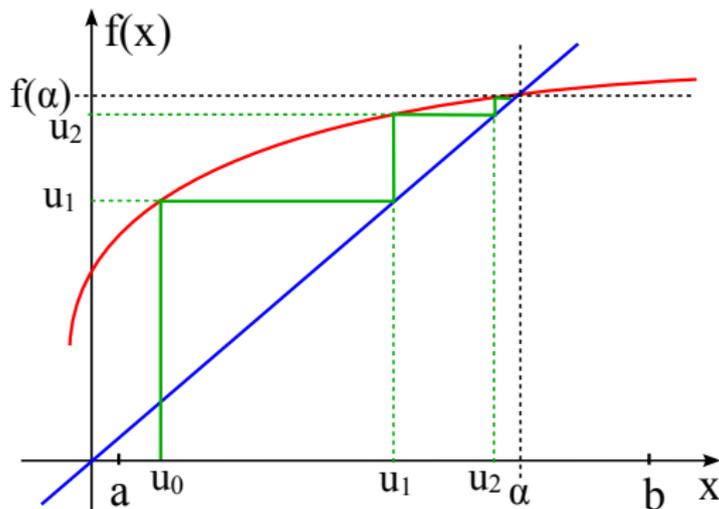
Point fixe d'une fonction

Théorème du point fixe

Soit une fonction f continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$, telle que

- les valeurs de f sont dans $[a, b]$, c'est-à-dire $f([a, b]) \subseteq [a, b]$
- et $|f'(x)| < 1$,

alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α .



Méthode de Newton (cas particulier du théorème du point fixe)

On cherche à résoudre une équation de la forme

$$f(x) = 0$$

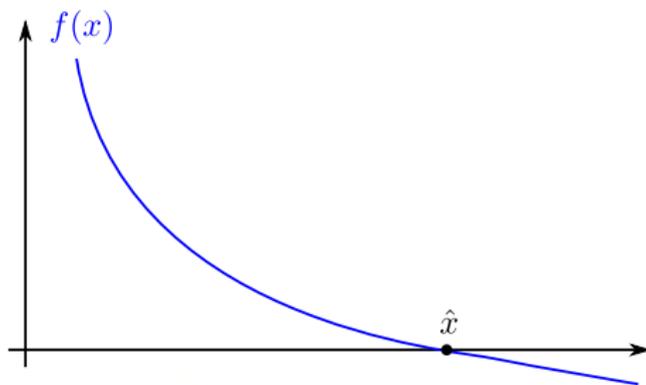
C'est-à-dire que l'on cherche la valeur \hat{x} , telle que $f(\hat{x}) = 0$.

Méthode de Newton (cas particulier du théorème du point fixe)

On cherche à résoudre une équation de la forme

$$f(x) = 0$$

C'est-à-dire que l'on cherche la valeur \hat{x} , telle que $f(\hat{x}) = 0$.



Méthode de Newton (cas particulier du théorème du point fixe)

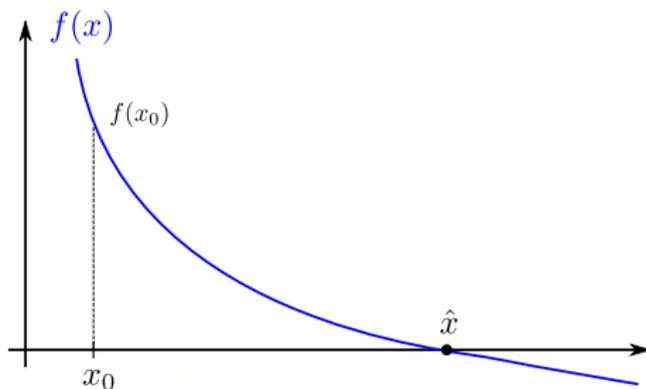
On cherche à résoudre une équation de la forme

$$f(x) = 0$$

C'est-à-dire que l'on cherche la valeur \hat{x} , telle que $f(\hat{x}) = 0$.

Partons d'une valeur initiale x_0 assez "proche" \hat{x} , cherchons un incrément δ tel que

$$f(x_1) \simeq 0 \quad \text{avec} \quad x_1 = x_0 + \delta$$



Faisons une estimation de la dérivée de f en x_0

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\delta}.$$

Nous approchons alors la valeur $f(x_1)$ par linéarisation

$$f(x_1) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \delta$$

Faisons une estimation de la dérivée de f en x_0

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\delta}.$$

Nous approchons alors la valeur $f(x_1)$ par linéarisation

$$f(x_1) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \delta$$

En posant $f(x_1) = 0$, il reste

$$\delta = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Faisons une estimation de la dérivée de f en x_0

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\delta}.$$

Nous approchons alors la valeur $f(x_1)$ par linéarisation

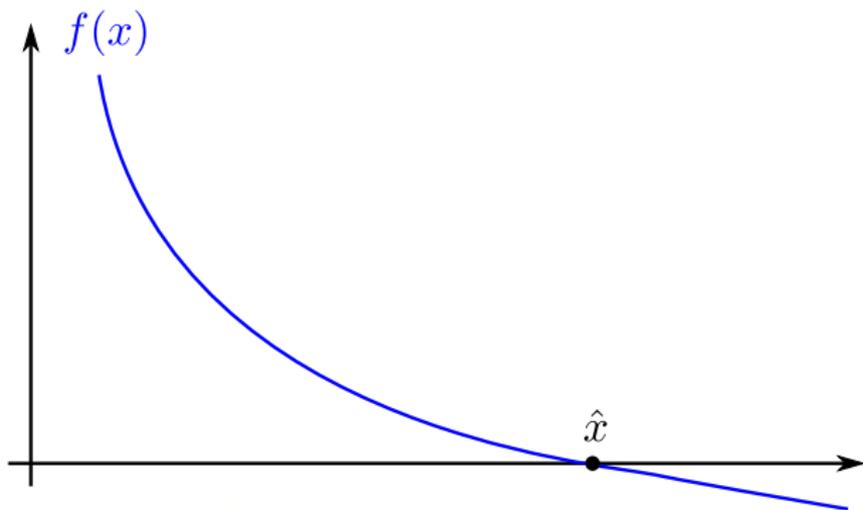
$$f(x_1) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \delta$$

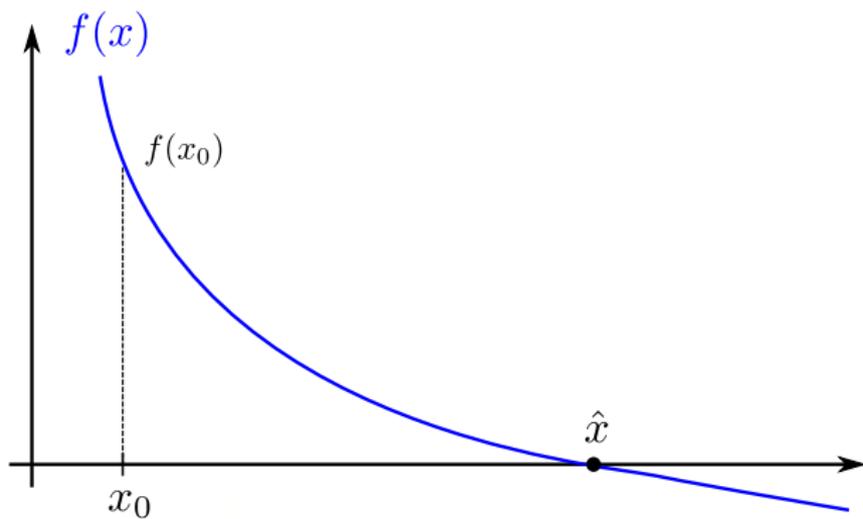
En posant $f(x_1) = 0$, il reste

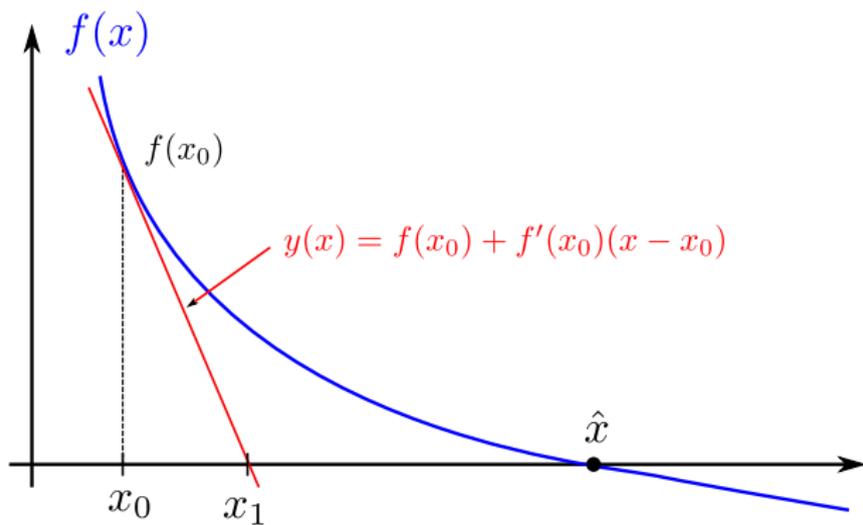
$$\delta = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

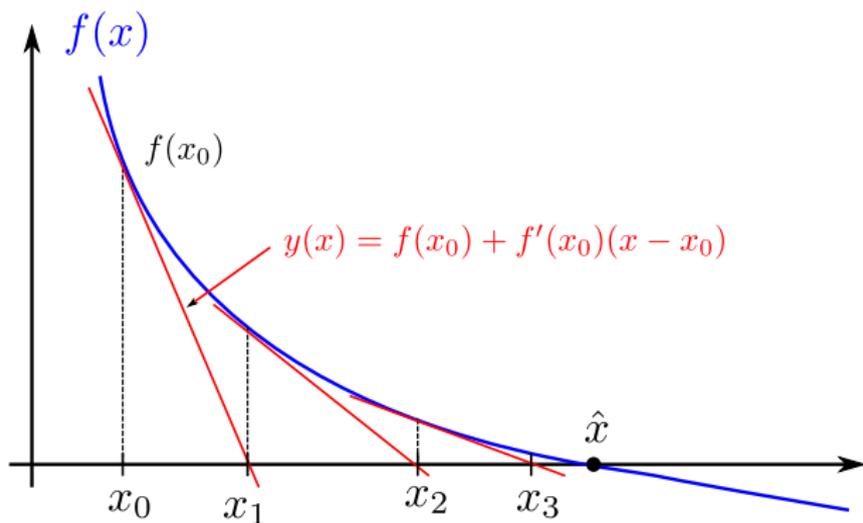
A chaque itération, un nouveau point d'abscisse x_n est calculé

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$









Exemple pour le calcul d'une racine carrée

Le calcul de \sqrt{a} revient à résoudre

$$f(x) = 0 \quad \text{avec} \quad f(x) = x^2 - a.$$

Exemple pour le calcul d'une racine carrée

Le calcul de \sqrt{a} revient à résoudre

$$f(x) = 0 \quad \text{avec} \quad f(x) = x^2 - a.$$

Par application de la méthode de Newton nous avons :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

Exemple pour le calcul d'une racine carrée

Le calcul de \sqrt{a} revient à résoudre

$$f(x) = 0 \quad \text{avec} \quad f(x) = x^2 - a.$$

Par application de la méthode de Newton nous avons :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \\ &= \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \end{aligned}$$

Exemple pour le calcul d'une racine carrée

Le calcul de \sqrt{a} revient à résoudre

$$f(x) = 0 \quad \text{avec} \quad f(x) = x^2 - a.$$

Par application de la méthode de Newton nous avons :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \\ &= \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)\end{aligned}$$

Calculons le nombre $\sqrt{2}$:

posons $x_0 = 1$, puis : $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.4167$, $x_3 = 1.4142$, ...

Séries numériques

Soit une suite numérique (u_n) :

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$$

On appelle série de terme général u_n , la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Séries numériques

Soit une suite numérique (u_n) :

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$$

On appelle série de terme général u_n , la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

$$S_0 = u_0 \quad S_1 = u_0 + u_1 \quad S_2 = u_0 + u_1 + u_2 \quad \dots \quad S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Séries numériques

Soit une suite numérique (u_n) :

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$$

On appelle série de terme général u_n , la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

$$S_0 = u_0 \quad S_1 = u_0 + u_1 \quad S_2 = u_0 + u_1 + u_2 \quad \dots \quad S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Si la limite notée S existe et est finie

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

la série est dite convergente et S est appelé la somme de la série.

Exemples particuliers

Somme des n premiers entiers (série de Gauss) :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(terme général : suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 0$)

Exemples particuliers

Somme des n premiers entiers (série de Gauss) :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(terme général : suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 0$)

Série de terme général (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 + (u_0 + r) + \dots + (u_0 + nr) = \frac{(n+1)(u_n + u_0)}{2}$$

Exemples particuliers

Somme des n premiers entiers (série de Gauss) :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(terme général : suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 0$)

Série de terme général (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 + (u_0 + r) + \dots + (u_0 + nr) = \frac{(n+1)(u_n + u_0)}{2}$$

Série de terme général (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 + u_0q + u_0q^2 + \dots + u_0q^n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Convergence : La série converge si (S_n) admet une limite finie. On note alors

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Si la série $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Convergence : La série converge si (S_n) admet une limite finie. On note alors

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Si la série $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

C'est une condition nécessaire, si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, alors la série S_n diverge.

Convergence : La série converge si (S_n) admet une limite finie. On note alors

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Si la série $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

C'est une condition nécessaire, si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, alors la série S_n diverge.

Démonstration :

Supposons que (S_n) est une série convergente. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \quad \Rightarrow \quad S_n - S_{n-1} = u_n.$$

Convergence : La série converge si (S_n) admet une limite finie. On note alors

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

$$\text{Si la série } S_n = \sum_{k=0}^n u_k \text{ est convergente, alors } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

C'est une condition nécessaire, si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, alors la série S_n diverge.

Démonstration :

Supposons que (S_n) est une série convergente. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \quad \Rightarrow \quad S_n - S_{n-1} = u_n.$$

Puisque la série est convergente, on a également

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S.$$

Convergence : La série converge si (S_n) admet une limite finie. On note alors

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Si la série $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

C'est une condition nécessaire, si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, alors la série S_n diverge.

Démonstration :

Supposons que (S_n) est une série convergente. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \quad \Rightarrow \quad S_n - S_{n-1} = u_n.$$

Puisque la série est convergente, on a également

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = S - S = 0.$$

Exemple 1

Reprenons la série dont le terme général est une suite géométrique ($u_{n+1} = u_n q$)

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple 1

Reprenons la série dont le terme général est une suite géométrique ($u_{n+1} = u_n q$)

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Nous pouvons conclure que

- si $|q| < 1$, la série converge ($S = \frac{1}{1-q}$), et la suite géométrique (u_n) converge bien vers 0,
- si $|q| \geq 1$, la suite et la série divergent.

Exemple 1

Reprenons la série dont le terme général est une suite géométrique ($u_{n+1} = u_n q$)

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Nous pouvons conclure que

- si $|q| < 1$, la série converge ($S = \frac{1}{1-q}$), et la suite géométrique (u_n) converge bien vers 0,
- si $|q| \geq 1$, la suite et la série divergent.

Exemple 2

la convergence vers 0 du terme général n'est qu'une condition nécessaire. Soit la série de terme général (u_n)

$$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \quad \text{avec } u_0 = 0.$$

La série s'exprime simplement sous la forme $S_n = \sqrt{n}$

Exemple 1

Reprenons la série dont le terme général est une suite géométrique ($u_{n+1} = u_n q$)

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Nous pouvons conclure que

- si $|q| < 1$, la série converge ($S = \frac{1}{1-q}$), et la suite géométrique (u_n) converge bien vers 0,
- si $|q| \geq 1$, la suite et la série divergent.

Exemple 2

la convergence vers 0 du terme général n'est qu'une condition nécessaire. Soit la série de terme général (u_n)

$$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \quad \text{avec } u_0 = 0.$$

La série s'exprime simplement sous la forme $S_n = \sqrt{n}$

La série est donc divergente, tandis que la suite (u_n) converge vers 0 :

$$u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Séries à termes positifs

Une série $S_n = \sum u_n$ est à termes positifs si, $\forall n, u_n \geq 0$.

Théorème de comparaison

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs tels que $u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Séries à termes positifs

Une série $S_n = \sum u_n$ est à termes positifs si, $\forall n, u_n \geq 0$.

Théorème de comparaison

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs tels que $u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple : soit la série de terme général

$$u_n = \frac{2 + \sin n}{3^{n+1}}$$

On a :

$$\forall n, 0 < u_n \leq \frac{3}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n}.$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{3^n}$ converge (cf. critère de d'Alembert), la série $\sum u_n$ converge.

L'équivalence entre deux suite permet d'évaluer la nature d'une série à partir d'une seconde plus facile à déterminer.

Emploi des équivalents

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si

$$u_n \sim v_n$$

(ou plus généralement si u_n/v_n a une limite finie non-nulle), alors les séries correspondantes sont de même nature.

L'équivalence entre deux suite permet d'évaluer la nature d'une série à partir d'une seconde plus facile à déterminer.

Emploi des équivalents

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si

$$u_n \sim v_n$$

(ou plus généralement si u_n/v_n a une limite finie non-nulle), alors les séries correspondantes sont de même nature.

Exemples :

En $n \rightarrow +\infty$, on a :

$$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{n^3 + 2n + 5}{n + 2} \sim n^2$$

Séries de Riemann

C'est une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

- converge si $\alpha > 1$
- diverge si $\alpha \leq 1$

Critère de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = L$

- si $L < 1$, $\sum u_n$ converge
- si $L > 1$, $\sum u_n$ diverge

Critère de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$$

- si $L < 1$, $\sum u_n$ converge
- si $L > 1$, $\sum u_n$ diverge

Séries à termes de signes quelconques

Les règles de Riemann, Cauchy et d'Alembert ne s'appliquent qu'aux séries à termes positifs. Lorsque le terme général u_n d'une série ne reste pas positif, ou est complexe, on doit appliquer ces règles à la série de terme général $|u_n|$. Si la série $\sum |u_n|$ converge, le théorème de convergence absolue affirme que la série de terme général u_n converge aussi. Attention, la réciproque est fautive.

$$\sum |u_n| \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ converge}$$

Sommaire

1 Suites et séries

- Suites numériques
- Applications
- Séries numériques

2 Série de Fourier

- Rappels
- Définitions
- Représentation spectrale
- Exemples
- Transformée de Fourier
- Applications

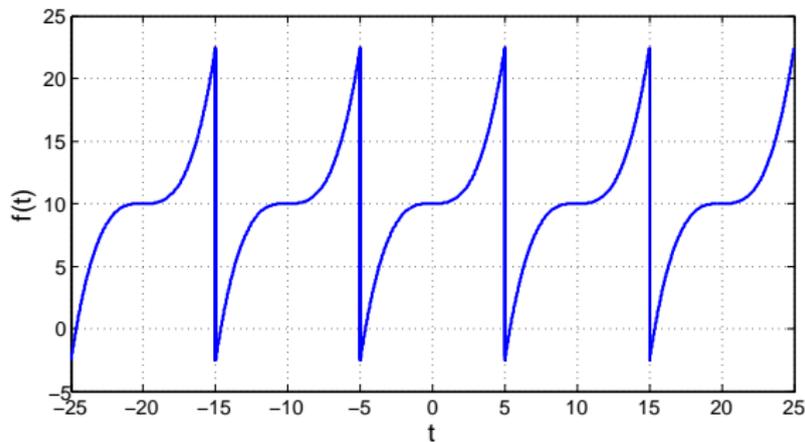
3 Transformée de Laplace

- Définitions
- Fonctions types
- Applications

Rappels

Une fonction x , définie sur \mathbb{R} , est dite périodique de période $T \in \mathbb{R}^*$ si

$$x(t + T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$



Rappels

Fonctions périodiques élémentaires : sin et cos

Rappels

Fonctions périodiques élémentaires : sin et cos

Fonction $x(t) = \cos(\omega t)$ est caractérisée par

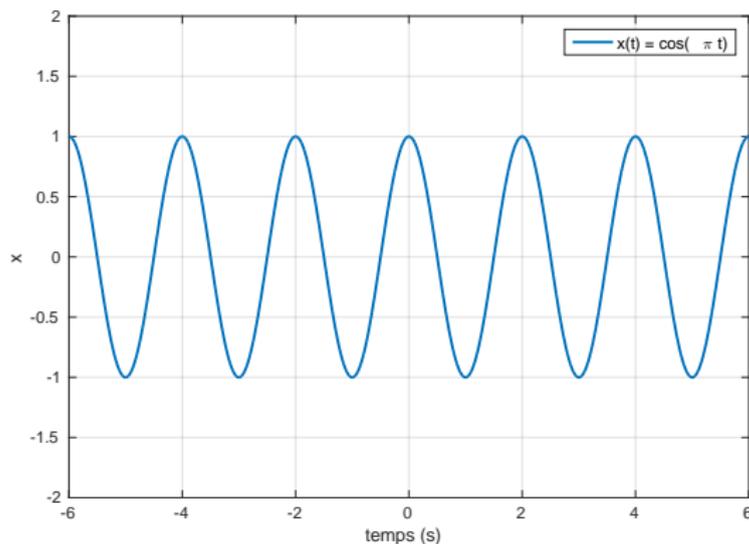
- sa pulsation ω (en rad/s),
- sa période T (en s), avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$,
- sa fréquence f (en Hz ou s^{-1}), avec $\omega = 2\pi f$.

Rappels

Fonctions périodiques élémentaires : sin et cos

Fonction $x(t) = \cos(\omega t)$ est caractérisée par

- sa pulsation ω (en rad/s),
- sa période T (en s), avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$,
- sa fréquence f (en Hz ou s^{-1}), avec $\omega = 2\pi f$.

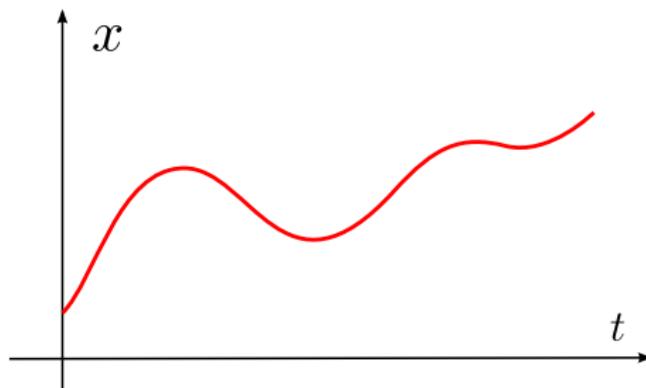


Rappel

Représentation habituelle des fonctions ou signaux : la représentation **temporelle**

Rappel

Représentation habituelle des fonctions ou signaux : la représentation **temporelle**



★ Une autre représentation est possible ; très utilisée ; plus appropriée pour certaines applications : la représentation **fréquentielle**.

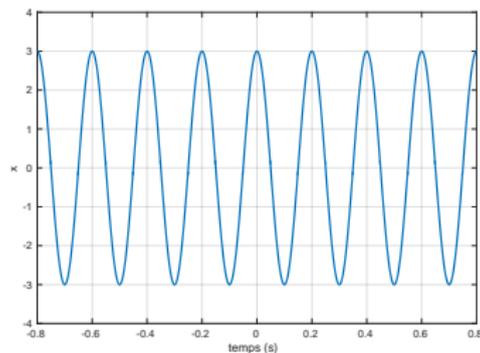
Cas le plus simple : sin et cos

Exemple : $x(t) = 3 \cos(10\pi t)$

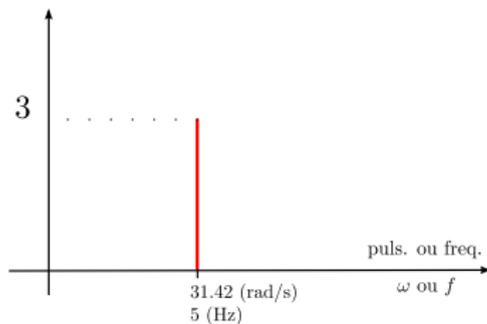
Cas le plus simple : sin et cos

Exemple : $x(t) = 3 \cos(10\pi t)$

représentation **temporelle**



représentation **fréquentielle**



La fonction cos est caractérisée par une seule fréquence.

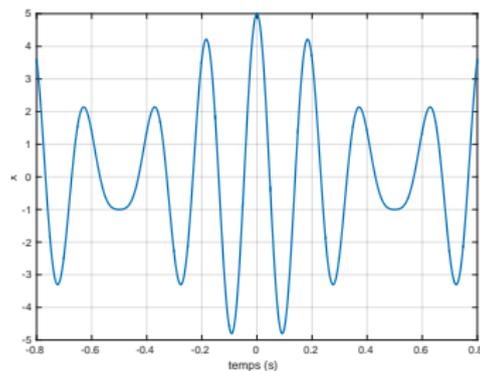
Juste un petit peu plus compliqué...

Exemple : $x(t) = 3 \cos(2\pi 5t) + 2 \cos(2\pi 6t)$

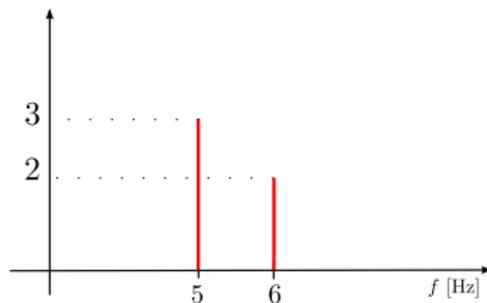
Juste un petit peu plus compliqué...

$$\text{Exemple : } x(t) = 3 \cos(2\pi 5t) + 2 \cos(2\pi 6t)$$

représentation **temporelle**



représentation **fréquentielle**



La fonction est caractérisée par deux fréquences.

Définitions

Qu'est-ce que sont les séries de Fourier ?

- décomposition d'un signal périodique en une somme de sinusoïdes élémentaires.
- permet la caractérisation des harmoniques des signaux périodiques.

Définitions

Qu'est-ce que sont les séries de Fourier ?

- décomposition d'un signal périodique en une somme de sinusoïdes élémentaires.
- permet la caractérisation des harmoniques des signaux périodiques.

Formule de décomposition en série de Fourier :

Soit x une fonction périodique de période T sur \mathbb{R} . Sous certaines conditions de continuité et de dérivabilité, $x(t)$ peut se décomposer sous la forme

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt$$

La fonction x est périodique de période T , et donc de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

La décomposition en Série de Fourier exprime x comme une **somme pondérée** de cos et sin de **fréquences multiples** de celle de x :

$$\begin{aligned}x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \\ &= a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + \dots\end{aligned}$$

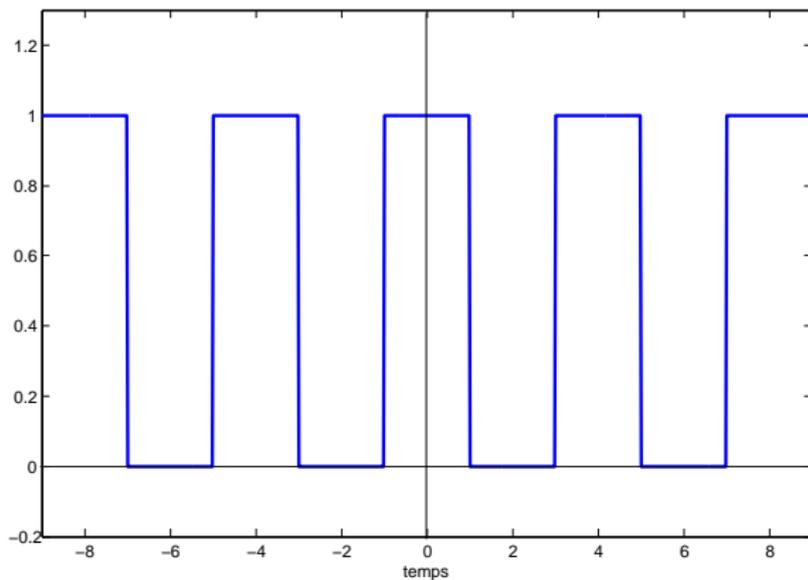
La fonction x est périodique de période T , et donc de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

La décomposition en Série de Fourier exprime x comme une **somme pondérée** de cos et sin de **fréquences multiples** de celle de x :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \\
 &= \underbrace{a_0}_{\text{moy}} + \underbrace{a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)}_{\text{fondamentale}} + \underbrace{a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + \dots}_{\text{harmoniques}}
 \end{aligned}$$

- a_0 est la **valeur moyenne** de la fonction x .
- Les termes de pulsation ω sont les **composantes fondamentales**, car de même période que x .
- Les termes de pulsation $n\omega$ avec $n > 1$ sont les **composantes harmoniques** de la fonction, car multiples de la période de x .
- Les coefficients $\{a_n, b_n\}$ sont des constantes, ils traduisent la contribution de la $n^{\text{ième}}$ harmonique dans le signal.

Exemple : considérons le signal carré périodique $x(t)$.



Période $T = 4$ s ; fréquence $f = 0.25$ Hz ; pulsation $\omega = \frac{\pi}{2} = 1.57$ rad/s

Décomposons $x(t)$ en série de Fourier.

$$\bullet a_0 = \frac{1}{T} \int_{-2}^2 x(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 1 dt = 0.5$$

Décomposons $x(t)$ en série de Fourier.

$$\bullet a_0 = \frac{1}{T} \int_{-2}^2 x(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 1 dt = 0.5$$

$$\bullet a_n = \frac{2}{T} \int_{-2}^2 x(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos(n\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

Décomposons $x(t)$ en série de Fourier.

$$\bullet a_0 = \frac{1}{T} \int_{-2}^2 x(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 1 dt = 0.5$$

$$\bullet a_n = \frac{2}{T} \int_{-2}^2 x(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos(n\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\bullet b_n = 0$$

Nous avons donc pour $x(t)$ l'expression :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

Nous avons donc pour $x(t)$ l'expression :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

soit

$$x(t) = 0.5 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right) \cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)$$

Nous avons donc pour $x(t)$ l'expression :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

soit

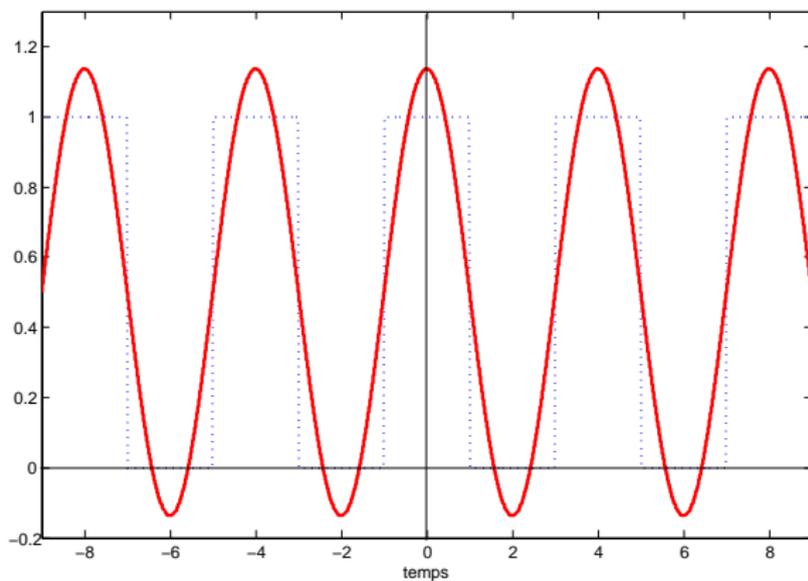
$$x(t) = 0.5 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right) \cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)$$

soit

$$x(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\omega t) + \dots$$

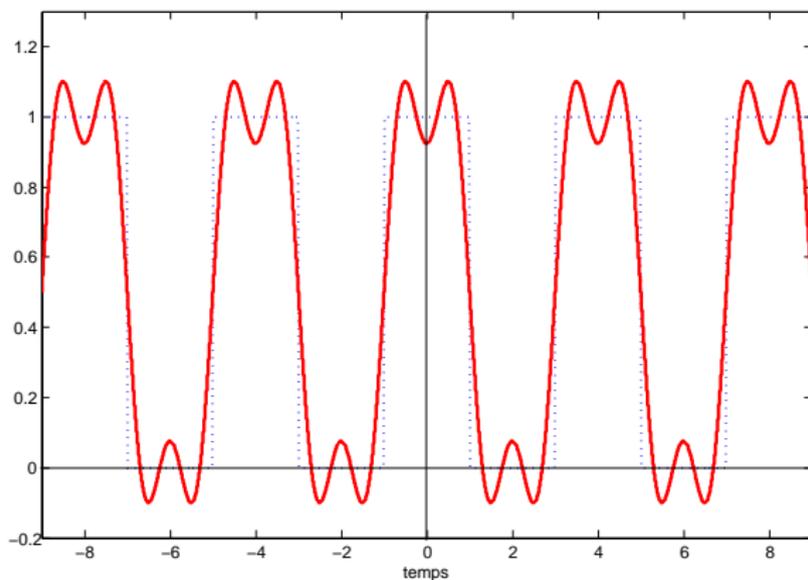
$$x(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\omega t) + \dots$$

$$x(t) \simeq 0.5 + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$



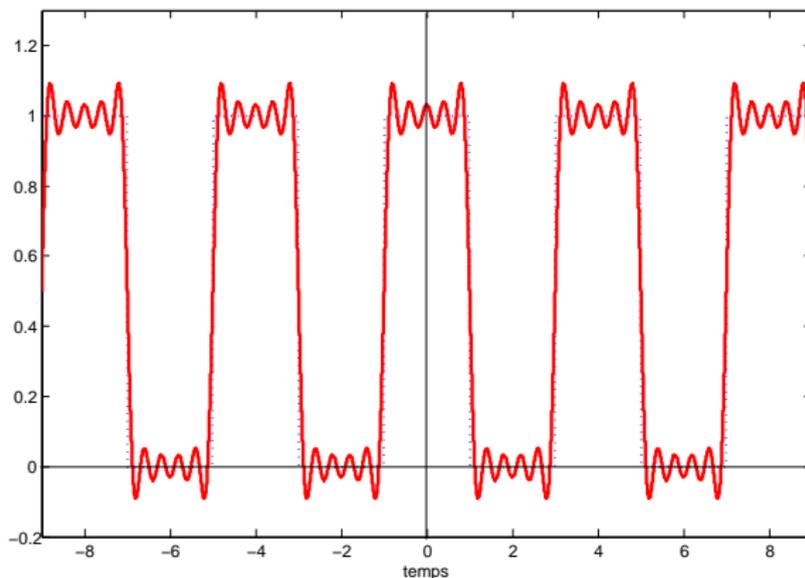
$$x(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\omega t) + \dots$$

$$x(t) \simeq 0.5 + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{3\pi} \cos\left(3\frac{\pi}{2}t\right)$$



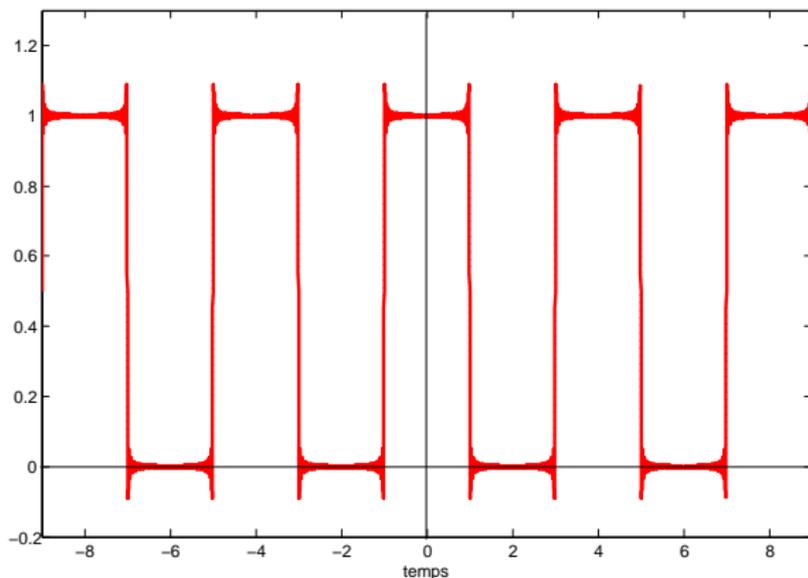
$$x(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\omega t) + \dots$$

$$x(t) \simeq 0.5 + \sum_{n=1}^9 \left(\frac{2}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right) \cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)$$



$$x(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\omega t) + \dots$$

$$x(t) \simeq 0.5 + \sum_{n=1}^{99} \left(\frac{2}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right) \cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)$$



Le principe réside dans le calcul des coefficients :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt$$

Le principe réside dans le calcul des coefficients :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt$$

Propriétés :

- Le coefficient a_0 représente la **valeur moyenne** de la fonction x .
- Si la fonction est **paire**, $x(-t) = x(t)$, alors tous les coefficients b_n sont nuls.
- Si la fonction est **impaire**, $x(-t) = -x(t)$, alors tous les coefficients a_n sont nuls.

Représentation spectrale

Expression d'un signal périodique $x(t)$ avec les séries de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

- $x(t)$ est représenté par une somme de cos et de sin,
- les cos et sin ont une fréquence multiple de celle de $x(t)$: $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots$
- les coefficients a_0, a_n et b_n sont des constantes

Représentation spectrale

Expression d'un signal périodique $x(t)$ avec les séries de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

- $x(t)$ est représenté par une somme de cos et de sin,
- les cos et sin ont une fréquence multiple de celle de $x(t)$: $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots$
- les coefficients a_0, a_n et b_n sont des constantes

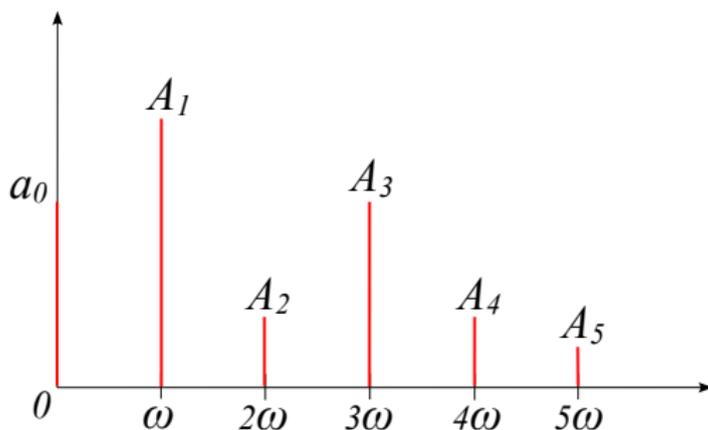
★ Le signal $x(t)$ est donc caractérisé par sa fréquence ω et les coefficients (a_0, a_n et b_n).

La **représentation spectrale** consiste à représenter les coefficients a_n et b_n par rapport à la pulsation correspondante $n\omega$:

- en abscisse : les pulsations $n\omega$.
- en ordonnée : le “module” des coefficients $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

La **représentation spectrale** consiste à représenter les coefficients a_n et b_n par rapport à la pulsation correspondante $n\omega$:

- en abscisse : les pulsations $n\omega$.
- en ordonnée : le “module” des coefficients $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.



★ Nous avons ainsi une représentation de la caractéristique fréquentielle du signal $x(t)$.

Reprenons l'exemple précédent :

$$x(t) = \underbrace{0.5}_{a_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right)}_{a_n} \cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)$$

soit

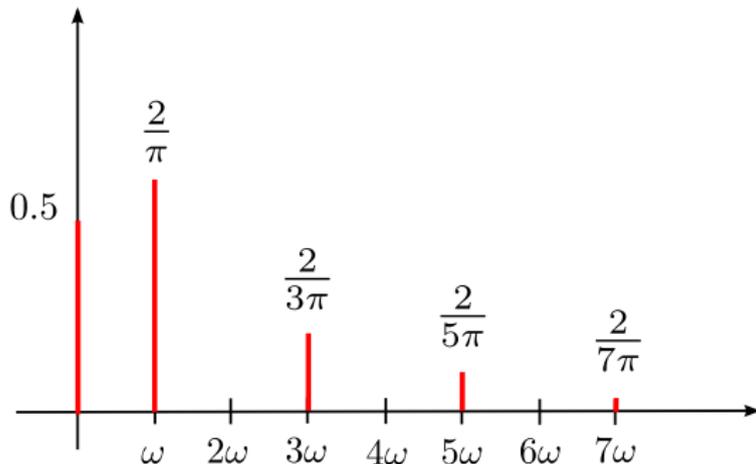
$$x(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\omega t) + \dots$$

Reprenons l'exemple précédent :

$$x(t) = \underbrace{0.5}_{a_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right)}_{a_n} \cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)$$

soit

$$x(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5\omega t) + \dots$$

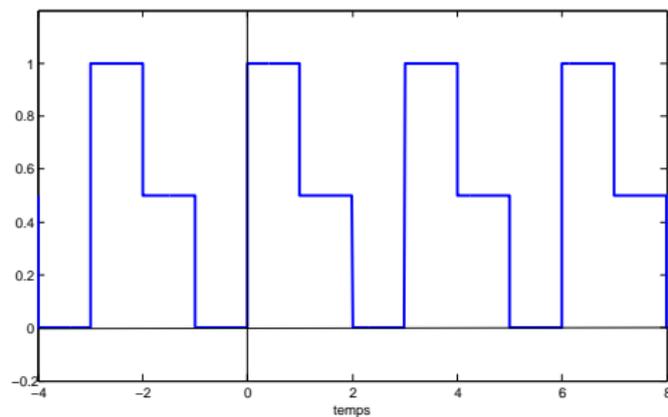


Exemples

Exemple 1 :

Soit le signal en escalier $x(t)$:

$$\begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\ 0.5 & \text{pour } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{pour } 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

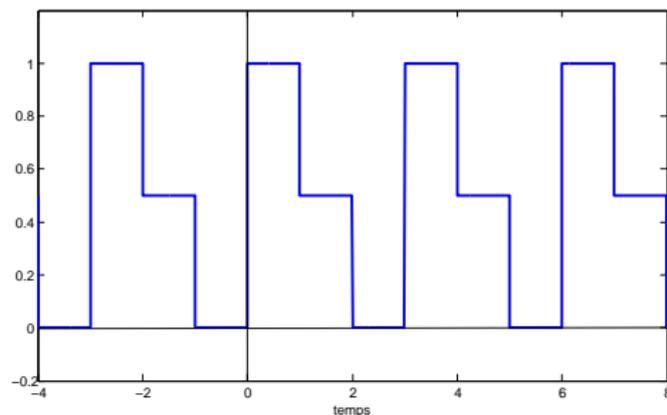


Exemples

Exemple 1 :

Soit le signal en escalier $x(t)$:

$$\begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\ 0.5 & \text{pour } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{pour } 2 \leq t < 3 \end{cases}$$



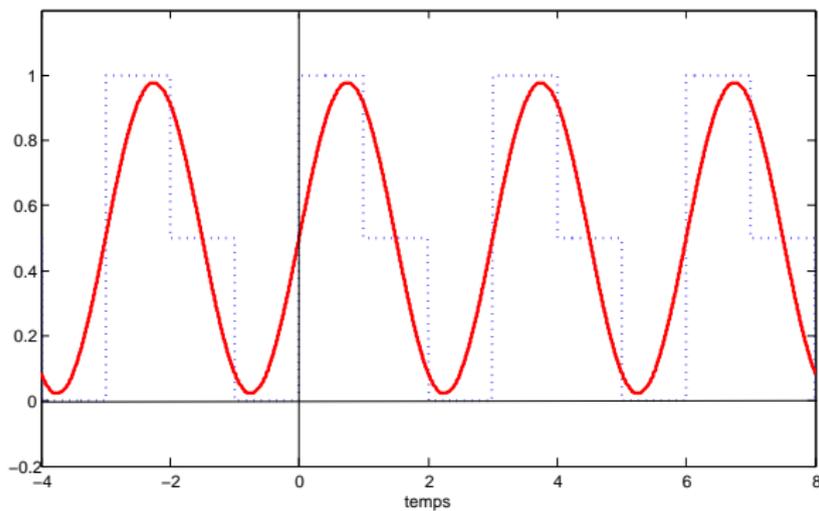
Calculons les coefficients de Fourier correspondants

$$a_0 = 0.5$$

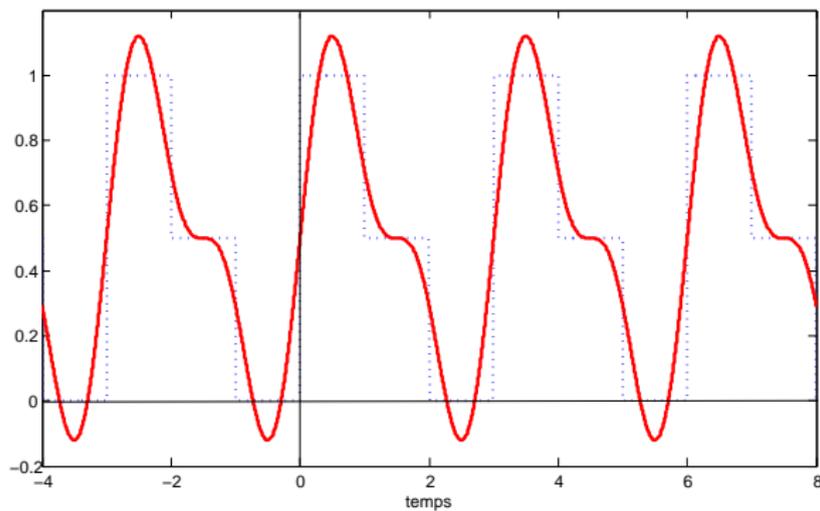
$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \left(\sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(n\frac{4\pi}{3}\right) \right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2n\pi} \left(2 - \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(n\frac{4\pi}{3}\right) \right).$$

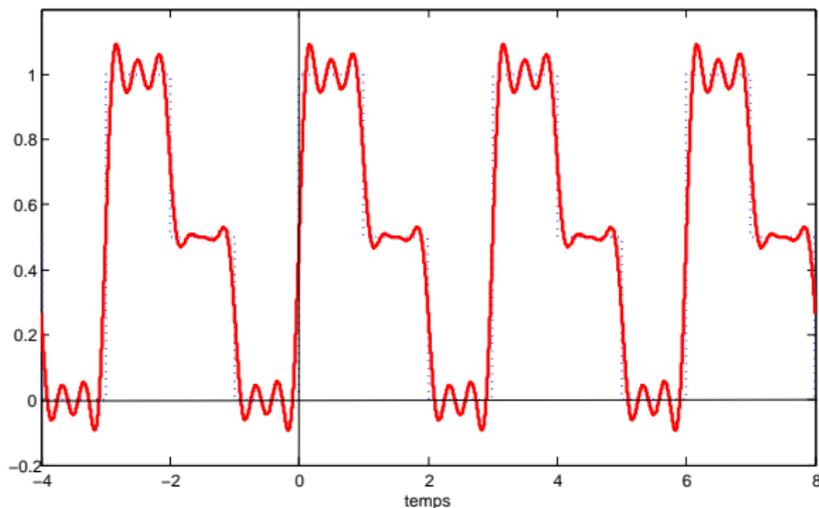
$$x(t) \simeq 0.5 + 0.478 \sin(\omega t)$$



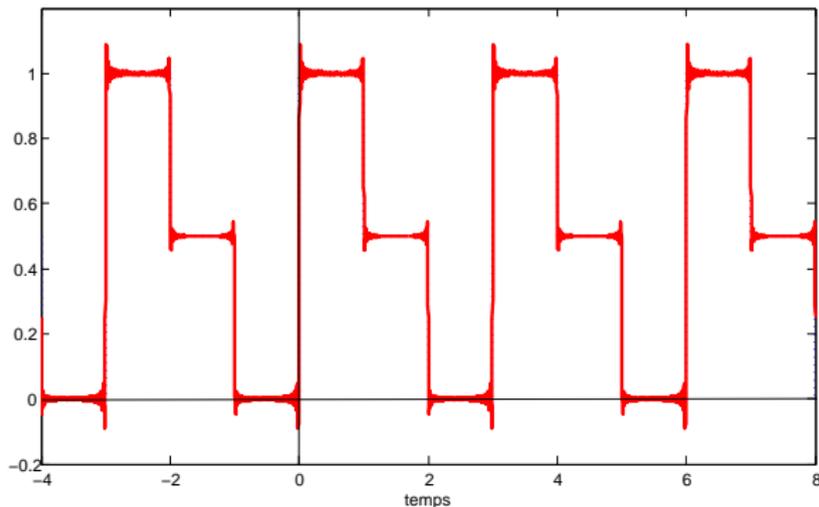
$$x(t) \simeq 0.5 + 0.478 \sin(\omega t) + 0.239 \sin(2\omega t)$$



$$x(t) \simeq 0.5 + \sum_{n=1}^9 \frac{1}{2n\pi} \left(2 - \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(n\frac{4\pi}{3}\right) \right) \sin(n\omega t)$$

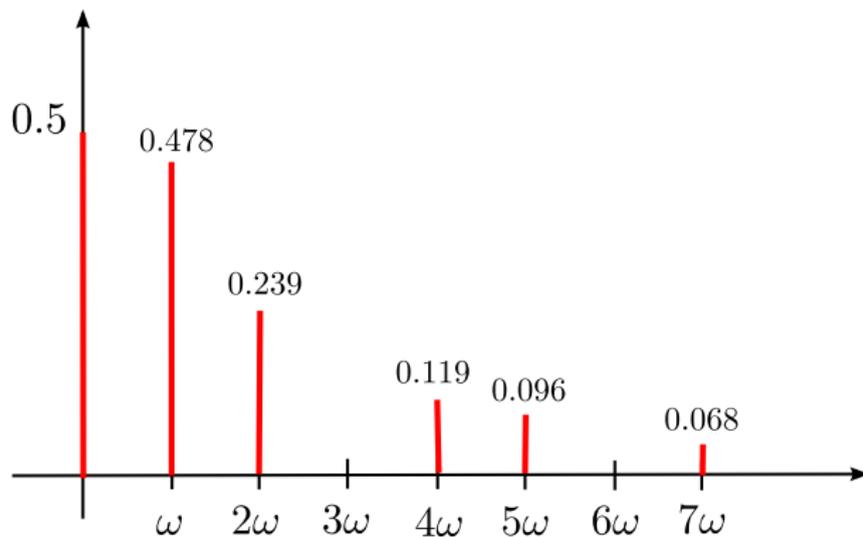


$$x(t) \simeq 0.5 + \sum_{n=1}^{99} \frac{1}{2n\pi} \left(2 - \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(n\frac{4\pi}{3}\right) \right) \sin(n\omega t)$$



Représentation spectrale

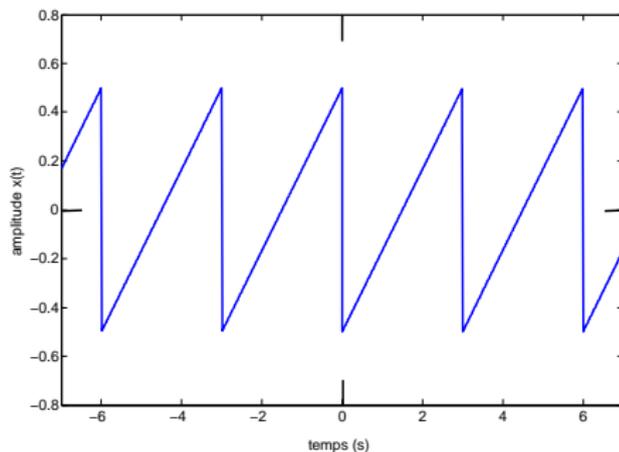
ici, $\omega = \frac{2\pi}{3}$ soit 2.094 rad/s .



Exemple 2 :

Soit un signal en dents de scie $x(t)$

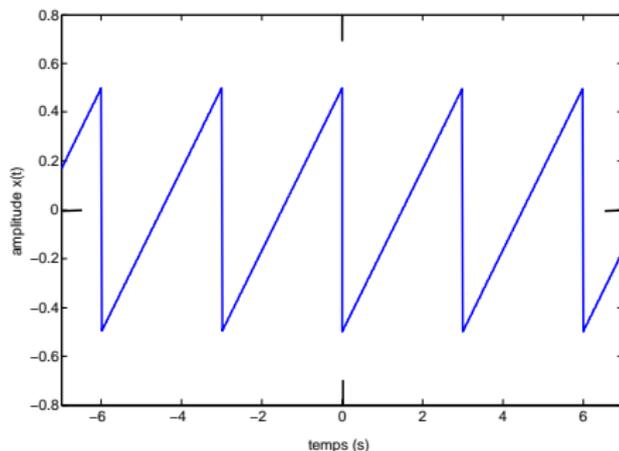
- de période $T = 3s$, de pente $\frac{1}{3}$
- d'amplitude 1 et de valeur moyenne nulle.



Exemple 2 :

Soit un signal en dents de scie $x(t)$

- de période $T = 3s$, de pente $\frac{1}{3}$
- d'amplitude 1 et de valeur moyenne nulle.



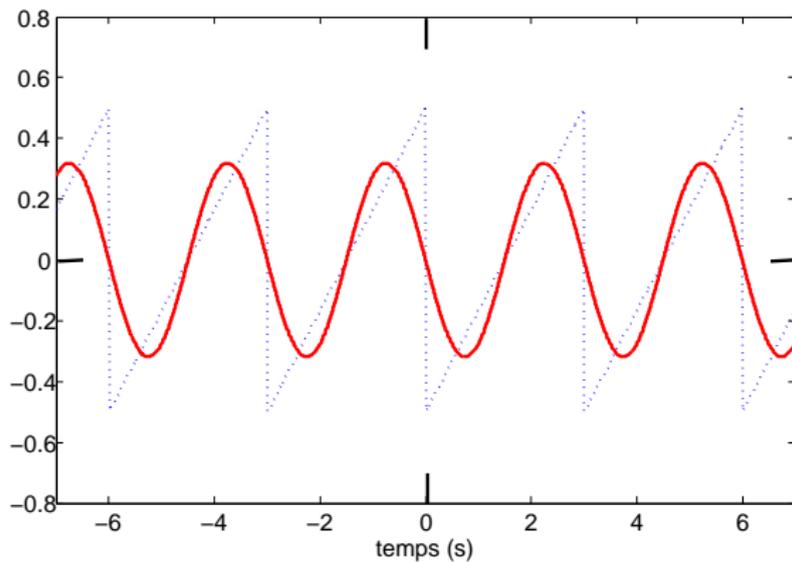
Calculons les coefficients de Fourier correspondants

$$a_0 = 0 \quad (\text{prévisible}).$$

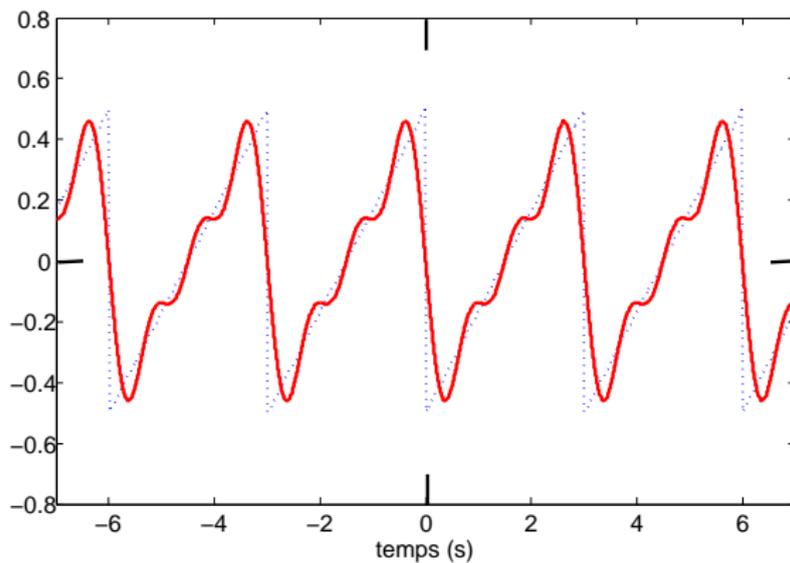
$$a_n = 0 \quad (\text{le signal est impair}).$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi} \quad (\text{intégration par parties})$$

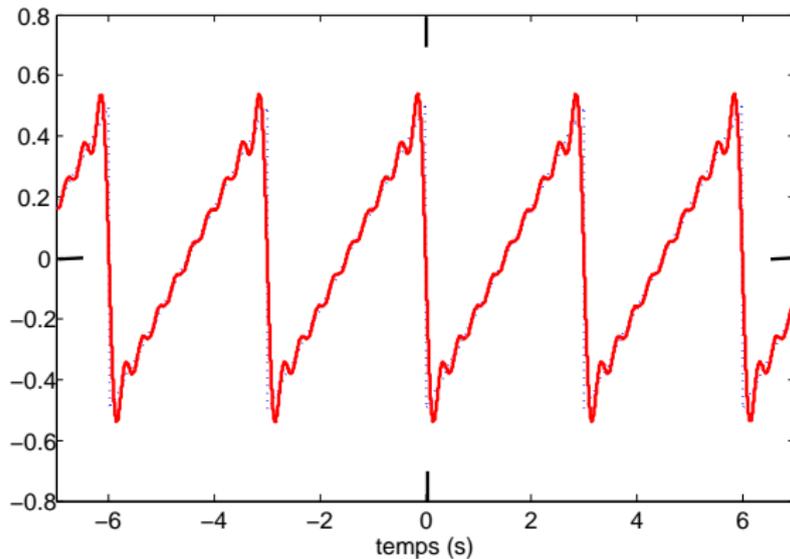
$$x(t) \simeq -\frac{1}{\pi} \sin(\omega t)$$



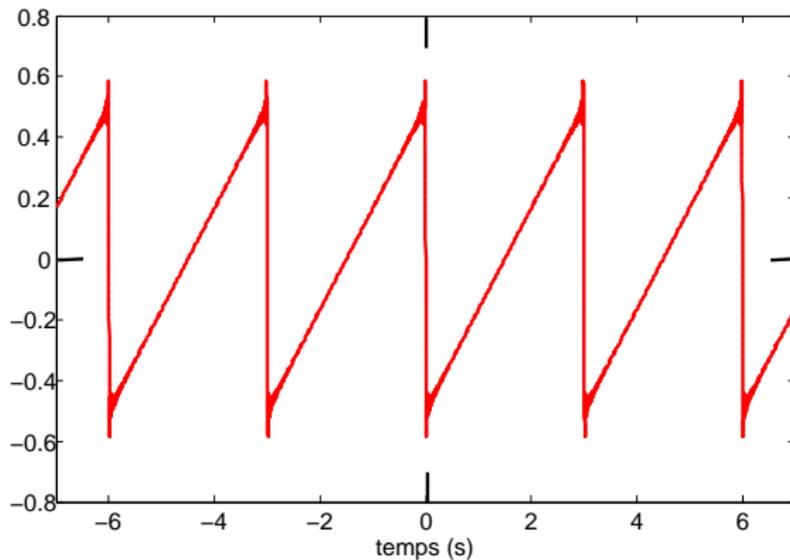
$$x(t) \simeq -\frac{1}{\pi} \sin(\omega t) - \frac{1}{2\pi} \sin(2\omega t) - \frac{1}{3\pi} \sin(3\omega t)$$



$$x(t) \simeq \sum_{n=1}^9 -\frac{1}{n\pi} \sin(n\omega t)$$

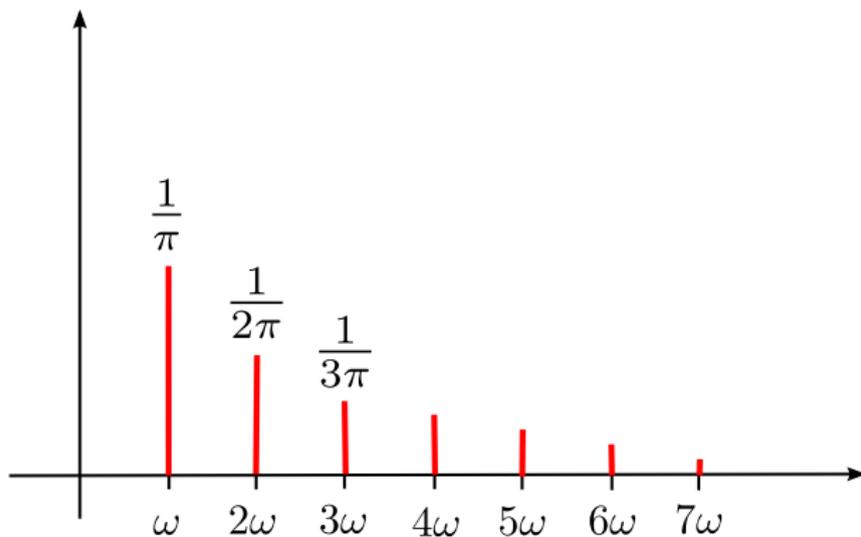


$$x(t) \simeq \sum_{n=1}^{99} -\frac{1}{n\pi} \sin(n\omega t)$$



Représentation spectrale

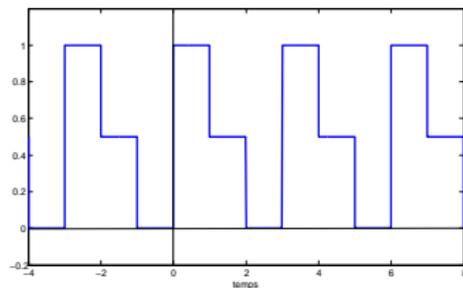
ici, $\omega = \frac{2\pi}{3}$ soit 2.094 rad/s .



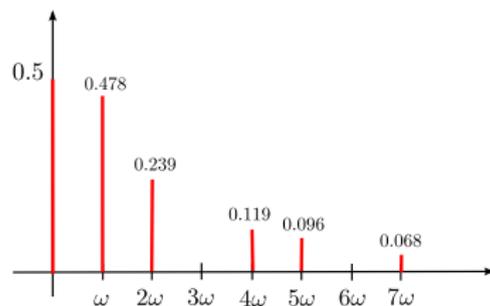
Transformée de Fourier

Nous avons considéré des signaux périodiques

représentation **temporelle**



représentation **fréquentielle**

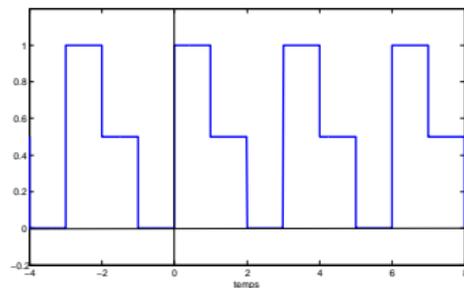


- le spectre représente les composantes fréquentielles qui caractérisent le signal $x(t)$,
- ces composantes sont des multiples de la fréquence de $x(t)$: $n\omega$,

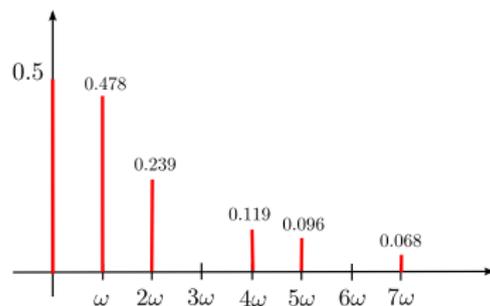
Transformée de Fourier

Nous avons considéré des signaux périodiques

représentation **temporelle**



représentation **fréquentielle**



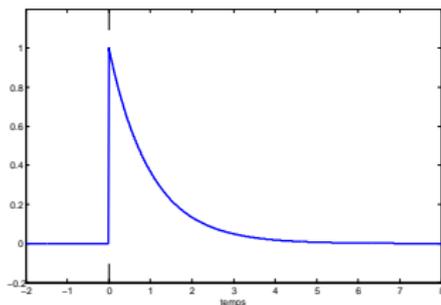
- le spectre représente les composantes fréquentielles qui caractérisent le signal $x(t)$,
- ces composantes sont des multiples de la fréquence de $x(t)$: $n\omega$,

★ extension au cas des signaux non-périodiques ?

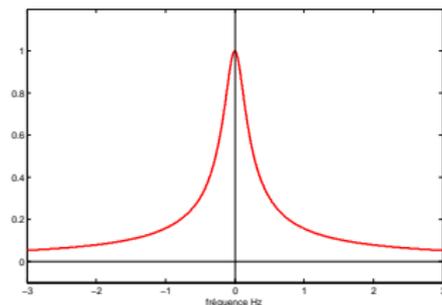
La **transformée de Fourier**, plus générale, permet de déterminer la représentation fréquentielle d'un signal à énergie finie.

exemple du signal $x(t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$:

représentation **temporelle**



représentation **fréquentielle**



- le spectre dépend continument de la fréquence f ,
- le signal $x(t)$ n'est plus caractérisé par un ensemble de fréquences particulières mais par une plage de fréquences.

Soit $x(t)$ une fonction à énergie finie.

La **transformée de Fourier** de la fonction $x(t)$ est la fonction complexe $X(f)$, de la variable f réelle, définie par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt.$$

Soit $x(t)$ une fonction à énergie finie.

La **transformée de Fourier** de la fonction $x(t)$ est la fonction complexe $X(f)$, de la variable f réelle, définie par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt.$$

La **transformée de Fourier inverse** est définie par (si $X(f)$ est également intégrable)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df.$$

Dans l'exemple, le spectre correspond au tracé de $|X(f)|$ en fonction de f .

Applications

Une note de musique

Le diapason donne la note-repère conventionnelle : le **la**.



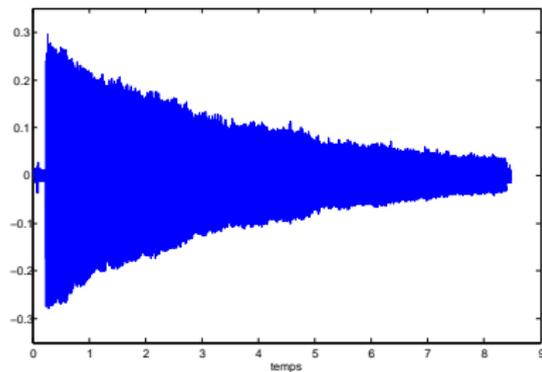
Applications

Une note de musique

Le diapason donne la note-repère conventionnelle : le **la**.



représentation **temporelle**



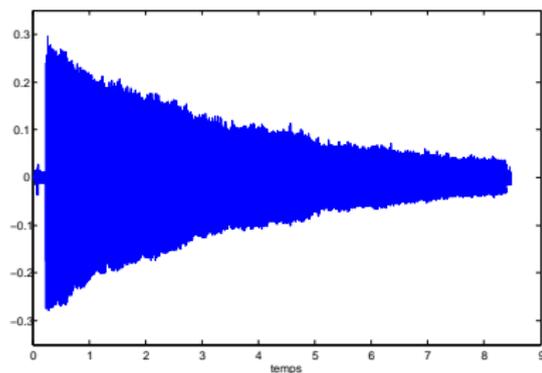
Applications

Une note de musique

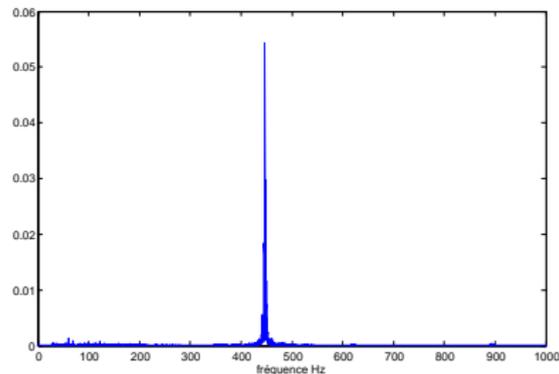
Le diapason donne la note-repère conventionnelle : le **la**.



représentation **temporelle**



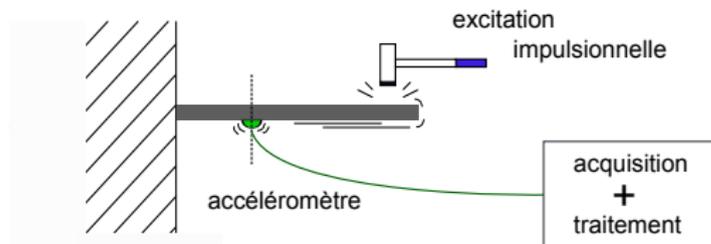
représentation **fréquentielle**



La fréquence du la_3 est 440 Hz .

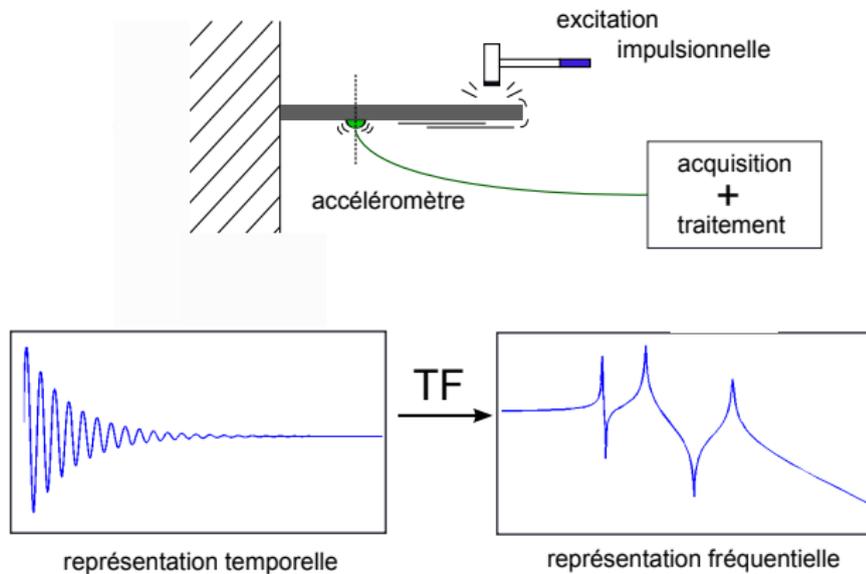
Analyse modale de structures

Mesure de la réponse d'une structure mécanique à une excitation.



Analyse modale de structures

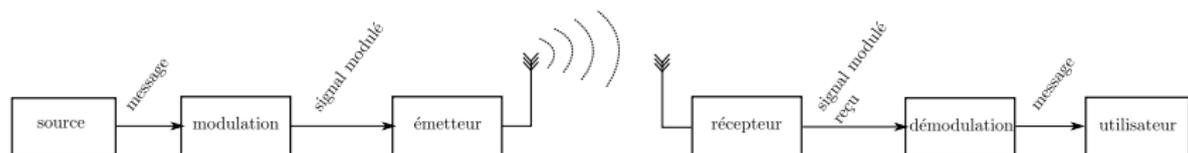
Mesure de la réponse d'une structure mécanique à une excitation.



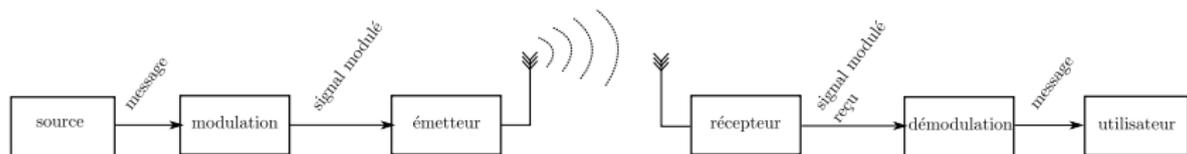
Les vibrations mesurées sont analysées dans le domaine fréquentiel.

⇒ l'objectif étant d'estimer les fréquences de résonance d'une structure mécanique.

Transmission radio

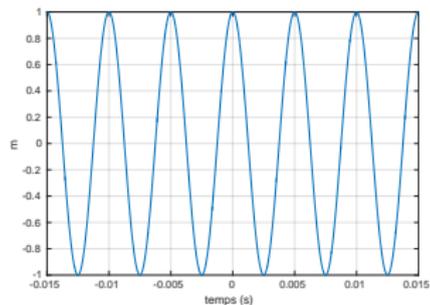


Transmission radio

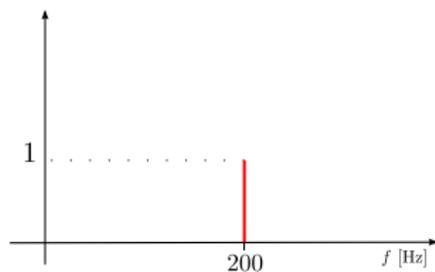


Soit le message à envoyer : $m(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, avec $f_1 = 200$ Hz.

représentation temporelle



représentation fréquentielle



Modulation d'amplitude

- définition de l'onde porteuse :

$$p(t) = \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{avec une haute fréquence } f_0 = 2 \text{ kHz.}$$

- expression du signal modulé :

$$s(t) = \left(1 + \alpha m(t)\right) p(t)$$

avec α le taux de modulation, un gain de réglage.

Modulation d'amplitude

- définition de l'onde porteuse :

$$p(t) = \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{avec une haute fréquence } f_0 = 2 \text{ kHz.}$$

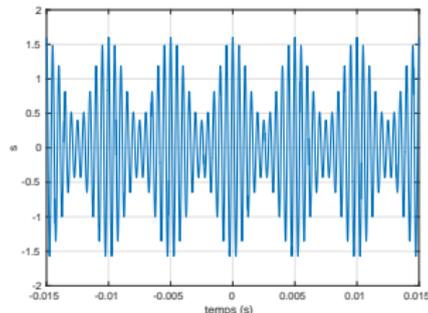
- expression du signal modulé :

$$s(t) = \left(1 + \alpha m(t)\right) p(t)$$

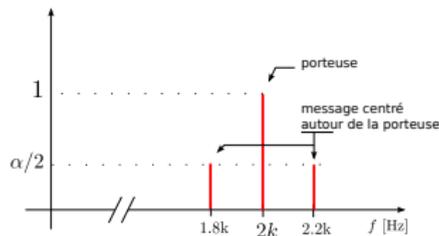
avec α le taux de modulation, un gain de réglage.

Représentation du signal modulé $s(t)$ (avec $\alpha = 0.6$)

représentation temporelle



représentation fréquentielle

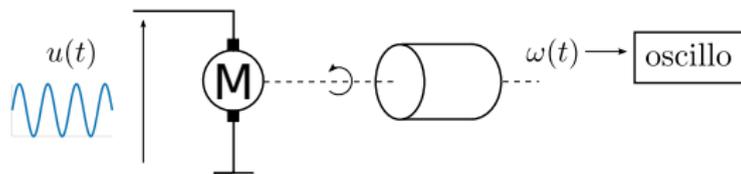


Pourquoi utiliser une porteuse avec une fréquence élevée ?

- nécessité d'adapter le signal de transmission au canal de communication,
- un signal hautes fréquences se propage bien dans l'air, et plus loin,
- la réception de signaux basses fréquences nécessiterait des dimensions d'antennes bien trop grandes,
- le décalage fréquentiel permet de multiplexer différentes transmissions sur différentes plages de fréquences.

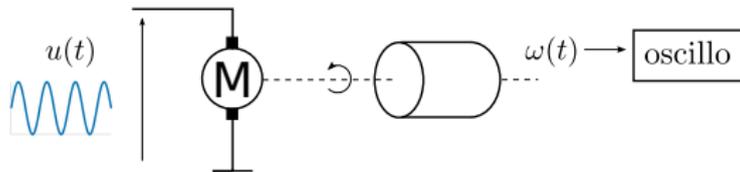
Atténuation du bruit de mesure

- excitation sinusoïdale du moteur (fréquence : 0.780 Hz),
- mesure de la vitesse de rotation.

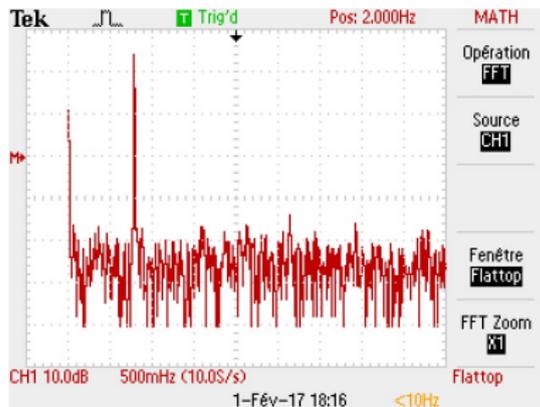
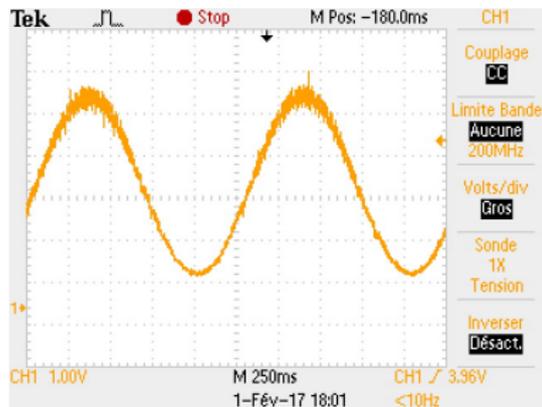


Atténuation du bruit de mesure

- excitation sinusoïdale du moteur (fréquence : 0.780 Hz),
- mesure de la vitesse de rotation.

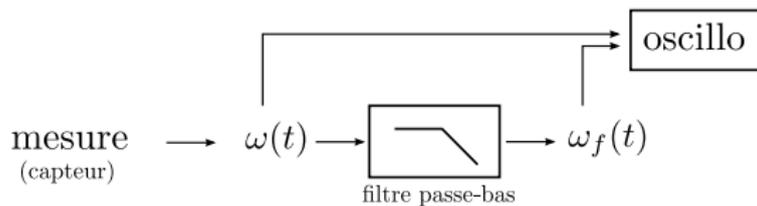


Affichage oscilloscope (temporel et FFT)



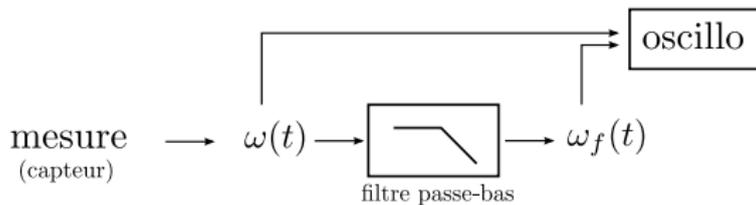
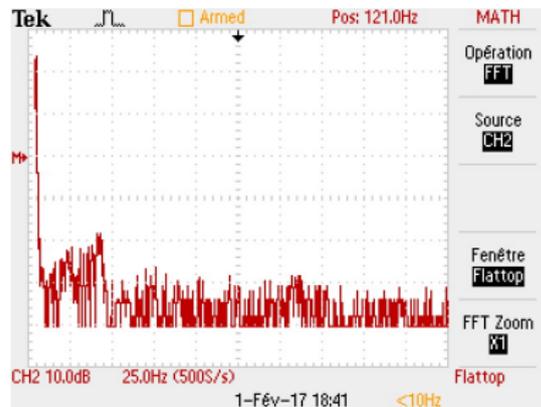
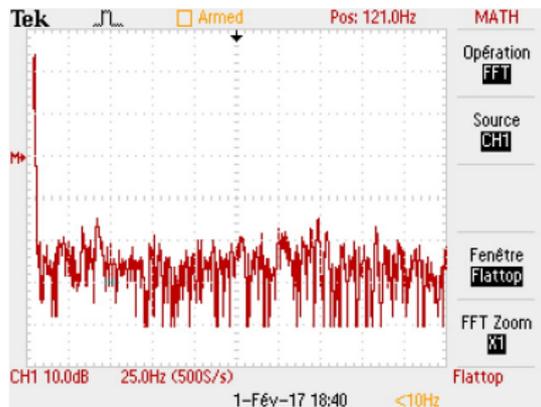
Signal de mesure bruité

- signal parasité, notamment en hautes fréquences,
- réduction par filtrage passe-bas (ici : circuit RC avec $f_c = 50$ Hz).

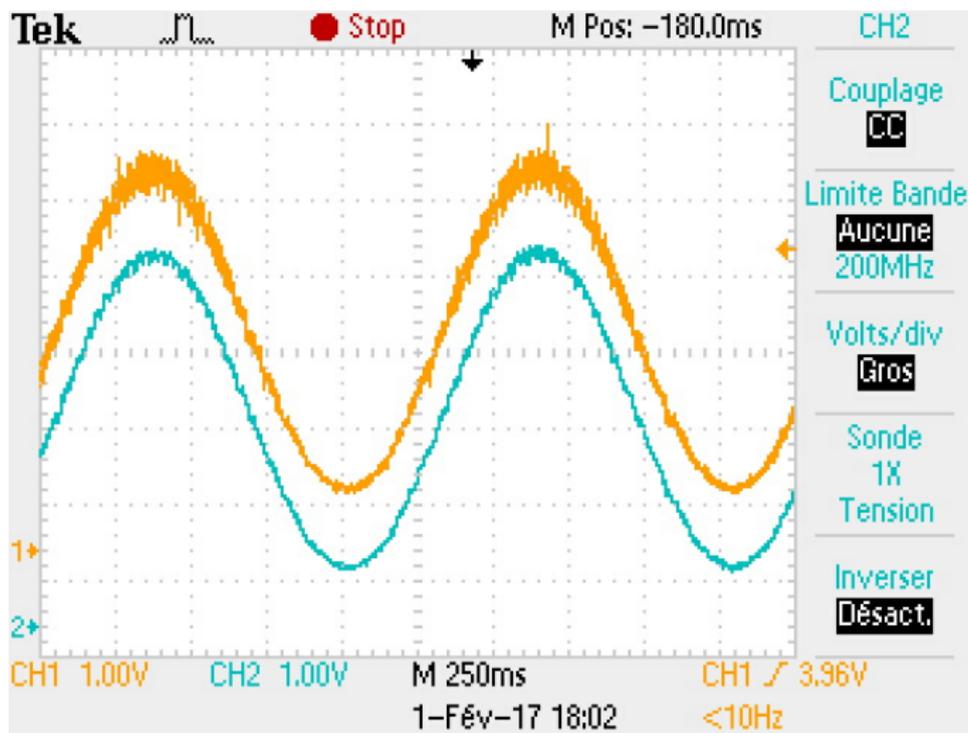


Signal de mesure bruité

- signal parasite, notamment en hautes fréquences,
- réduction par filtrage passe-bas (ici : circuit RC avec $f_c = 50$ Hz).

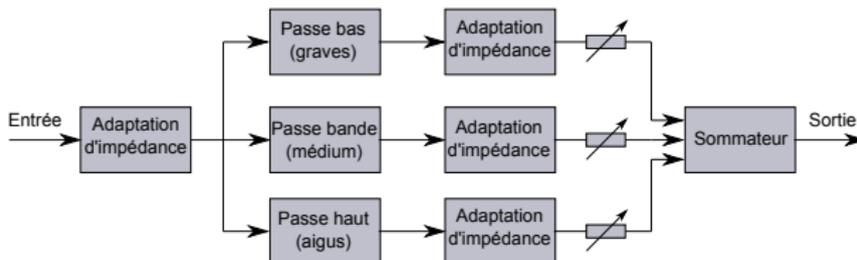
Affichage oscilloscope (FFT de ω et ω_f)

Affichage oscilloscope (temporel de ω et ω_f)



Égaliseur audio

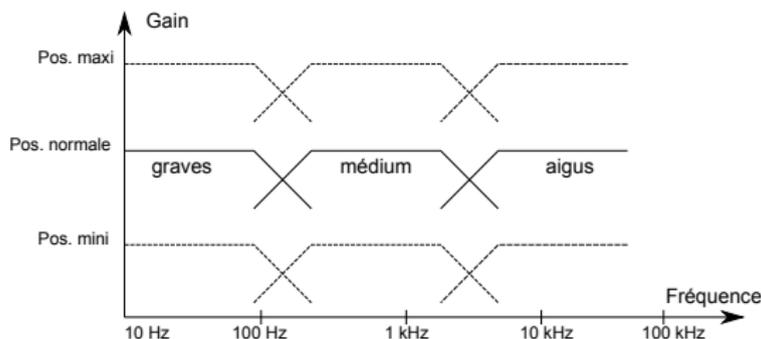
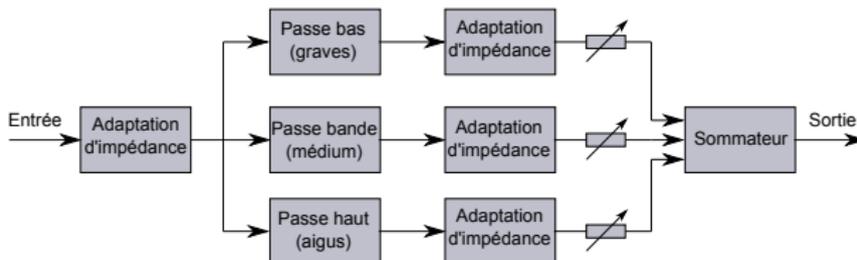
Un égaliseur¹ est composé de filtres électroniques qui permettent d'atténuer ou d'augmenter le signal sur différentes bandes de fréquence donnée.



1. Exemple d'un égaliseur 3 bandes proposé dans *Électronique Pratique n° 276*.

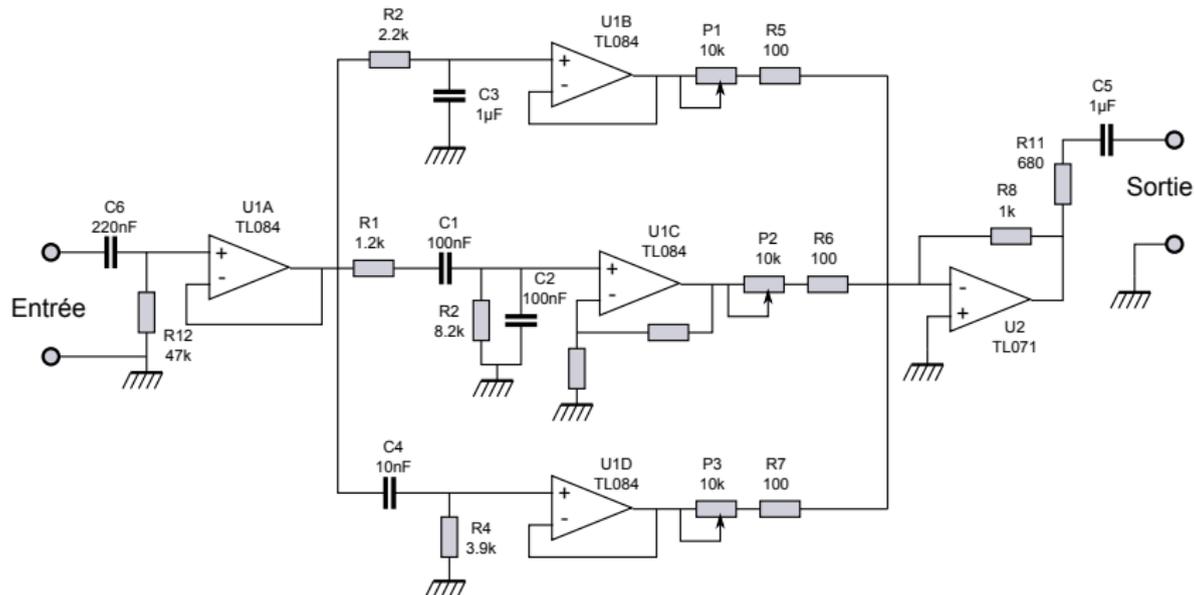
Égaliseur audio

Un égaliseur¹ est composé de filtres électroniques qui permettent d'atténuer ou d'augmenter le signal sur différentes bandes de fréquence donnée.



1. Exemple d'un égaliseur 3 bandes proposé dans *Électronique Pratique n° 276*.

Schéma électronique de l'égaliseur² :



2. Exemple d'un égaliseur 3 bandes proposé dans *Électronique Pratique n° 276*.

Sommaire

1 Suites et séries

- Suites numériques
- Applications
- Séries numériques

2 Série de Fourier

- Rappels
- Définitions
- Représentation spectrale
- Exemples
- Transformée de Fourier
- Applications

3 Transformée de Laplace

- Définitions
- Fonctions types
- Applications

Définitions

La **transformée de Laplace** d'une fonction $f(t)$, définie pour $t \geq 0$, est la fonction du nombre complexe s :

$$\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

- On note : $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ et $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$.
- La fonction $\hat{f}(s)$ n'est pas forcément définie dans tout le plan complexe ($\forall s \in \mathbb{C}$). Seulement dans une région où l'intégrale converge.

Définitions

La **transformée de Laplace** d'une fonction $f(t)$, définie pour $t \geq 0$, est la fonction du nombre complexe s :

$$\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

- On note : $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ et $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$.
- La fonction $\hat{f}(s)$ n'est pas forcément définie dans tout le plan complexe ($\forall s \in \mathbb{C}$). Seulement dans une région où l'intégrale converge.

La **transformée de Laplace inverse** d'une fonction $\hat{f}(s)$ est la fonction temporelle :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \hat{f}(s) e^{st} ds$$

★ Mais en pratique, on utilisera la table et les propriétés de la transformée.

Propriétés :

- Linéarité : $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\hat{f}(s) + b\hat{g}(s)$, a et b constants.
- Dérivation : $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = s\hat{f}(s) - f(0)$.
- Intégration : $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\theta)d\theta\right\} = \frac{1}{s}\hat{f}(s)$.
- Retard : $\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-s\tau}\hat{f}(s)$, $\tau > 0$ et $f(t) = 0 \forall t < 0$.
- Valeur finale : $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{f}(s)$.

Fonctions types

Exemple 1 :

Transformée de Laplace de la fonction échelon $f(t) = 1, \forall t \geq 0$ et 0 sinon :

Fonctions types

Exemple 1 :

Transformée de Laplace de la fonction échelon $f(t) = 1, \forall t \geq 0$ et 0 sinon :

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

Notons que cette transformée est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re[s] > 0$.

Exemple 2 :

Transformée de Laplace de la fonction rampe $g(t) = 2t, \forall t \geq 0$ et 0 sinon.

Exemple 2 :

Transformée de Laplace de la fonction rampe $g(t) = 2t, \forall t \geq 0$ et 0 sinon.

$$\text{Notons que } g(t) = 2 \int_0^t 1 dt = 2 \int_0^t f(\theta) d\theta,$$

alors

$$\begin{aligned}\hat{g}(s) &= \mathcal{L} \left\{ 2 \int_0^t f(\theta) d\theta \right\} \\ &= 2 \frac{1}{s} \hat{f}(s) \\ &= \frac{2}{s^2}.\end{aligned}$$

Là encore cette transformée est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}[s] > 0$.

Exemple 3 :

Transformée de Laplace de la fonction exponentielle $h(t) = e^{-at}$, $\forall t \geq 0$ et 0 sinon :

Exemple 3 :

Transformée de Laplace de la fonction exponentielle $h(t) = e^{-at}$, $\forall t \geq 0$ et 0 sinon :

$$\begin{aligned}\hat{h}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s+a}.\end{aligned}$$

Notons que cette transformée est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re[s] > -Re[a]$.

Table des transformées

Rappelons que les fonctions temporelles $f(t)$ ci-dessous ne sont définies que pour $t \geq 0$.

Fonction	Dom. temporel $f(t)$	Trans. de Laplace $\hat{f}(s)$
échelon	1	$\frac{1}{s}$
rampe	t	$\frac{1}{s^2}$
puissance n-ième	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
exponentielle décroissante	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

Table des transformées

Rappelons que les fonctions temporelles $f(t)$ ci-dessous ne sont définies que pour $t \geq 0$.

Fonction	Dom. temporel $f(t)$	Trans. de Laplace $\hat{f}(s)$
sinus	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
cosinus	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
décroissance exponentielle d'un sinus	$e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
décroissance exponentielle d'un cosinus	$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$
décroissance exponentielle d'une puissance n-ième	$\frac{t^n}{n!} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$

Application pour la résolution d'équations différentielles linéaires

Considérons une **équation différentielle linéaire** et appliquons la TL
(pour des raisons de simplicité, les C.I. sont supposées nulles)

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

Application pour la résolution d'équations différentielles linéaires

Considérons une **équation différentielle linéaire** et appliquons la TL
(pour des raisons de simplicité, les C.I. sont supposées nulles)

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \dots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) = b_m s^m \hat{u}(s) + \dots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

Application pour la résolution d'équations différentielles linéaires

Considérons une **équation différentielle linéaire** et appliquons la TL
(pour des raisons de simplicité, les C.I. sont supposées nulles)

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \dots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) = b_m s^m \hat{u}(s) + \dots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

$$\downarrow$$

La réponse s'exprime donc
$$\hat{y}(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \hat{u}(s)$$

Application pour la résolution d'équations différentielles linéaires

Considérons une **équation différentielle linéaire** et appliquons la TL
(pour des raisons de simplicité, les C.I. sont supposées nulles)

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

↓ \mathcal{L}

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \dots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) = b_m s^m \hat{u}(s) + \dots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

↓

La réponse s'exprime donc
$$\hat{y}(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \hat{u}(s)$$

A partir de l'expression de $\hat{y}(s)$:

- effectuer une décomposition en éléments simple,
- appliquer la transformée de Laplace inverse à chaque éléments,

$$\hat{y}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t),$$

à l'aide de la table des transformées.

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle

$$3\dot{y}(t) + y(t) = 5u(t), \quad u(t) = 2$$

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle

$$3\dot{y}(t) + y(t) = 5u(t), \quad u(t) = 2$$

- La réponse se décompose en :

$$\hat{y}(s) = \frac{5}{(3s+1)} \hat{u}(s) = \frac{5}{(3s+1)} \frac{2}{s} = \frac{A}{3s+1} + \frac{B}{s}$$

avec

$$A = (3s+1) \frac{10}{(3s+1)s} \Big|_{s=-1/3} = -30, \quad B = s \frac{10}{(3s+1)s} \Big|_{s=0} = 10.$$

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle

$$3\dot{y}(t) + y(t) = 5u(t), \quad u(t) = 2$$

- La réponse se décompose en :

$$\hat{y}(s) = \frac{5}{(3s+1)} \hat{u}(s) = \frac{5}{(3s+1)} \frac{2}{s} = \frac{A}{3s+1} + \frac{B}{s}$$

avec

$$A = (3s+1) \frac{10}{(3s+1)s} \Big|_{s=-1/3} = -30, \quad B = s \frac{10}{(3s+1)s} \Big|_{s=0} = 10.$$

- A l'aide de la table, la réponse temporelle est :

$$y(t) = -\frac{30}{3} e^{-\frac{1}{3}t} + 10 = 10(1 - e^{-\frac{1}{3}t}).$$

Exemple 2 : Résoudre l'équation différentielle

$$2\ddot{y}(t) + 24\dot{y}(t) + 18y(t) = 9u(t), \quad u(t) = 1$$

Exemple 2 : Résoudre l'équation différentielle

$$2\ddot{y}(t) + 24\dot{y}(t) + 18y(t) = 9u(t), \quad u(t) = 1$$

- La réponse se décompose en :

$$\hat{y}(s) = \frac{9/2}{s^2 + 12s + 9} \hat{u}(s) = \frac{A}{s + 11.196} + \frac{B}{s + 0.804} + \frac{C}{s}$$

avec

$$A = (s + 11.196) \frac{9/2}{(s + 11.196)(s + 0.804)s} \Big|_{s=-11.196} = 0.039,$$

$$B = (s + 0.804) \frac{9/2}{(s + 11.196)(s + 0.804)s} \Big|_{s=-0.804} = -0.539,$$

$$C = s \frac{9/2}{(s + 11.196)(s + 0.804)s} \Big|_{s=0} = 0.5.$$

Exemple 2 : Résoudre l'équation différentielle

$$2\ddot{y}(t) + 24\dot{y}(t) + 18y(t) = 9u(t), \quad u(t) = 1$$

- La réponse se décompose en :

$$\hat{y}(s) = \frac{9/2}{s^2 + 12s + 9} \hat{u}(s) = \frac{A}{s + 11.196} + \frac{B}{s + 0.804} + \frac{C}{s}$$

avec

$$A = (s + 11.196) \frac{9/2}{(s + 11.196)(s + 0.804)s} \Big|_{s=-11.196} = 0.039,$$

$$B = (s + 0.804) \frac{9/2}{(s + 11.196)(s + 0.804)s} \Big|_{s=-0.804} = -0.539,$$

$$C = s \frac{9/2}{(s + 11.196)(s + 0.804)s} \Big|_{s=0} = 0.5.$$

- A l'aide de la table, la réponse temporelle est :

$$y(t) = 0.039e^{-11.196t} - 0.539e^{-0.804t} + 0.5$$

Exemple 3 : Datation au carbone 14

- La proportion de C^{14} , par rapport au carbone total (C^{12} , C^{13} et C^{14}), est à peu près constante chez un organisme vivant.
- A sa mort (t_0), les échanges avec l'extérieur cessent, et la quantité de C^{14} décroît en se désintégrant.
- Soit $N(t)$ le nombre d'atome de C^{14} à l'instant t (en années) présent dans un échantillon de matière organique. On montre que la vitesse de désintégration est proportionnelle au nombre d'atome présents :

$$N'(t) = -\frac{1}{8033} N(t).$$

Exemple 3 : Datation au carbone 14

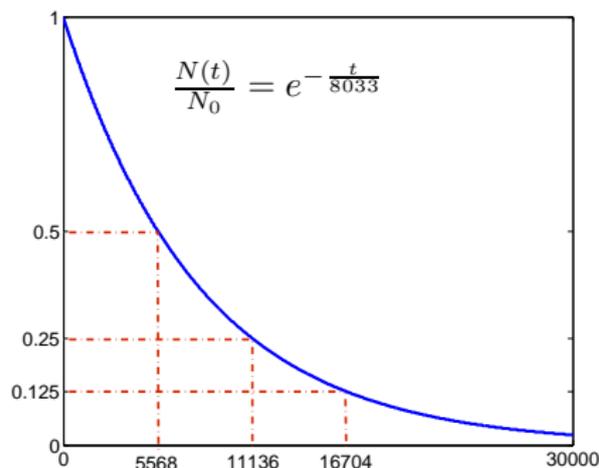
- La proportion de C^{14} , par rapport au carbone total (C^{12} , C^{13} et C^{14}), est à peu près constante chez un organisme vivant.
- A sa mort (t_0), les échanges avec l'extérieur cessent, et la quantité de C^{14} décroît en se désintégrant.
- Soit $N(t)$ le nombre d'atome de C^{14} à l'instant t (en années) présent dans un échantillon de matière organique. On montre que la vitesse de désintégration est proportionnelle au nombre d'atome présents :

$$N'(t) = -\frac{1}{8033} N(t).$$

Soit à $t_0 = 0$, la quantité initiale présente $N(0) = N_0$.

$$\text{TL : } s\hat{N}(s) - N_0 = -\frac{1}{8033} \hat{N}(s)$$

$$\Rightarrow \hat{N}(s) = \frac{N_0}{s + \frac{1}{8033}}$$



Exemple 3 : Datation au carbone 14

- La proportion de C^{14} , par rapport au carbone total (C^{12} , C^{13} et C^{14}), est à peu près constante chez un organisme vivant.
- A sa mort (t_0), les échanges avec l'extérieur cessent, et la quantité de C^{14} décroît en se désintégrant.
- Soit $N(t)$ le nombre d'atome de C^{14} à l'instant t (en années) présent dans un échantillon de matière organique. On montre que la vitesse de désintégration est proportionnelle au nombre d'atome présents :

$$N'(t) = -\frac{1}{8033} N(t).$$

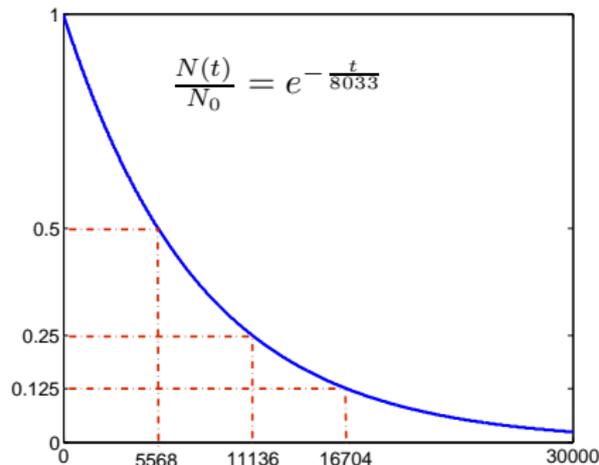
Soit à $t_0 = 0$, la quantité initiale présente $N(0) = N_0$.

$$\text{TL : } s\hat{N}(s) - N_0 = -\frac{1}{8033} \hat{N}(s)$$

$$\Rightarrow \hat{N}(s) = \frac{N_0}{s + \frac{1}{8033}}$$

Expression temporelle :

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{1}{8033}t}$$



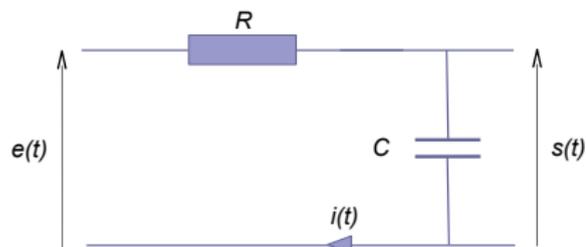
Exemple 4 : Circuit RC

Filtre passe-bas du 1^{er} ordre :

- loi des mailles : $e(t) = Ri(t) + s(t)$,
- courant du condensateur : $i(t) = C \frac{ds(t)}{dt}$.

Nous avons donc la relation entrée-sortie :

$$RC\dot{s}(t) + s(t) = e(t)$$



Exemple 4 : Circuit RC

Filtre passe-bas du 1^{er} ordre :

- loi des mailles : $e(t) = Ri(t) + s(t)$,
- courant du condensateur : $i(t) = C \frac{ds(t)}{dt}$.

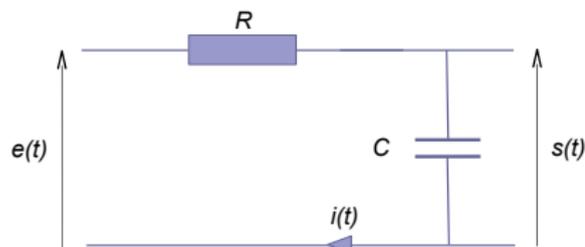
Nous avons donc la relation entrée-sortie :

$$RC\dot{s}(t) + s(t) = e(t)$$

Pour une tension d'entrée de type échelon,
 $e(t) = 5V$:

$$\text{TL : } RC s\hat{s}(s) + \hat{s}(s) = \hat{e}(s)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{s}(s) &= \frac{1}{RCs + 1} \frac{5}{s} \\ &= \frac{5}{s} - \frac{5}{s + \frac{1}{RC}} \end{aligned}$$



Exemple 4 : Circuit RC

Filtre passe-bas du 1^{er} ordre :

- loi des mailles : $e(t) = Ri(t) + s(t)$,
- courant du condensateur : $i(t) = C \frac{ds(t)}{dt}$.

Nous avons donc la relation entrée-sortie :

$$RC\dot{s}(t) + s(t) = e(t)$$

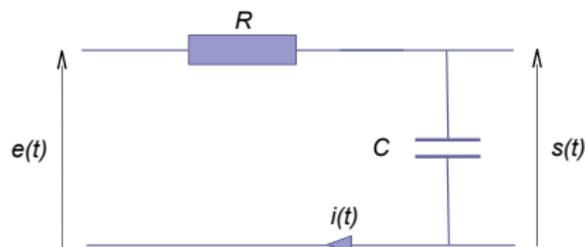
Pour une tension d'entrée de type échelon,
 $e(t) = 5V$:

$$\text{TL : } RC s\hat{s}(s) + \hat{s}(s) = \hat{e}(s)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{s}(s) &= \frac{1}{RCs + 1} \frac{5}{s} \\ &= \frac{5}{s} - \frac{5}{s + \frac{1}{RC}} \end{aligned}$$

Expression temporelle

$$s(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$



Exemple 4 : Circuit RC

Filtre passe-bas du 1^{er} ordre :

- loi des mailles : $e(t) = Ri(t) + s(t)$,
- courant du condensateur : $i(t) = C \frac{ds(t)}{dt}$.

Nous avons donc la relation entrée-sortie :

$$RC\dot{s}(t) + s(t) = e(t)$$

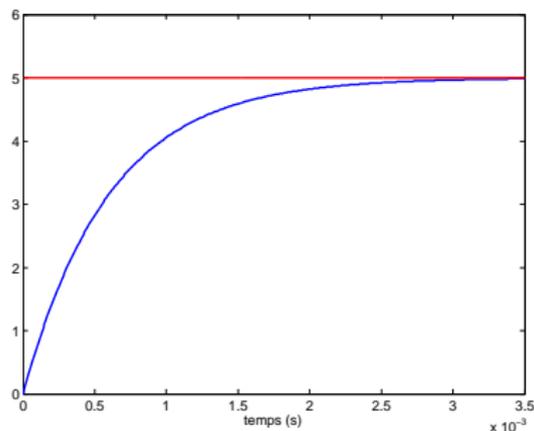
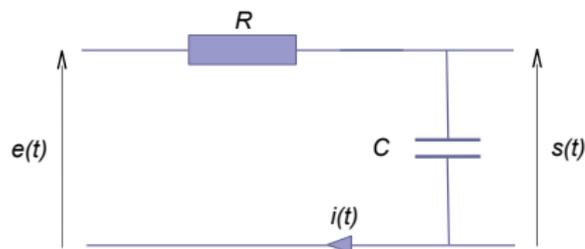
Pour une tension d'entrée de type échelon,
 $e(t) = 5V$:

$$\text{TL : } RC s\hat{s}(s) + \hat{s}(s) = \hat{e}(s)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{s}(s) &= \frac{1}{RCs + 1} \frac{5}{s} \\ &= \frac{5}{s} - \frac{5}{s + \frac{1}{RC}} \end{aligned}$$

Expression temporelle

$$s(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$



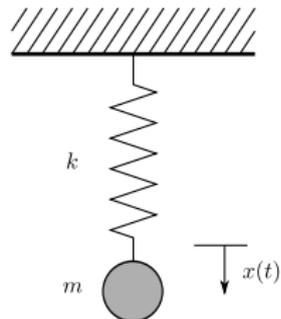
$$(R = 3k\Omega, C = 0.2\mu F)$$

Exemple 5 : Système masse-ressort

Application du PFD :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

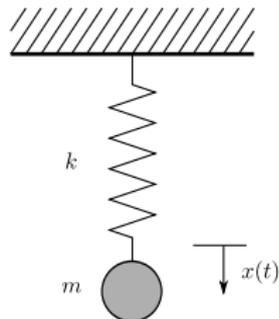


Exemple 5 : Système masse-ressort

Application du PFD :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.



Conditions initiales :

- position $x(0) = 0.01 \text{ m}$,
- vitesse $\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$.

$$\text{TL : } s^2 \hat{x}(s) - sx(0) + \omega_0^2 \hat{x}(s) = 0$$

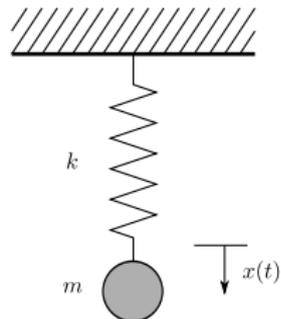
$$\Rightarrow \hat{x}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} x_0$$

Exemple 5 : Système masse-ressort

Application du PFD :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.



Conditions initiales :

- position $x(0) = 0.01 \text{ m}$,
- vitesse $\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$.

$$\text{TL : } s^2 \hat{x}(s) - sx(0) + \omega_0^2 \hat{x}(s) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{x}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} x_0$$

Expression temporelle

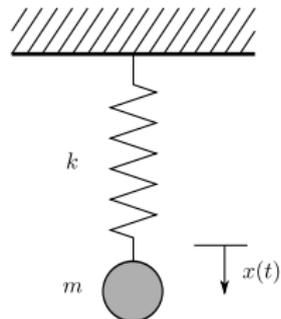
$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

Exemple 5 : Système masse-ressort

Application du PFD :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$



Conditions initiales :

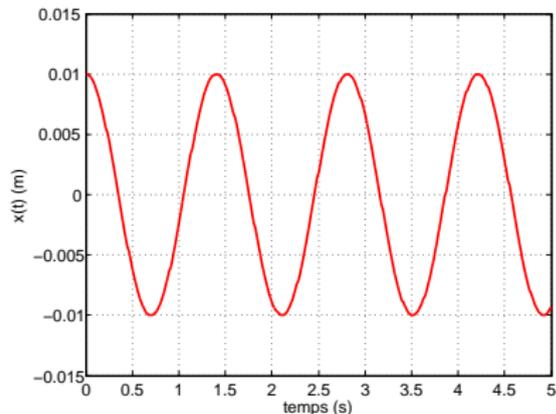
- position $x(0) = 0.01 \text{ m}$,
- vitesse $\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$.

$$\text{TL : } s^2 \hat{x}(s) - sx(0) + \omega_0^2 \hat{x}(s) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{x}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} x_0$$

Expression temporelle

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$



$$(m = 0.1 \text{ kg}, k = 2 \text{ N/m})$$

Sommaire

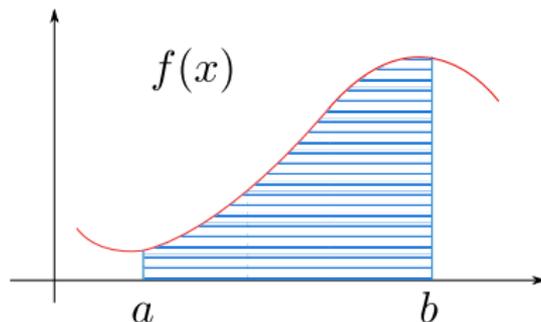
- 4 Intégration numérique
 - Position du problème
 - Méthode des rectangles
 - Méthode des trapèzes
 - Méthode de Simpson
 - Applications
- 5 Équations différentielles ordinaires
 - Position du problème
 - Méthode d'Euler
 - Méthode de Taylor
 - Méthodes de Runge-Kutta
 - Cas des EDO d'ordre 2
 - Exemples

Position du problème

Objectif : évaluer numériquement la valeur d'une intégrale

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

où $f(x)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

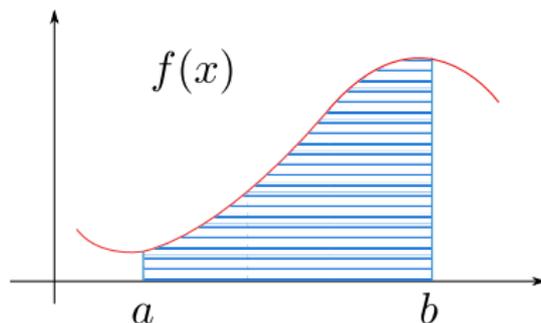


Position du problème

Objectif : évaluer numériquement la valeur d'une intégrale

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

où $f(x)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

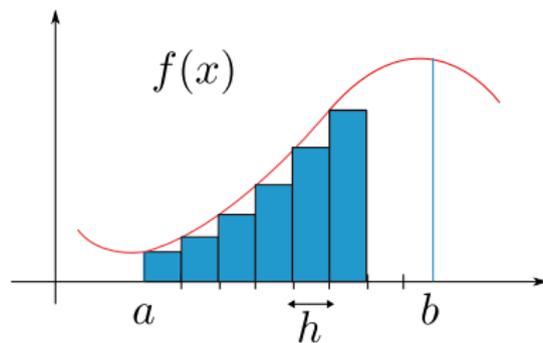


A partir d'un ordinateur, on ne peut manipuler qu'un nombre fini de points

\Rightarrow considérons $(n + 1)$ points de l'intervalle $[a, b]$: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$

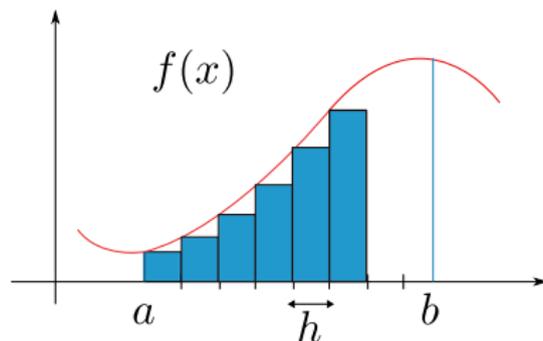
Méthode des rectangles

Principe : évaluer l'aire à partir d'une somme de rectangles



Méthode des rectangles

Principe : évaluer l'aire à partir d'une somme de rectangles



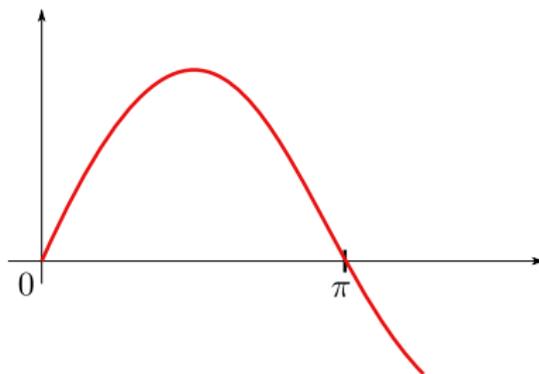
A partir de $(n + 1)$ points équidistants, on a n rectangles et $h = \frac{b - a}{n}$

$$\int_a^b f(x) dx \simeq h f(a) + h f(a + h) + h f(a + 2h) + \cdots + h f(a + (n - 1)h)$$
$$\simeq h \sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih)$$

Exemple : considérons la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$

Par calcul (ici c'est facile!) :

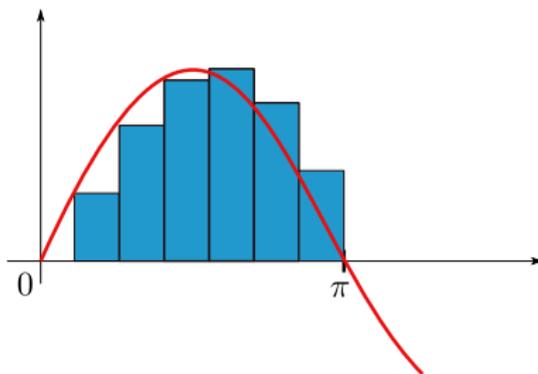
$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = 2$$



Exemple : considérons la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$

Par calcul (ici c'est facile!) :

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = 2$$



Posons $n = 7$, soit 8 points, on a $h = \frac{\pi}{7}$

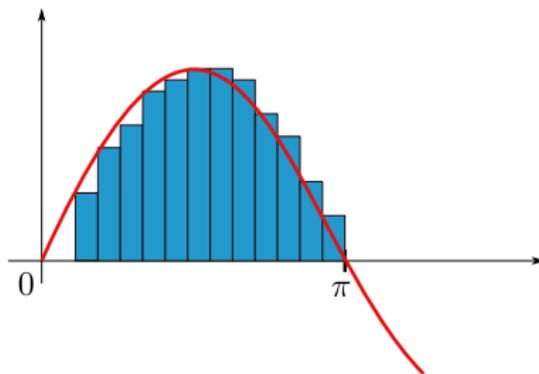
$$I \simeq \frac{\pi}{7} \times 0 + \frac{\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} \sin 2\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} \sin 3\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} \sin 4\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} \sin 5\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} \sin 6\frac{\pi}{7}$$

$$\simeq 1.9663$$

Exemple : considérons la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$

Par calcul (ici c'est facile!) :

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = 2$$

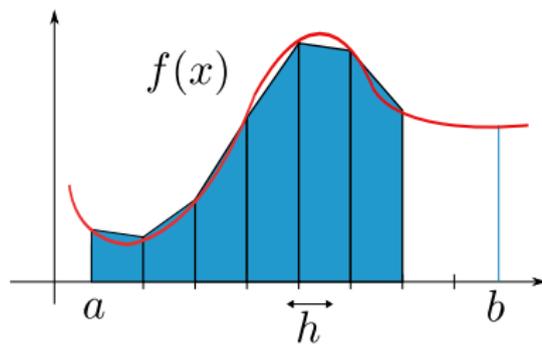


Posons $n = 13$, soit 14 points, on a $h = \frac{\pi}{13}$

$$I \simeq 1.9902$$

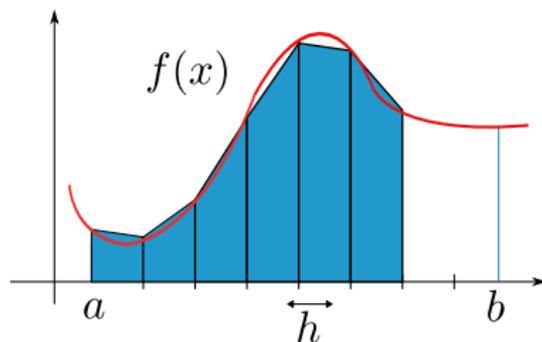
Méthode des trapèzes

Principe : évaluer l'aire à partir d'une somme de trapèzes



Méthode des trapèzes

Principe : évaluer l'aire à partir d'une somme de trapèzes



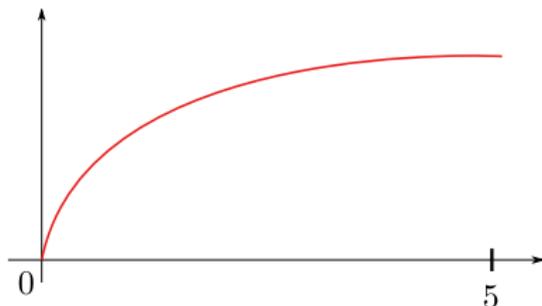
A partir de $(n + 1)$ points équidistants, on a n trapèzes et $h = \frac{b - a}{n}$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\simeq \sum_{i=0}^{n-1} h f(a + ih) + h \frac{f(a + (i + 1)h) - f(a + ih)}{2} \\ &\simeq h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a + ih) + f(a + (i + 1)h)}{2}\end{aligned}$$

Exemple : considérons la fonction $f(x) = 1 - e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 5]$

Par calcul, (ici aussi c'est facile!) :

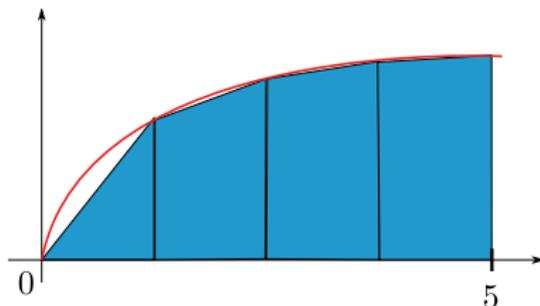
$$I = \int_0^5 1 - e^{-x} dx = \left[x + e^{-x} \right]_0^5 = 4 + e^{-5} \simeq 4.0067$$



Exemple : considérons la fonction $f(x) = 1 - e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 5]$

Par calcul, (ici aussi c'est facile!) :

$$I = \int_0^5 1 - e^{-x} dx = \left[x + e^{-x} \right]_0^5 = 4 + e^{-5} \simeq 4.0067$$



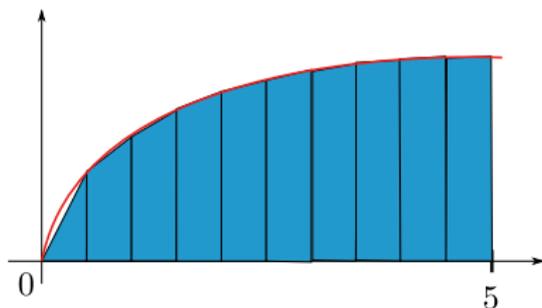
Posons $n = 4$, soit 5 points, on a $h = \frac{5}{4}$

$$\begin{aligned} I &\simeq \frac{h}{2}(f(0) + f(h)) + \frac{h}{2}(f(h) + f(2h)) + \frac{h}{2}(f(2h) + f(3h)) + \frac{h}{2}(f(3h) + f(4h)) \\ &\simeq 3.8806 \end{aligned}$$

Exemple : considérons la fonction $f(x) = 1 - e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, 5]$

Par calcul, (ici aussi c'est facile!) :

$$I = \int_0^5 1 - e^{-x} dx = \left[x + e^{-x} \right]_0^5 = 4 + e^{-5} \simeq 4.0067$$

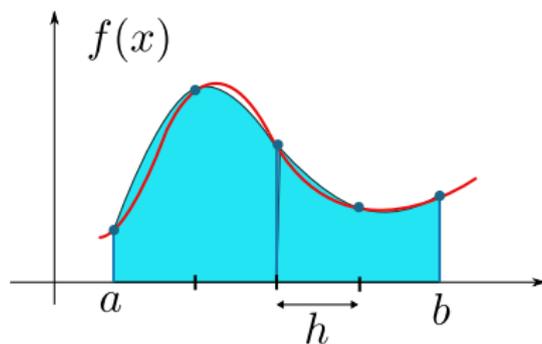


Posons $n = 10$, soit 11 points, on a $h = \frac{1}{2}$

$$I \simeq 3.9861$$

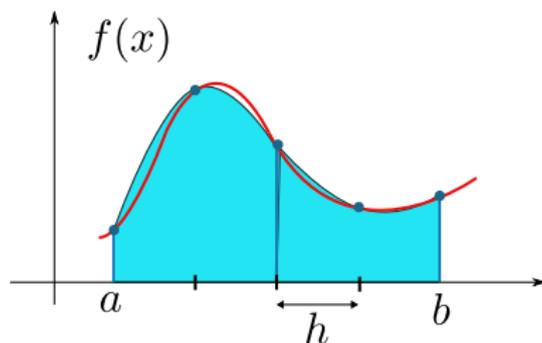
Méthode de Simpson

Principe : chaque intervalle est approximé par une parabole



Méthode de Simpson

Principe : chaque intervalle est approximé par une parabole



- On divise $[a, b]$ en $2n$ sous-intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{2n}$
- Un polynôme de degré 2 est construit à partir de 3 points sur 2 sous-intervalles.

- L'équation de la parabole passant par 3 points x_i , x_{i+1} et x_{i+2} s'écrit :

$$p(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x - x_i)(x - x_{i+1})$$

- L'équation de la parabole passant par 3 points x_i , x_{i+1} et x_{i+2} s'écrit :

$$p(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x - x_i)(x - x_{i+1})$$

- Et l'aire sous cette parabole est donnée par :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} p(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}) \right)$$

Ceci nous donne donc une approximation de $\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx$.

- L'équation de la parabole passant par 3 points x_i , x_{i+1} et x_{i+2} s'écrit :

$$p(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x - x_i)(x - x_{i+1})$$

- Et l'aire sous cette parabole est donnée par :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} p(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}) \right)$$

Ceci nous donne donc une approximation de $\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx$.

L'intégration sur l'ensemble de l'intervalle $[a, b]$ est approximée par :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\simeq \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right) + \frac{h}{3} \left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) \right) \\ &\quad + \frac{h}{3} \left(f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6) \right) + \cdots + \frac{h}{3} \left(f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}) \right) \\ &\simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} \left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right) \end{aligned}$$

Démonstration

L'équation de la parabole passant par 3 points x_i , x_{i+1} et x_{i+2} s'écrit :

$$p(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x - x_i)(x - x_{i+1})$$

avec

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}$$

Démonstration

L'équation de la parabole passant par 3 points x_i , x_{i+1} et x_{i+2} s'écrit :

$$p(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x - x_i)(x - x_{i+1})$$

avec

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \qquad f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}$$

Calculons son intégral :

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+2}} p(x) dx &= \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) \\ &\quad + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}](x - x_i)(x - x_{i+1}) \quad dx \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$s = \frac{x - x_i}{h} \quad \text{soit} \quad (x - x_i) = s h \quad \text{et} \quad dx = h ds$$

Ce qui entraîne

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} p(x) dx = \int_i^{i+2} \left[f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}]hs + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]h^2s(s-1) \right] h ds$$

Effectuons le changement de variable suivant :

$$s = \frac{x - x_i}{h} \quad \text{soit} \quad (x - x_i) = s h \quad \text{et} \quad dx = h ds$$

Ce qui entraîne

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} p(x) dx = \int_i^{i+2} \left[f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}]hs + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]h^2s(s-1) \right] h ds$$

Nous obtenons après intégration par rapport à s :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} p(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}) \right)$$

Exemple : Reprenons la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$

Par calcul :
$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

Exemple : Reprenons la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$

Par calcul :
$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

Posons $n = 1$, soit 2 sous-intervalles de longueur $h = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} I &\simeq \frac{\pi}{6} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi \right) \\ &\simeq 2.0944 \end{aligned}$$

Exemple : Reprenons la fonction $f(x) = \sin x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$

Par calcul :
$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

Posons $n = 1$, soit 2 sous-intervalles de longueur $h = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} I &\simeq \frac{\pi}{6} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi \right) \\ &\simeq 2.0944 \end{aligned}$$

Posons $n = 2$, soit 4 sous-intervalles de longueur $h = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} I &\simeq \frac{\pi}{12} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{12} \left(\sin \frac{\pi}{2} + 4 \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \pi \right) \\ &\simeq 2.0046 \end{aligned}$$

Exemples

Application 1 : calcul approché de π

Signification géométrique de la constante π : surface du disque unité.

$$x^2 + y^2 = 1$$

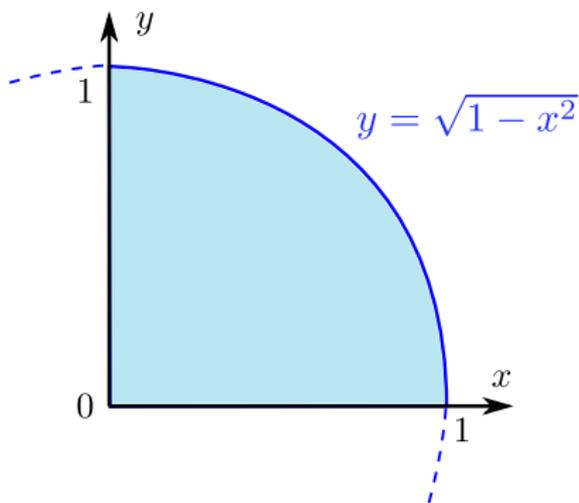
Exemples

Application 1 : calcul approché de π

Signification géométrique de la constante π : surface du disque unité.

$$x^2 + y^2 = 1$$

Sachant que l'aire du disque est égal à 4 fois celle du quart de disque, calculons l'intégrale du premier quadrant.



Aire du disque unité :

$$I = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Aire du disque unité :

$$I = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Méthode des trapèzes avec 5 points (donc $h = 0.25$)

$$\begin{aligned} I &= 0.5(1 + \sqrt{1-0.25^2}) + 0.5(\sqrt{1-0.25^2} + \sqrt{1-0.5^2}) \\ &\quad + 0.5(\sqrt{1-0.5^2} + \sqrt{1-0.75^2}) + 0.5(\sqrt{1-0.75^2}) \\ &= 2.9957 \end{aligned}$$

Aire du disque unité :

$$I = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Méthode des trapèzes avec 5 points (donc $h = 0.25$)

$$\begin{aligned} I &= 0.5(1 + \sqrt{1-0.25^2}) + 0.5(\sqrt{1-0.25^2} + \sqrt{1-0.5^2}) \\ &\quad + 0.5(\sqrt{1-0.5^2} + \sqrt{1-0.75^2}) + 0.5(\sqrt{1-0.75^2}) \\ &= 2.9957 \end{aligned}$$

- avec 21 points, soit $h = 0.05$, on trouve : $I = 3.1284$,
- avec 101 points, soit $h = 0.01$, on trouve : $I = 3.1404$,
- avec 1001 points, soit $h = 0.001$, on trouve : $I = 3.141555$.

Exemple 2 : profil de vitesse d'un robot mobile

Considérons une base mobile en mouvement suivant une trajectoire rectiligne. Un accéléromètre mesure l'accélération $\gamma(t)$ du robot suivant cet axe.

t (s)	0.0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
γ (m/s^2)	0	0.11	0.32	0.64	0.89	0.97	0.94	0.85
t (s)	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	
γ (m/s^2)	0.66	0.29	0.1	0.05	0.0	0.0	0.0	

Exemple 2 : profil de vitesse d'un robot mobile

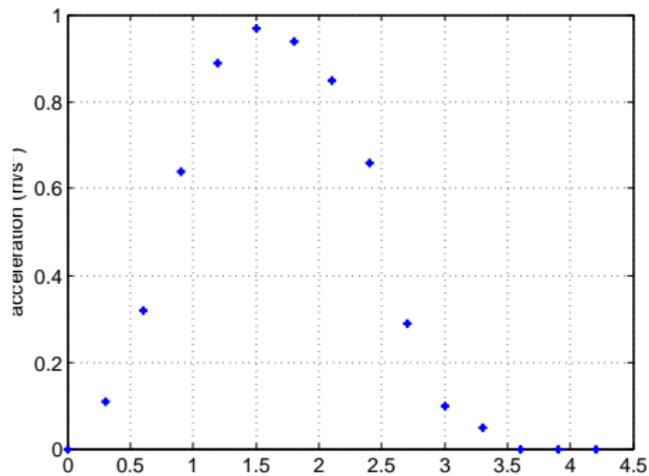
Considérons une base mobile en mouvement suivant une trajectoire rectiligne. Un accéléromètre mesure l'accélération $\gamma(t)$ du robot suivant cet axe.

t (s)	0.0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
γ (m/s^2)	0	0.11	0.32	0.64	0.89	0.97	0.94	0.85
t (s)	2.4	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	
γ (m/s^2)	0.66	0.29	0.1	0.05	0.0	0.0	0.0	

On cherche à estimer la vitesse instantanée du robot :

$$v(t) = \int_0^t \gamma(u) du$$

Il faut intégrer les valeurs de γ jusqu'à l'instant t_i pour calculer $v(t_i) = v_i$.



Appliquons la méthode des trapèzes

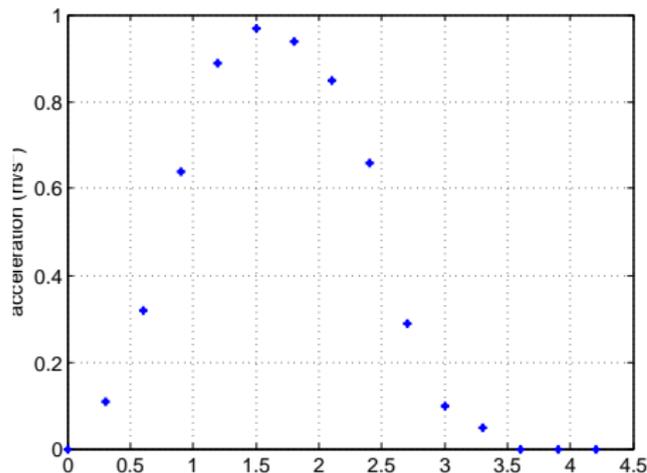
$$v(0.3) = \frac{h}{2}(0 + 0.11)$$

$$v(0.6) = \frac{h}{2}(0 + 0.11) + \frac{h}{2}(0.11 + 0.32)$$

$$v(0.9) = \frac{h}{2}(0 + 0.11) + \frac{h}{2}(0.11 + 0.32) + \frac{h}{2}(0.32 + 0.64)$$

$$v(1.2) = \frac{h}{2}(0 + 0.11) + \frac{h}{2}(0.11 + 0.32) + \frac{h}{2}(0.32 + 0.64) + \frac{h}{2}(0.64 + 0.89)$$

$$V(1.5) = \dots$$



Appliquons la méthode des trapèzes

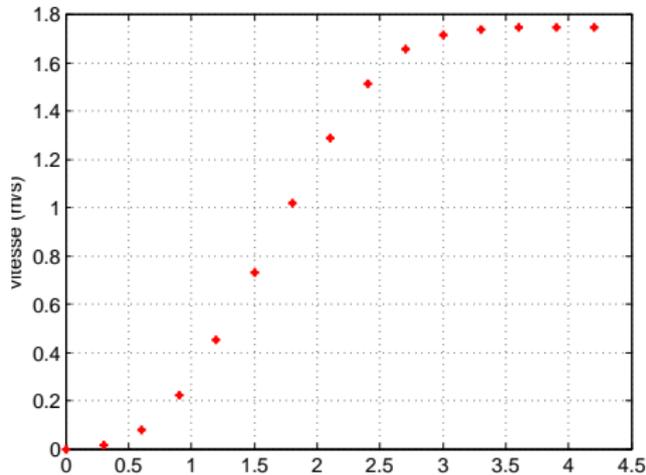
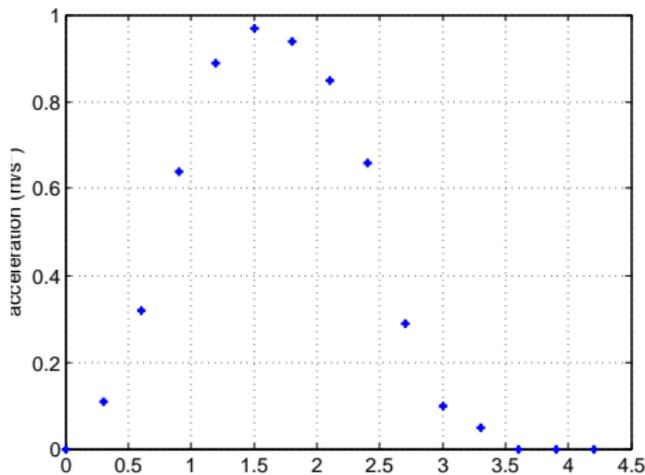
$$v(0.3) = \frac{h}{2}(0 + 0.11)$$

$$v(0.6) = \frac{h}{2}(0 + 0.11) + \frac{h}{2}(0.11 + 0.32)$$

$$v(0.9) = \frac{h}{2}(0 + 0.11) + \frac{h}{2}(0.11 + 0.32) + \frac{h}{2}(0.32 + 0.64)$$

$$v(1.2) = \frac{h}{2}(0 + 0.11) + \frac{h}{2}(0.11 + 0.32) + \frac{h}{2}(0.32 + 0.64) + \frac{h}{2}(0.64 + 0.89)$$

$$V(1.5) = \dots$$



Sommaire

- 4 Intégration numérique
 - Position du problème
 - Méthode des rectangles
 - Méthode des trapèzes
 - Méthode de Simpson
 - Applications
- 5 Équations différentielles ordinaires
 - Position du problème
 - Méthode d'Euler
 - Méthode de Taylor
 - Méthodes de Runge-Kutta
 - Cas des EDO d'ordre 2
 - Exemples

Position du problème

Objectif : résoudre numériquement des équations différentielles d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y' & = f(t, y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire trouver une approximation de la fonction $y(t)$ solution de l'équation.

Position du problème

Objectif : résoudre numériquement des équations différentielles d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire trouver une approximation de la fonction $y(t)$ solution de l'équation.

- $y(t_0) = y_0$ est la condition initiale.
- Avec les outils numériques, pas possible d'estimer toutes les valeurs de $y(t)$ quelque soit t

⇒ nécessité de discrétiser $t \rightarrow t_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$

Position du problème

Objectif : résoudre numériquement des équations différentielles d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y' & = f(t, y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire trouver une approximation de la fonction $y(t)$ solution de l'équation.

- $y(t_0) = y_0$ est la condition initiale.
- Avec les outils numériques, pas possible d'estimer toutes les valeurs de $y(t)$ quelque soit t

\Rightarrow nécessité de discrétiser $t \rightarrow t_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$

Notation :

- On note $y(t_i)$ la solution analytique de l'équation en $t = t_i$.
- On note y_i la solution approchée au même instant.

(exemples d'équations différentielles et résolution analytique)

Exemple 1 :

$$\begin{cases} y' &= -4y + 3 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

(exemples d'équations différentielles et résolution analytique)

Exemple 1 :

$$\begin{cases} y' &= -4y + 3 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

Solution de l'équation sans second membre :

$$y(t) = C e^{-4t}$$

Solution particulière :

$$y(t) = \frac{3}{4}$$

La solution générale s'écrit donc :

$$y(t) = C e^{-4t} + \frac{3}{4}$$

(exemples d'équations différentielles et résolution analytique)

Exemple 1 :

$$\begin{cases} y' &= -4y + 3 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

Solution de l'équation sans second membre :

$$y(t) = C e^{-4t}$$

Solution particulière :

$$y(t) = \frac{3}{4}$$

La solution générale s'écrit donc :

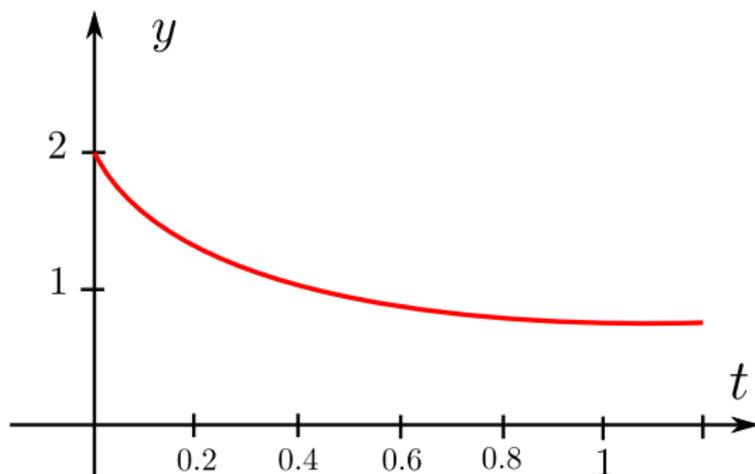
$$y(t) = C e^{-4t} + \frac{3}{4}$$

A partir de la condition initiale (en $t = 0$, $y(0) = 2$), nous pouvons déterminer la solution

$$y(t) = \frac{5}{4} e^{-4t} + \frac{3}{4}$$

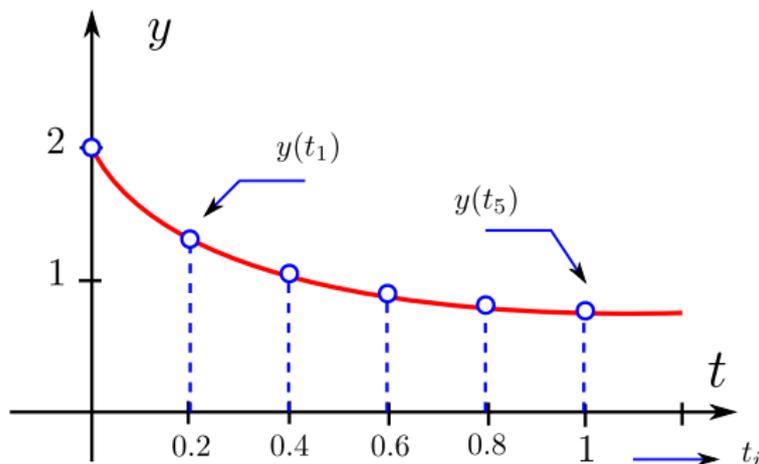
Nous avons calculé analytiquement la solution $y(t)$ de l'équation différentielle.

représentation de la solution



Nous avons calculé analytiquement la solution $y(t)$ de l'équation différentielle.

représentation de la solution



⇒ Peut-on calculer par méthode numérique des points de la courbe sans résoudre l'équation ? ou au moins une approximation...

Exemple 2 :

$$\begin{cases} y' &= t y \\ y(1) &= 2 \end{cases}$$

Exemple 2 :

$$\begin{cases} y' &= t y \\ y(1) &= 2 \end{cases}$$

Effectuons une séparation des variables

$$\frac{dy}{dt} = t y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = t dt$$

Intégrons l'égalité

$$\ln y = \frac{t^2}{2} + C$$

Nous obtenons donc la solution générale

$$y(t) = C e^{t^2/2}$$

Exemple 2 :

$$\begin{cases} y' &= t y \\ y(1) &= 2 \end{cases}$$

Effectuons une séparation des variables

$$\frac{dy}{dt} = t y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = t dt$$

Intégrons l'égalité

$$\ln y = \frac{t^2}{2} + C$$

Nous obtenons donc la solution générale

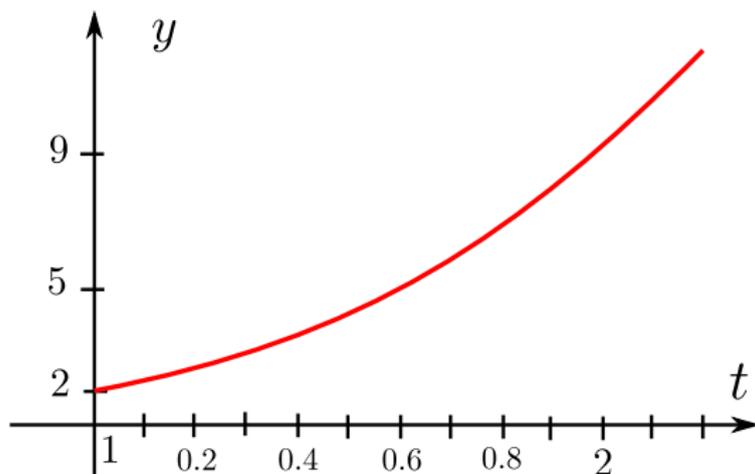
$$y(t) = C e^{t^2/2}$$

A partir de la condition initiale (en $t = 1$, $y(1) = 2$), nous pouvons déterminer la solution

$$y(t) = 2 e^{\frac{1}{2}(t^2-1)}$$

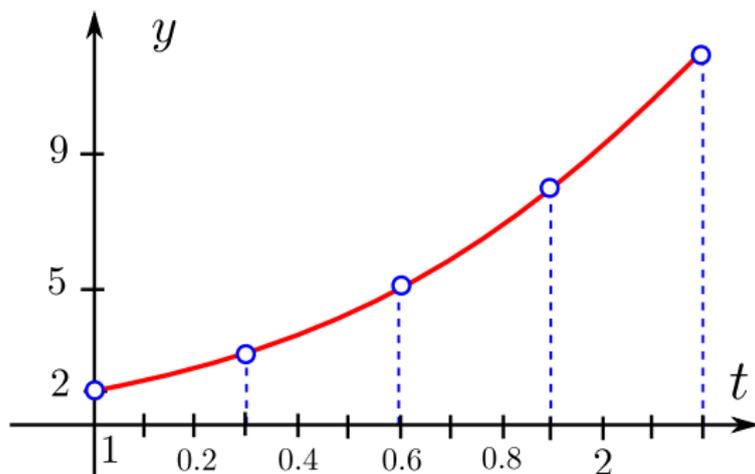
Nous avons calculé analytiquement la solution $y(t)$ de l'équation différentielle.

représentation de la solution



Nous avons calculé analytiquement la solution $y(t)$ de l'équation différentielle.

représentation de la solution



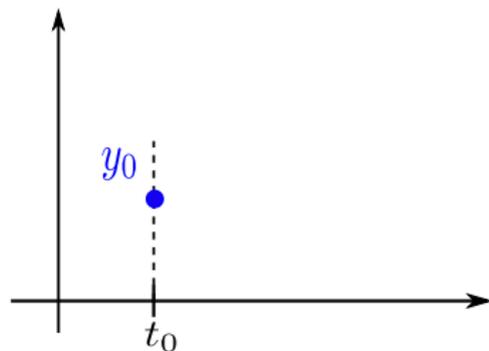
\Rightarrow Peut-on calculer par méthode numérique des points de la courbe sans résoudre l'équation ? ou au moins une approximation...

Méthode d'Euler

Données du problème :

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Nous connaissons le point de départ : $(t_0, y(t_0))$



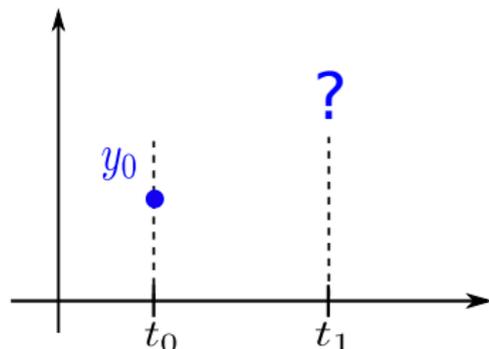
Méthode d'Euler

Données du problème :

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Nous connaissons le point de départ : $(t_0, y(t_0))$

- ⇒ Comment déterminer les points suivants ?
- ⇒ tout d'abord en t_1 , approximation de $y(t_1)$?



Méthode d'Euler

Données du problème :

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

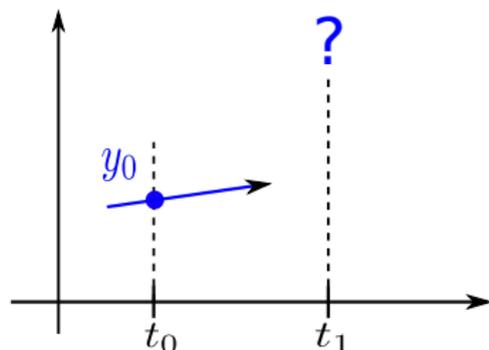
Nous connaissons le point de départ : $(t_0, y(t_0))$

⇒ Comment déterminer les points suivants ?

⇒ tout d'abord en t_1 , approximation de $y(t_1)$?

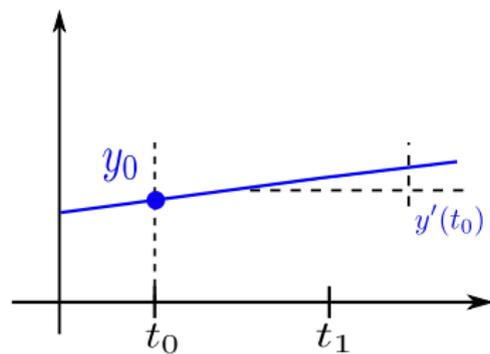
Nous connaissons également la pente en t_0

$$y'(t_0) = f(t_0, y_0)$$



Equation de la droite passant par y_0 et de pente $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$:

$$y = y(t_0) + f(t_0, y_0)(t - t_0)$$

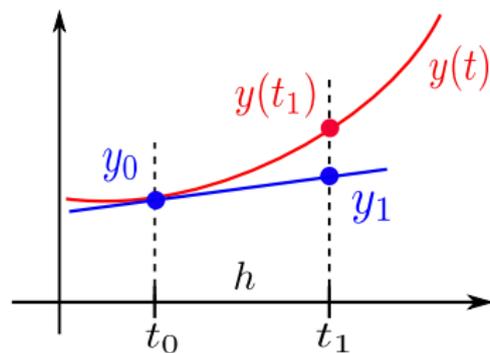


Equation de la droite passant par y_0 et de pente $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$:

$$y = y(t_0) + f(t_0, y_0)(t - t_0)$$

Le point suivant peut donc être approché en suivant la droite

$$y_1 = y(t_0) + \underbrace{f(t_0, y_0)}_h (t_1 - t_0)$$

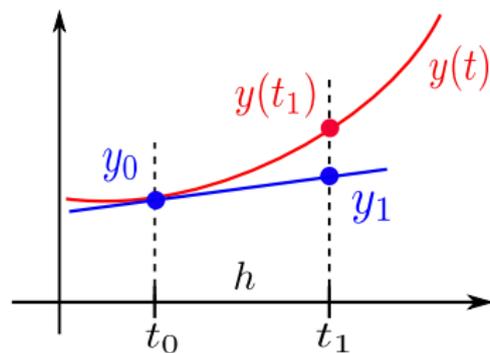


Equation de la droite passant par y_0 et de pente $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$:

$$y = y(t_0) + f(t_0, y_0)(t - t_0)$$

Le point suivant peut donc être approché en suivant la droite

$$y_1 = y(t_0) + \underbrace{f(t_0, y_0)}_h (t_1 - t_0)$$



Attention, y_1 n'est qu'une approximation de $y(t_1)$.

Nous connaissons maintenant le point : (t_1, y_1) ... approximant $(t_1, y(t_1))$

⇒ La méthode peut être répétée pour déterminer les valeurs suivantes.

Nous connaissons maintenant le point : (t_1, y_1) ... approximant $(t_1, y(t_1))$

⇒ La méthode peut être répétée pour déterminer les valeurs suivantes.

Ainsi, à la 2^{ième} itération :

$$y(t_2) \simeq y_2 = y_1 + f(t_1, y_1) \underbrace{(t_2 - t_1)}_h$$

Nous connaissons maintenant le point : (t_1, y_1) ... approximant $(t_1, y(t_1))$

⇒ La méthode peut être répétée pour déterminer les valeurs suivantes.

Ainsi, à la 2^{ième} itération :

$$y(t_2) \simeq y_2 = y_1 + f(t_1, y_1) \underbrace{(t_2 - t_1)}_h$$

Étant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N , les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \quad \text{avec} \quad t_{n+1} - t_n = h$$

Nous connaissons maintenant le point : (t_1, y_1) ... approximant $(t_1, y(t_1))$

⇒ La méthode peut être répétée pour déterminer les valeurs suivantes.

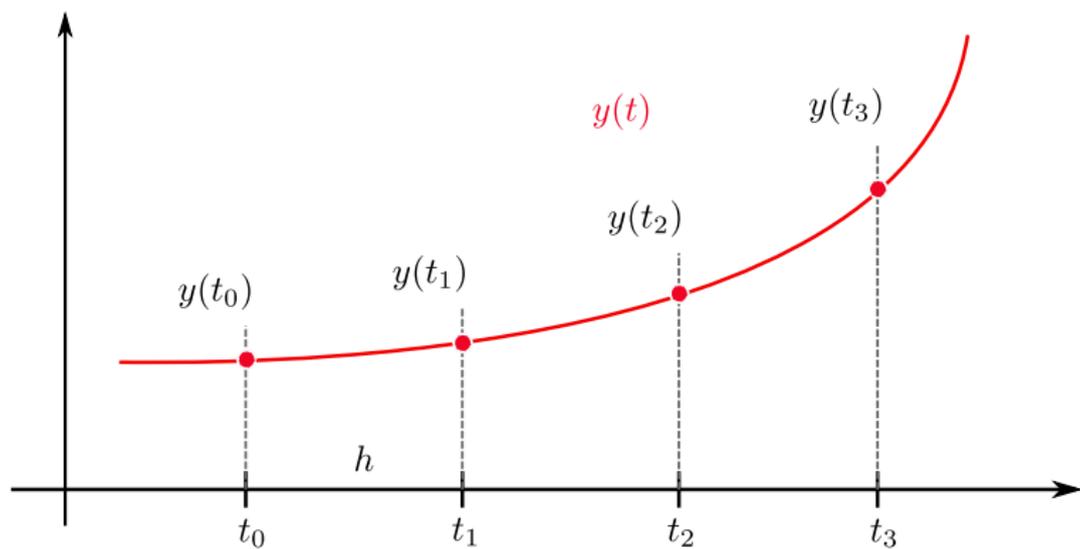
Ainsi, à la 2^{ième} itération :

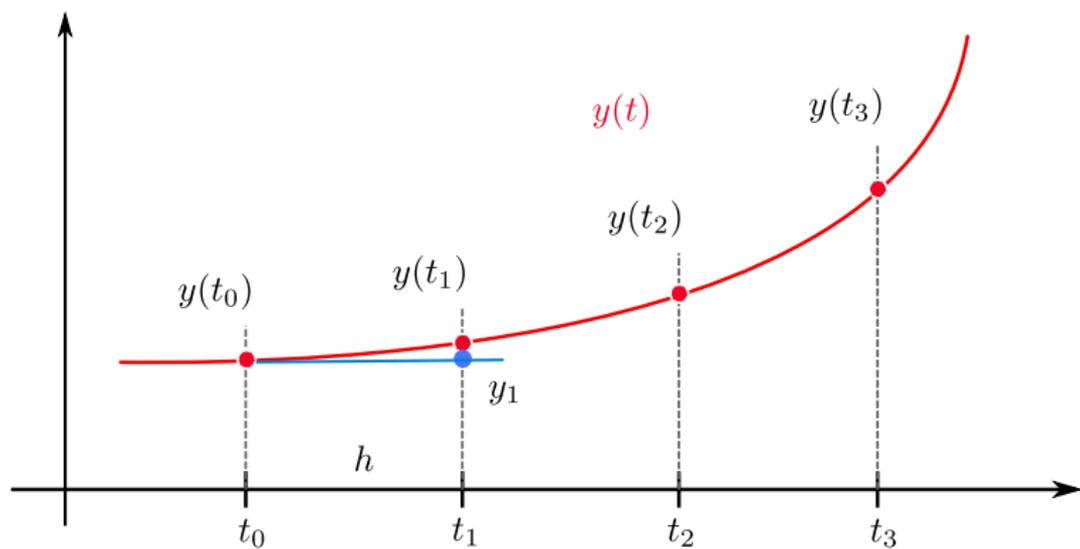
$$y(t_2) \simeq y_2 = y_1 + f(t_1, y_1) \underbrace{(t_2 - t_1)}_h$$

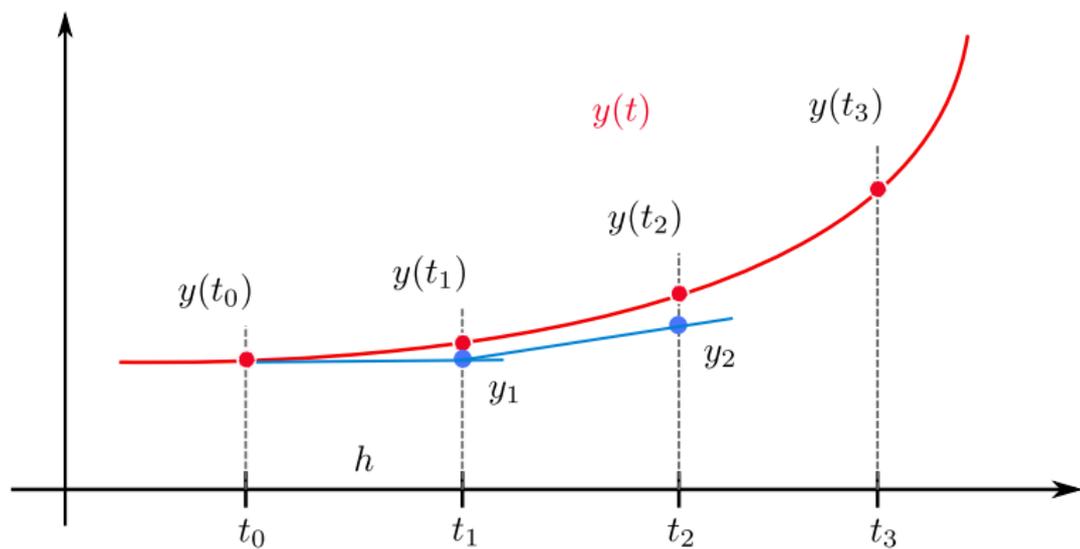
Étant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N , les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

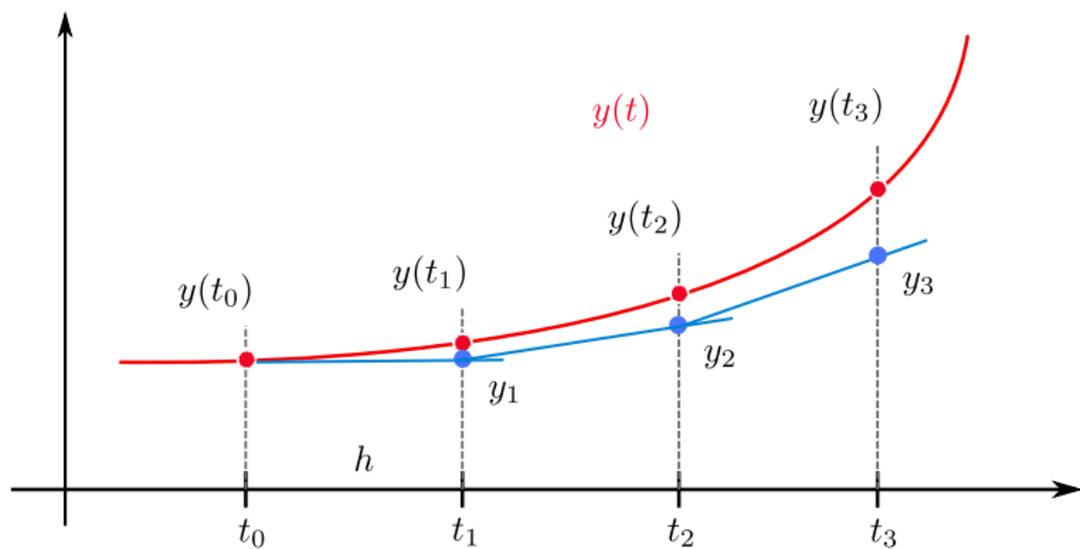
$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \quad \text{avec} \quad t_{n+1} - t_n = h$$

◆ Il est important de noter que l'erreur introduite sur le premier calcul a des répercussions sur les suivants. Il y a propagation de l'erreur.









Exemple 1 :

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y + t + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Exemple 1 :

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y + t + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

On montre que la solution analytique s'écrit : $y(t) = e^{-t} + t$

Exemple 1 :

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y + t + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

On montre que la solution analytique s'écrit : $y(t) = e^{-t} + t$

Résolvons numériquement cette équation par la méthode d'Euler avec un pas de $h = 0.1$.

Exemple 1 :

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y + t + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

On montre que la solution analytique s'écrit : $y(t) = e^{-t} + t$

Résolvons numériquement cette équation par la méthode d'Euler avec un pas de $h = 0.1$.

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0.1f(0, 1) = 1$$

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1 + 0.1f(0.1, 1) = 1.01$$

$$y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2) = 1.01 + 0.1f(0.2, 1.01) = 1.029$$

...

Exemple 1 :

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y + t + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

On montre que la solution analytique s'écrit : $y(t) = e^{-t} + t$

Résolvons numériquement cette équation par la méthode d'Euler avec un pas de $h = 0.1$.

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0.1f(0, 1) = 1$$

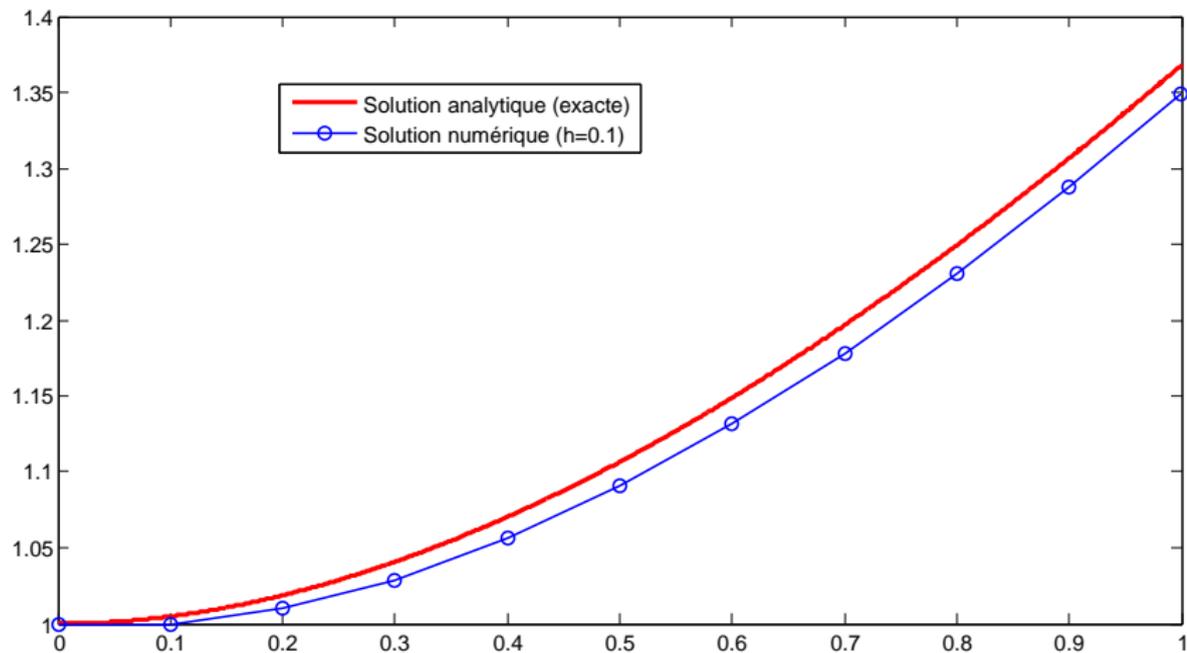
$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1 + 0.1f(0.1, 1) = 1.01$$

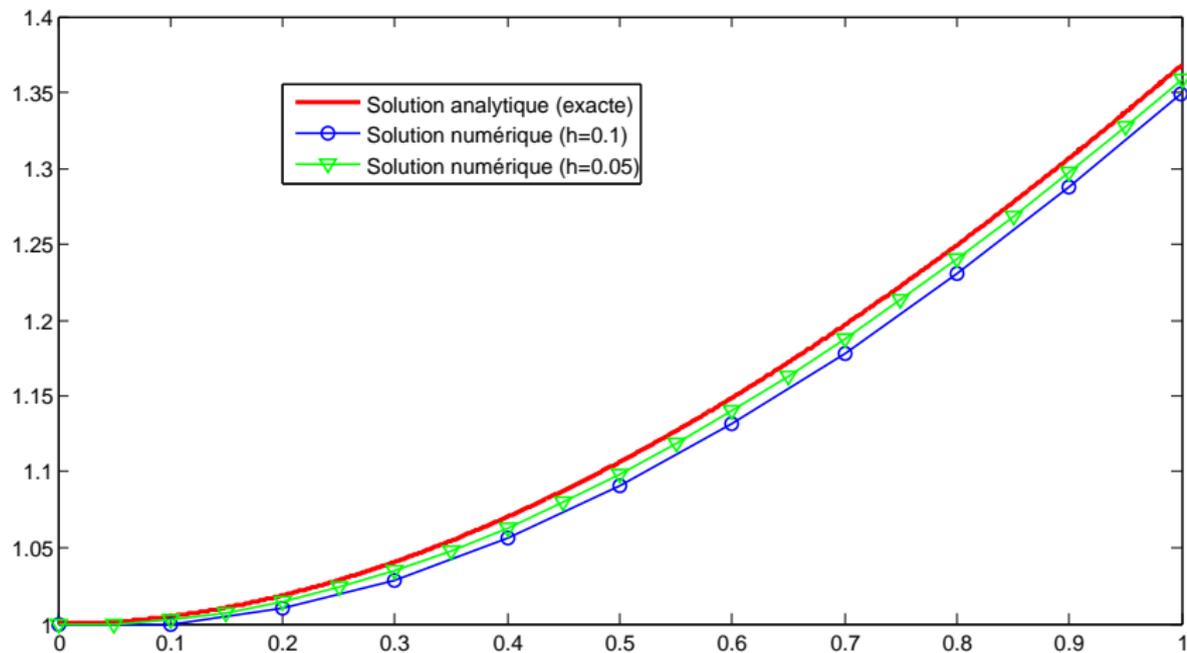
$$y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2) = 1.01 + 0.1f(0.2, 1.01) = 1.029$$

...

t_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$y(t_i)$	1.000	1.004	1.018	1.040	1.070	1.106	1.148	1.196	1.249	1.306	1.367
y_i	1.000	1.000	1.010	1.029	1.056	1.090	1.131	1.178	1.230	1.287	1.348
e	0.00	0.48	0.87	1.18	1.42	1.60	1.73	1.82	1.88	1.91	1.92

La dernière ligne e correspond à l'erreur : $|y(t_i) - y_i|$ avec un coefficient de 10^{-2} .





Méthode de Taylor

Se base sur le développement en série de Taylor. On cherche au temps $t = t_n$ une approximation de la solution en $t_{n+1} = t_n + h$:

$$y(t_n + h) \simeq y(t_n) + y'(t_n) h + y''(t_n) \frac{h^2}{2}$$

Méthode de Taylor

Se base sur le développement en série de Taylor. On cherche au temps $t = t_n$ une approximation de la solution en $t_{n+1} = t_n + h$:

$$\begin{aligned}y(t_n + h) &\simeq y(t_n) + y'(t_n) h + y''(t_n) \frac{h^2}{2} \\ &\simeq y(t_n) + f(t_n, y(t_n)) h + f'(t_n, y(t_n)) \frac{h^2}{2}\end{aligned}$$

Méthode de Taylor

Se base sur le développement en série de Taylor. On cherche au temps $t = t_n$ une approximation de la solution en $t_{n+1} = t_n + h$:

$$\begin{aligned}y(t_n + h) &\simeq y(t_n) + y'(t_n) h + y''(t_n) \frac{h^2}{2} \\ &\simeq y(t_n) + f(t_n, y(t_n)) h + f'(t_n, y(t_n)) \frac{h^2}{2}\end{aligned}$$

Exprimons $y''(t)$:

$$y''(t) = f'(t, y(t)) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} y'(t)$$

Méthode de Taylor

Se base sur le développement en série de Taylor. On cherche au temps $t = t_n$ une approximation de la solution en $t_{n+1} = t_n + h$:

$$\begin{aligned}y(t_n + h) &\simeq y(t_n) + y'(t_n) h + y''(t_n) \frac{h^2}{2} \\ &\simeq y(t_n) + f(t_n, y(t_n)) h + f'(t_n, y(t_n)) \frac{h^2}{2}\end{aligned}$$

Exprimons $y''(t)$:

$$y''(t) = f'(t, y(t)) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} y'(t)$$

Finalement, nous avons :

$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right]$$

Cette formule peut donc être exploitée pour calculer une solution approchée y_n ,

- en remplaçant $y(t_n)$ par y_n ,
- en remplaçant $f(t_n, y(t_n))$ par $f(t_n, y_n)$,
- en calculant préalablement $\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}$ et $\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}$.

Cette formule peut donc être exploitée pour calculer une solution approchée y_n ,

- en remplaçant $y(t_n)$ par y_n ,
- en remplaçant $f(t_n, y(t_n))$ par $f(t_n, y_n)$,
- en calculant préalablement $\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}$ et $\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}$.

Étant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N , les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n) \right]$$

avec $t_{n+1} = t_n + h$.

Cette formule peut donc être exploitée pour calculer une solution approchée y_n ,

- en remplaçant $y(t_n)$ par y_n ,
- en remplaçant $f(t_n, y(t_n))$ par $f(t_n, y_n)$,
- en calculant préalablement $\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t}$ et $\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y}$.

Étant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N , les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} f(t_n, y_n) \right]$$

avec $t_{n+1} = t_n + h$.

◆ Nota : Si l'on ne tient pas compte du dernier terme (lié à la dérivée seconde de y), nous retrouvons la formule d'Euler.

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y + t + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y + t + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

On a

$$f(t, y(t)) = -y + t + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1.$$

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y + t + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

On a

$$f(t, y(t)) = -y + t + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1.$$

La formule de l'algorithme devient :

$$y_{n+1} = y_n + h(-y_n + t_n + 1) + \frac{h^2}{2}(1 - (-y_n + t_n + 1))$$

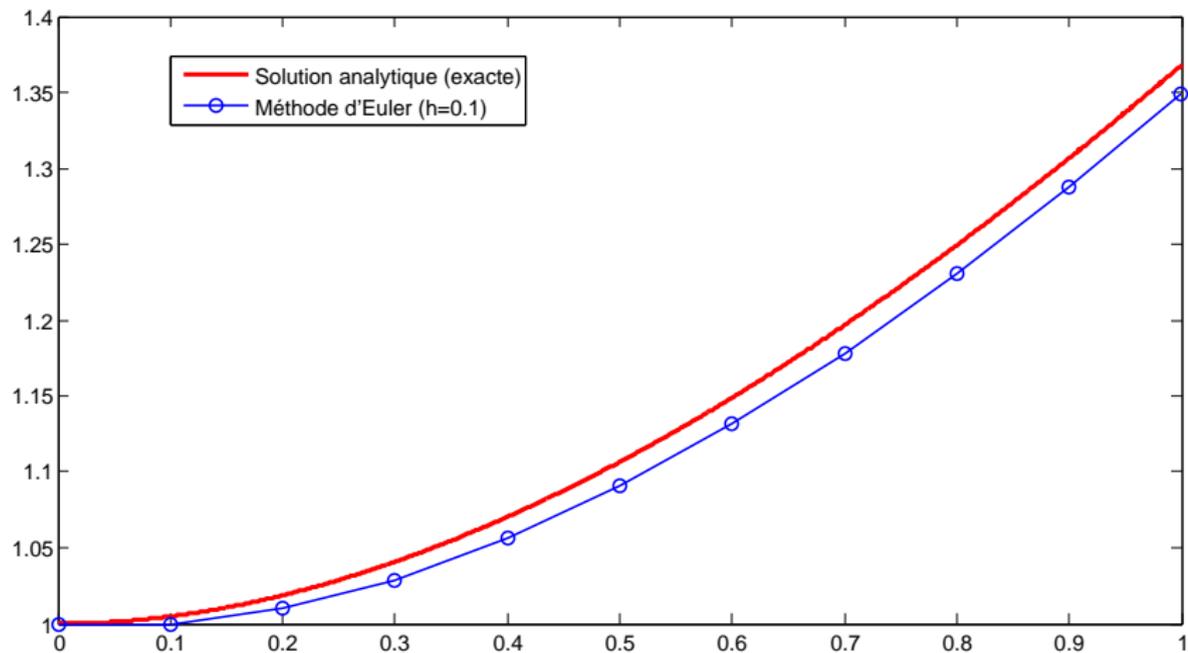
Prenons un pas de temps de $h = 0.1$.

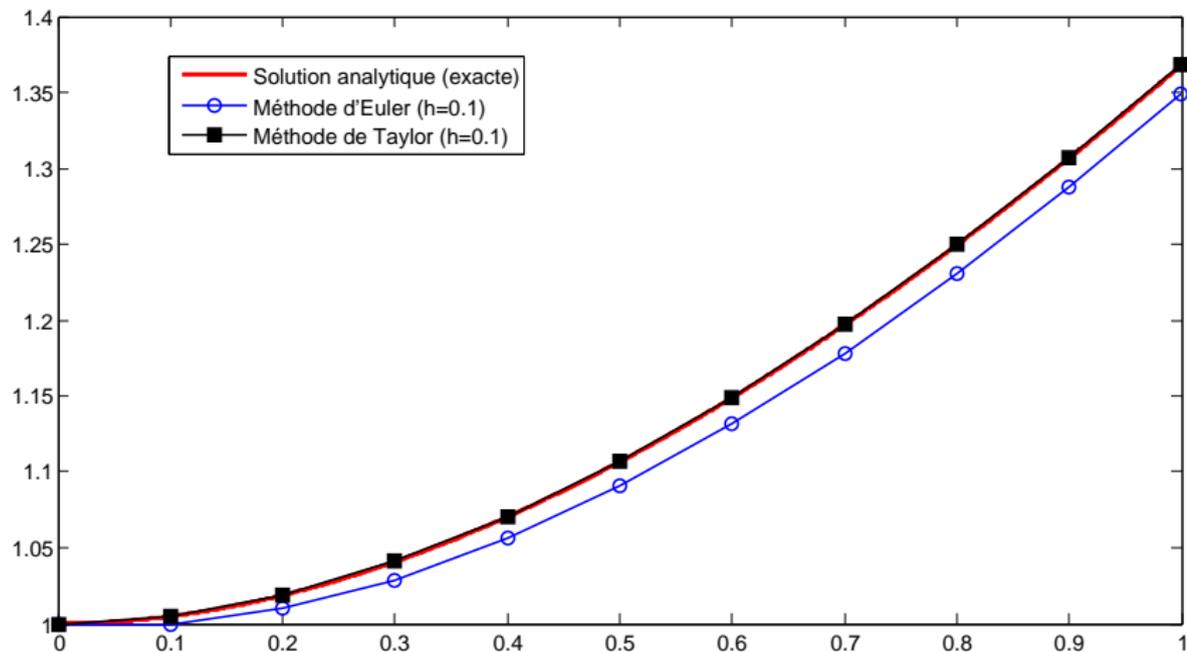
Résolvons sur 10 itérations l'équation différentielle :

Prenons un pas de temps de $h = 0.1$.

Résolvons sur 10 itérations l'équation différentielle :

t_i	$y(t_i)$	y_i	$ y(t_i) - y_i $
0.0	1.000000	1.000000	0.000000
0.1	1.004837	1.005000	0.000163
0.2	1.018730	1.019025	0.000294
0.3	1.040818	1.041217	0.000400
0.4	1.070320	1.070801	0.000482
0.5	1.106530	1.107075	0.000544
0.6	1.148811	1.149403	0.000592
0.7	1.196585	1.197210	0.000625
0.8	1.249328	1.249975	0.000646
0.9	1.306569	1.307227	0.000658
1.0	1.367879	1.368540	0.000662





Méthodes de Runge-Kutta

Objectif : Pouvoir disposer de méthodes d'ordre élevé tout en évitant le calcul des dérivées de f .

Les méthodes de Runge-Kutta se basent sur la formulation de la méthode de Taylor.

Méthodes de Runge-Kutta

Objectif : Pouvoir disposer de méthodes d'ordre élevé tout en évitant le calcul des dérivées de f .

Les méthodes de Runge-Kutta se basent sur la formulation de la méthode de Taylor.

Nous avons :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right] + \mathcal{O}(h^3).$$

Méthodes de Runge-Kutta

Objectif : Pouvoir disposer de méthodes d'ordre élevé tout en évitant le calcul des dérivées de f .

Les méthodes de Runge-Kutta se basent sur la formulation de la méthode de Taylor.

Nous avons :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right] + \mathcal{O}(h^3).$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 cherche une approximation de la solution en t_{n+1} de la forme :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + a_1 h f(t_n, y(t_n)) + a_2 h f(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h).$$

★ Il s'agit de déterminer les paramètres a_1 , a_2 , a_3 et a_4 tels que l'erreur commise soit du même ordre que la méthode de Taylor d'ordre 2.

Pour cela, nous partons du développement de Taylor en deux variables de f :

$$f(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h) = f(t_n, y(t_n)) + a_3 h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + a_4 h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} + \mathcal{O}(h^2)$$

Pour cela, nous partons du développement de Taylor en deux variables de f :

$$f(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h) = f(t_n, y(t_n)) + a_3 h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + a_4 h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} + \mathcal{O}(h^2)$$

La formule devient

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + (a_1 + a_2) h f(t_n, y(t_n)) + a_2 a_3 h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + a_2 a_4 h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} + \mathcal{O}(h^3)$$

Pour cela, nous partons du développement de Taylor en deux variables de f :

$$f(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h) = f(t_n, y(t_n)) + a_3 h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + a_4 h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} + \mathcal{O}(h^2)$$

La formule devient

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + (a_1 + a_2) h f(t_n, y(t_n)) + a_2 a_3 h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + a_2 a_4 h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} + \mathcal{O}(h^3)$$

(rappel formulation de Taylor)

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right] + \mathcal{O}(h^3).$$

Pour cela, nous partons du développement de Taylor en deux variables de f :

$$f(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h) = f(t_n, y(t_n)) + a_3 h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + a_4 h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} + \mathcal{O}(h^2)$$

La formule devient

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + (a_1 + a_2) h f(t_n, y(t_n)) + a_2 a_3 h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + a_2 a_4 h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} + \mathcal{O}(h^3)$$

(rappel formulation de Taylor)

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right] + \mathcal{O}(h^3).$$

Nous pouvons constater que cette formulation est du même ordre que celle de Taylor.

Pour cela, nous partons du développement de Taylor en deux variables de f :

$$f(t_n + a_3 h, y(t_n) + a_4 h) = f(t_n, y(t_n)) + a_3 h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + a_4 h \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} + \mathcal{O}(h^2)$$

La formule devient

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + (a_1 + a_2)h f(t_n, y(t_n)) + a_2 a_3 h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + a_2 a_4 h^2 \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} + \mathcal{O}(h^3)$$

(rappel formulation de Taylor)

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y(t_n))}{\partial y} f(t_n, y(t_n)) \right] + \mathcal{O}(h^3).$$

Nous pouvons constater que cette formulation est du même ordre que celle de Taylor.

⇒ Déterminons par identification les paramètres a_i .

Nous obtenons ainsi un système non linéaire de 3 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 & = & 1 \\ a_2 a_3 & = & \frac{1}{2} \\ a_2 a_4 & = & \frac{1}{2} f(t_n, y(t_n)) \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi un système non linéaire de 3 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 & = & 1 \\ a_2 a_3 & = & \frac{1}{2} \\ a_2 a_4 & = & \frac{1}{2} f(t_n, y(t_n)) \end{cases}$$

Le système étant sous-contraint, il n'y a pas de solution unique.

Nous obtenons ainsi un système non linéaire de 3 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 & = & 1 \\ a_2 a_3 & = & \frac{1}{2} \\ a_2 a_4 & = & \frac{1}{2} f(t_n, y(t_n)) \end{cases}$$

Le système étant sous-contraint, il n'y a pas de solution unique.

Cela offre plusieurs variantes de la méthode.

En voici une particulière, appelée également la méthode d'Euler modifiée :

Nous obtenons ainsi un système non linéaire de 3 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 & = & 1 \\ a_2 a_3 & = & \frac{1}{2} \\ a_2 a_4 & = & \frac{1}{2} f(t_n, y(t_n)) \end{cases}$$

Le système étant sous-contraint, il n'y a pas de solution unique.

Cela offre plusieurs variantes de la méthode.

En voici une particulière, appelée également la méthode d'Euler modifiée :

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 1 \quad \text{et} \quad a_4 = f(t_n, y(t_n)).$$

Nous obtenons ainsi un système non linéaire de 3 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 a_3 &= \frac{1}{2} \\ a_2 a_4 &= \frac{1}{2} f(t_n, y(t_n)) \end{cases}$$

Le système étant sous-contraint, il n'y a pas de solution unique.

Cela offre plusieurs variantes de la méthode.

En voici une particulière, appelée également la méthode d'Euler modifiée :

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 1 \quad \text{et} \quad a_4 = f(t_n, y(t_n)).$$

Étant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N , les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

$$\begin{cases} \bar{y} &= y_n + h f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} \left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, \bar{y}) \right) \\ t_{n+1} &= t_n + h \end{cases}$$

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y + t + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (la version Euler modifiée) est appliquée avec le même pas $h = 0.1$.

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y + t + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (la version Euler modifiée) est appliquée avec le même pas $h = 0.1$.

t_i	$y(t_i)$	y_i	$ y(t_i) - y_i $
0.0	1.000000	1.000000	0.000000
0.1	1.004837	1.005000	0.000163
0.2	1.018730	1.019025	0.000294
0.3	1.040818	1.041217	0.000400
0.4	1.070320	1.070801	0.000482
0.5	1.106530	1.107075	0.000544

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y + t + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (la version Euler modifiée) est appliquée avec le même pas $h = 0.1$.

t_i	$y(t_i)$	y_i	$ y(t_i) - y_i $
0.0	1.000000	1.000000	0.000000
0.1	1.004837	1.005000	0.000163
0.2	1.018730	1.019025	0.000294
0.3	1.040818	1.041217	0.000400
0.4	1.070320	1.070801	0.000482
0.5	1.106530	1.107075	0.000544

◆ On retrouve les mêmes résultats que la méthode de Taylor d'ordre 2. Toutefois, cette parfaite similitude est exceptionnelle, cette EDO est un cas particulier.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

En reprenant le développement de Taylor de la fonction f jusqu'à l'ordre 5, et en suivant un raisonnement similaire, un système de 8 équations non linéaires à 10 inconnues est obtenu.

Le résultat final est une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

En reprenant le développement de Taylor de la fonction f jusqu'à l'ordre 5, et en suivant un raisonnement similaire, un système de 8 équations non linéaires à 10 inconnues est obtenu.

Le résultat final est une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Étant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N , les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = h f(t_n, y_n) \\ k_2 = h f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = h f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = h f(t_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ t_{n+1} = t_n + h \end{array} \right.$$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

En reprenant le développement de Taylor de la fonction f jusqu'à l'ordre 5, et en suivant un raisonnement similaire, un système de 8 équations non linéaires à 10 inconnues est obtenu.

Le résultat final est une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Étant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N , les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = h f(t_n, y_n) \\ k_2 = h f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = h f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = h f(t_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ t_{n+1} = t_n + h \end{array} \right.$$

◆ Cette méthode est très utilisée en raison de sa grande précision.

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y + t + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est appliquée avec le même pas $h = 0.1$.

Exemple 1 :

Reprenons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= -y + t + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est appliquée avec le même pas $h = 0.1$.

t_i	$y(t_i)$	y_i	$ y(t_i) - y_i $
0.0	1.000000	1.000000	0.000000
0.1	1.004837	1.004837	0.081×10^{-6}
0.2	1.018730	1.018730	0.148×10^{-6}
0.3	1.040818	1.040818	0.201×10^{-6}
0.4	1.070320	1.070320	0.242×10^{-6}
0.5	1.106530	1.106530	0.274×10^{-6}
0.6	1.148811	1.148811	0.298×10^{-6}
0.7	1.196585	1.196585	0.314×10^{-6}
0.8	1.249328	1.249329	0.325×10^{-6}
0.9	1.306569	1.306569	0.331×10^{-6}
1.0	1.367879	1.367879	0.333×10^{-6}

Cas des EDO d'ordre 2

Nous avons considéré jusqu'à maintenant des EDO d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y' & = f(t, y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

Cas des EDO d'ordre 2

Nous avons considéré jusqu'à maintenant des EDO d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y' & = f(t, y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

Comment résoudre une EDO d'ordre 2 ?

$$\begin{cases} y'' & = f(t, y, y') \\ y(t_0) & = y_0 \\ y'(t_0) & = y'_0 \end{cases}$$

Cas des EDO d'ordre 2

Nous avons considéré jusqu'à maintenant des EDO d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y' & = f(t, y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

Comment résoudre une EDO d'ordre 2 ?

$$\begin{cases} y'' & = f(t, y, y') \\ y(t_0) & = y_0 \\ y'(t_0) & = y'_0 \end{cases}$$

⇒ Nous allons transformer l'équation d'ordre 2 en 2 équations d'ordre 1.

Pour cela, définissons deux nouvelles variables y_1 et y_2 , et posons

$$\begin{aligned}y_1 &= y \\ y_2 &= y'\end{aligned}$$

Pour cela, définissons deux nouvelles variables y_1 et y_2 , et posons

$$\begin{aligned}y_1 &= y \\ y_2 &= y'\end{aligned}$$

Nous avons alors 2 équations différentielles

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= f(t, y_1, y_2) \end{cases}$$

Pour cela, définissons deux nouvelles variables y_1 et y_2 , et posons

$$\begin{aligned}y_1 &= y \\ y_2 &= y'\end{aligned}$$

Nous avons alors 2 équations différentielles

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= f(t, y_1, y_2) \end{cases}$$

Soit sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ f(t, y_1, y_2) \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad Y' = F(t, Y) \quad \text{avec } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Pour cela, définissons deux nouvelles variables y_1 et y_2 , et posons

$$\begin{aligned}y_1 &= y \\ y_2 &= y'\end{aligned}$$

Nous avons alors 2 équations différentielles

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= f(t, y_1, y_2) \end{cases}$$

Soit sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ f(t, y_1, y_2) \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad Y' = F(t, Y) \quad \text{avec } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

⇒ Nous retrouvons une EDO d'ordre 1 (mais de dimension 2) et nous pouvons alors appliquer les méthodes vues précédemment.

Exemple

$$x''(t) + 3x'(t) + 5x(t) = \sin(t)$$

Exemple

$$x''(t) + 3x'(t) + 5x(t) = \sin(t)$$

Posons

$$\begin{aligned}y_1 &= x \\y_2 &= x'\end{aligned}$$

Exemple

$$x''(t) + 3x'(t) + 5x(t) = \sin(t)$$

Posons

$$\begin{aligned}y_1 &= x \\y_2 &= x'\end{aligned}$$

Nous avons alors l'équation

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \sin(t) - 5y_1 - 3y_2 \end{bmatrix}$$

Exemple

$$x''(t) + 3x'(t) + 5x(t) = \sin(t)$$

Posons

$$\begin{aligned}y_1 &= x \\y_2 &= x'\end{aligned}$$

Nous avons alors l'équation

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \sin(t) - 5y_1 - 3y_2 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons résoudre cette EDO par la méthode d'Euler en calculant

$$\begin{cases} y_{1_{n+1}} &= y_{1_n} + hy_{2_n} \\ y_{2_{n+1}} &= y_{2_n} + h(\sin(t_n) - 5y_{1_n} - 3y_{2_n}) \end{cases}$$

Exemples

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' + y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exemples

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' + y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Dans cet exemple, on connaît la solution analytique : $y(t) = \frac{1}{t+1}$

Exemples

Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' + y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Dans cet exemple, on connaît la solution analytique : $y(t) = \frac{1}{t+1}$

Résolvons numériquement cette EDO sur l'intervalle $[0, 1]$ avec un pas de 0.2.

Exemples

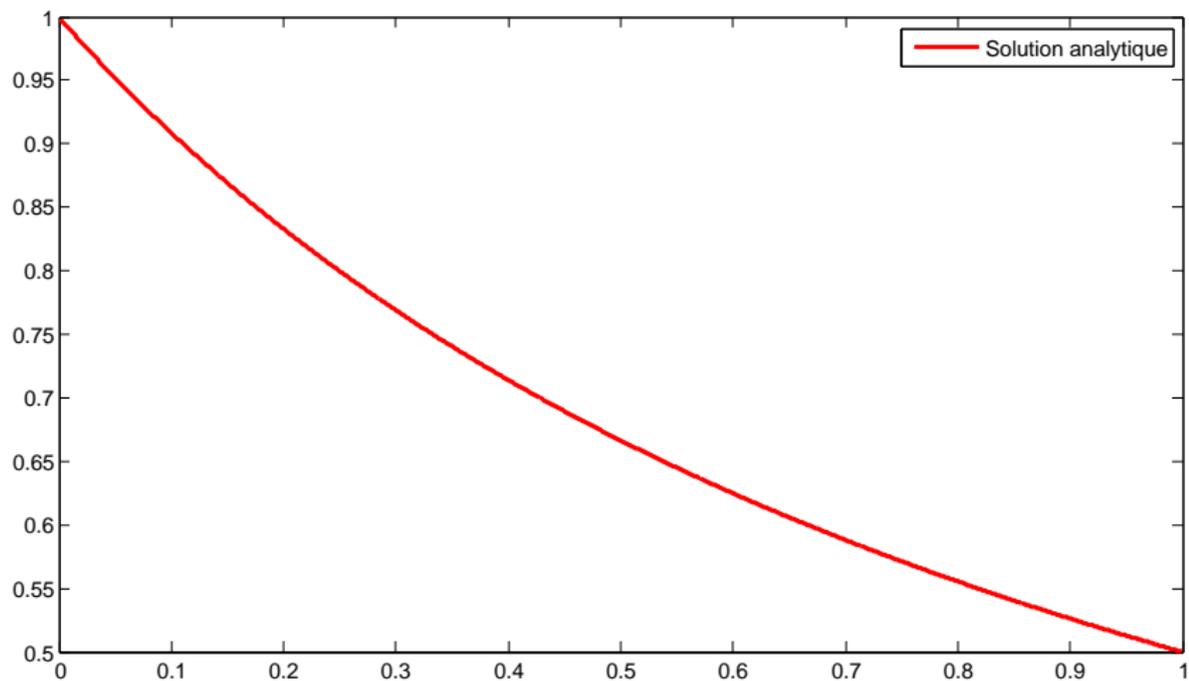
Exemple 1 : Résoudre l'équation différentielle suivante

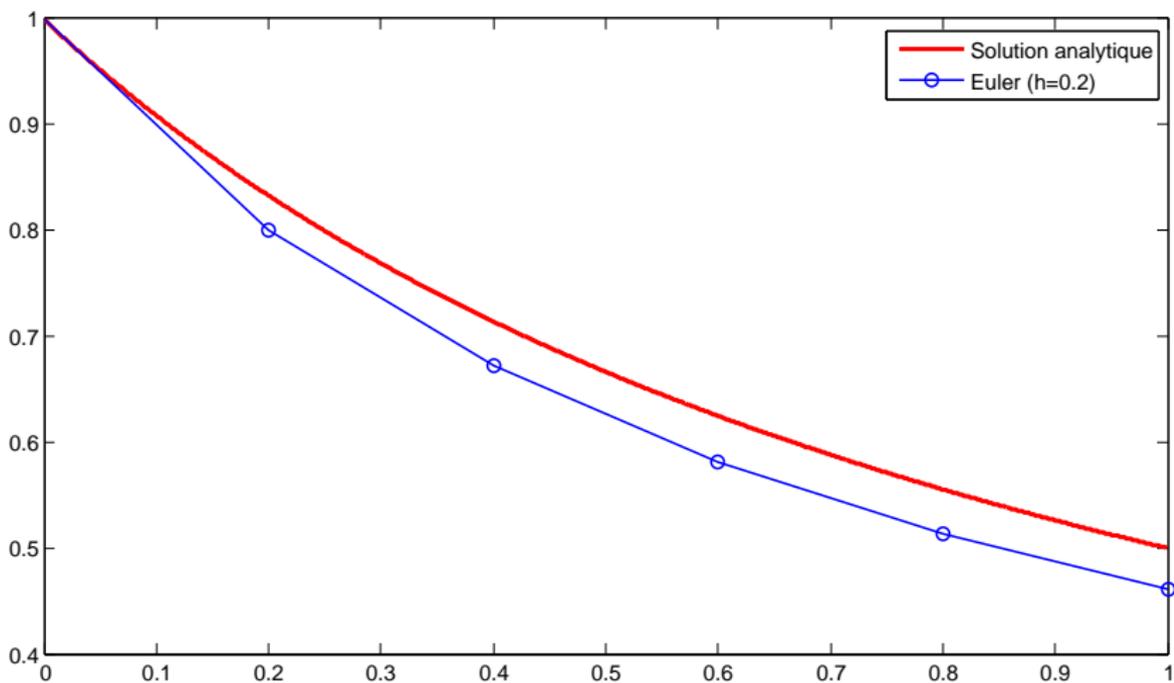
$$\begin{cases} y' + y^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

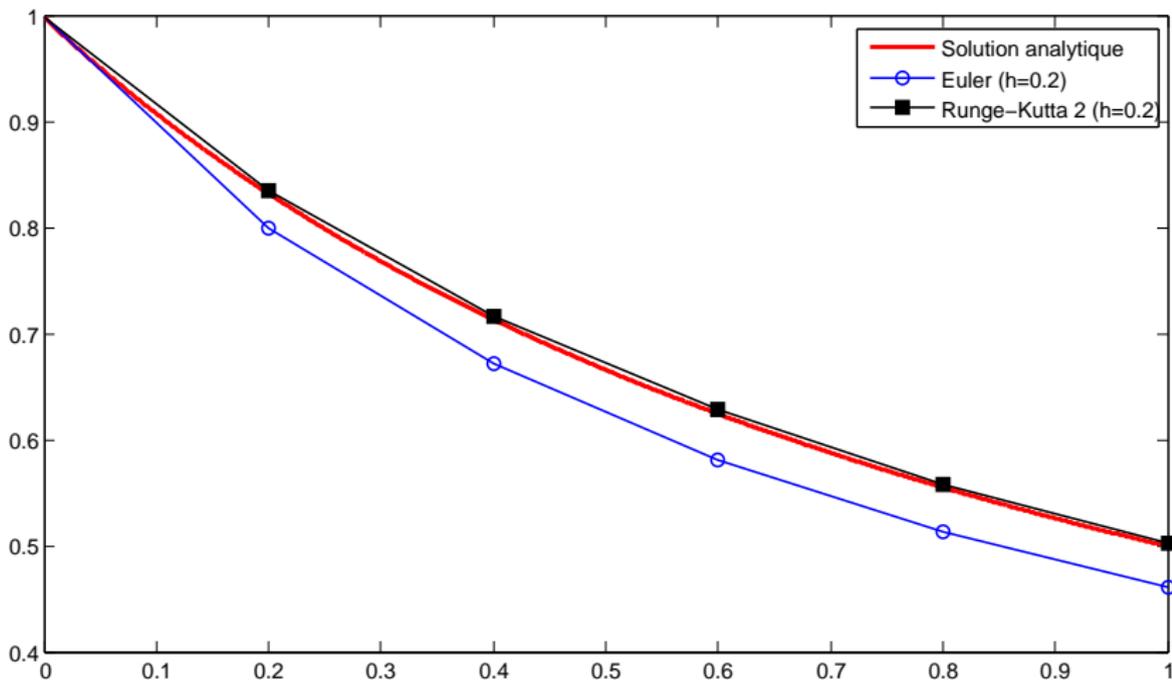
Dans cet exemple, on connaît la solution analytique : $y(t) = \frac{1}{t+1}$

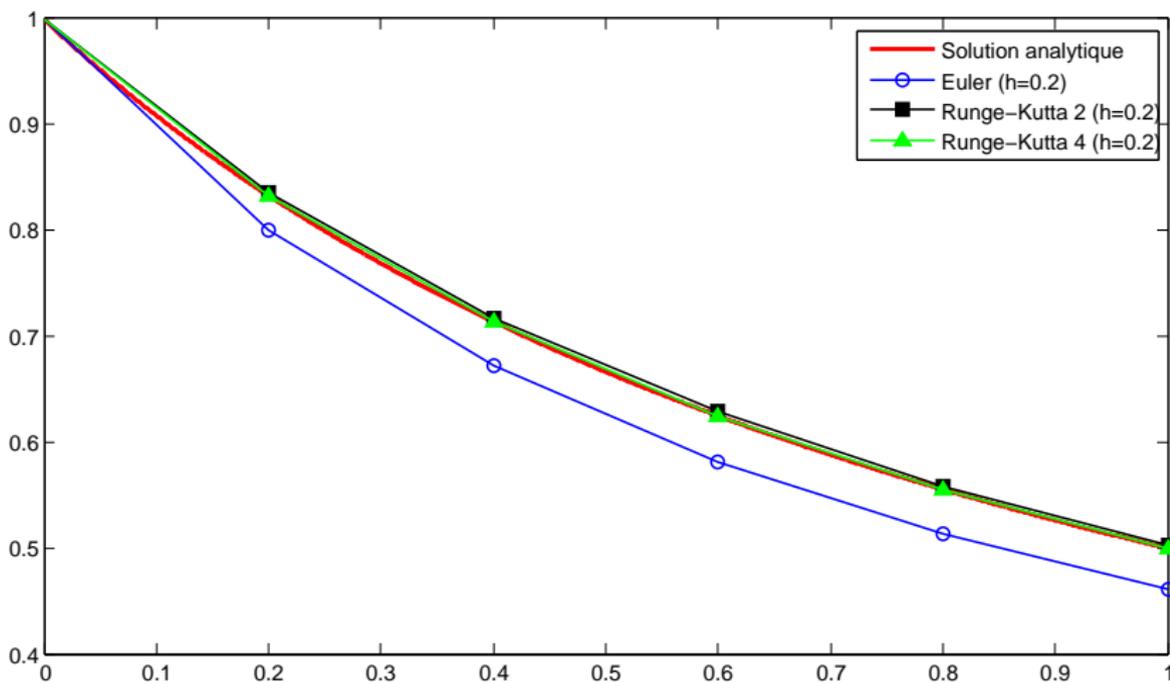
Résolvons numériquement cette EDO sur l'intervalle $[0, 1]$ avec un pas de 0.2.

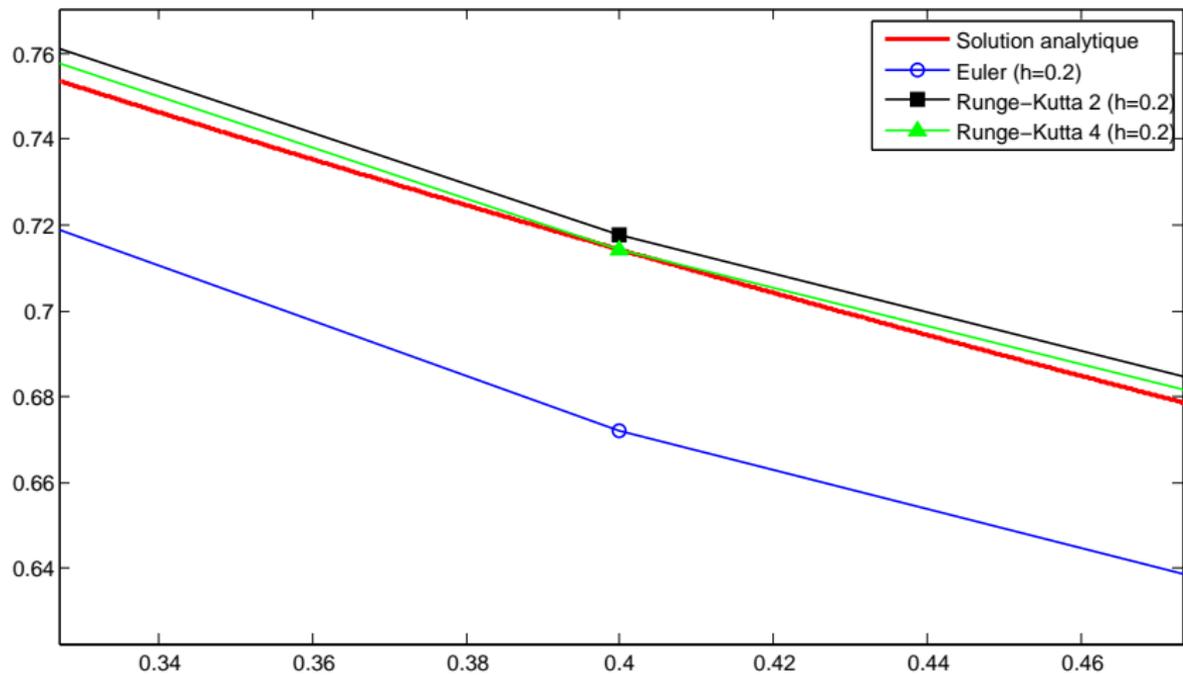
t_i	$y(t_i)$	y_i (Euler)	y_i (R-K 2)	y_i (R-K 4)
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.2	0.833333	0.800000	0.836000	0.833339
0.4	0.714285	0.672000	0.717638	0.714292
0.6	0.625000	0.581683	0.628359	0.625005
0.8	0.555555	0.514012	0.558692	0.555560
1.0	0.500000	0.461170	0.502851	0.500004







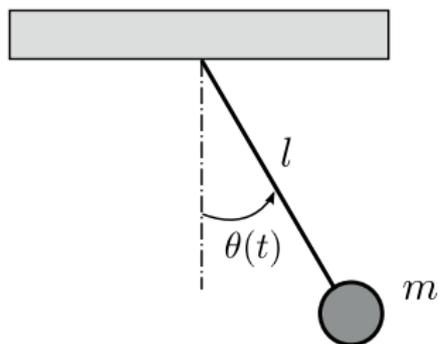




Exemples

Exemple 2 :

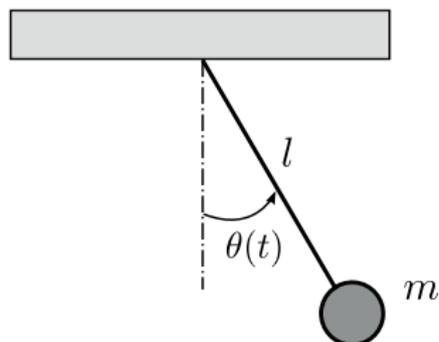
Considérons le mouvement d'une masse m suspendue à une corde de longueur l .



Exemples

Exemple 2 :

Considérons le mouvement d'une masse m suspendue à une corde de longueur l .



L'évolution de l'angle $\theta(t)$ est décrite par l'équation différentielle suivante. A $t = 0$, on suppose que la masse est à l'arrêt et forme un angle $\theta_0 = 30^\circ$ avec la verticale.

$$\begin{cases} ml\theta''(t) = -mg\sin\theta(t) - c_f l\theta'(t) \\ \theta(0) = \frac{\pi}{6} \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

Transformons notre équation différentielle d'ordre 2 en 2 équations d'ordre 1.

Posons : $x_1(t) = \theta(t)$ et $x_2(t) = \theta'(t)$.

Transformons notre équation différentielle d'ordre 2 en 2 équations d'ordre 1.

Posons : $x_1(t) = \theta(t)$ et $x_2(t) = \theta'(t)$.

Nous obtenons le système

$$\begin{cases} ml x_2' &= -mg \sin x_1 - c_f l x_2 \\ x_1' &= x_2 \\ \theta(0) &= \frac{\pi}{6} \\ \theta'(0) &= 0 \end{cases}$$

Transformons notre équation différentielle d'ordre 2 en 2 équations d'ordre 1.

Posons : $x_1(t) = \theta(t)$ et $x_2(t) = \theta'(t)$.

Nous obtenons le système

$$\left\{ \begin{array}{l} ml x_2' = -mg \sin x_1 - c_f l x_2 \\ x_1' = x_2 \\ \theta(0) = \frac{\pi}{6} \\ \theta'(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2' = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{c_f}{m} x_2 \\ x_1' = x_2 \\ x_1(0) = \frac{\pi}{6} \\ x_2(0) = 0 \end{array} \right.$$

Transformons notre équation différentielle d'ordre 2 en 2 équations d'ordre 1.

Posons : $x_1(t) = \theta(t)$ et $x_2(t) = \theta'(t)$.

Nous obtenons le système

$$\left\{ \begin{array}{l} ml x_2' = -mg \sin x_1 - c_f l x_2 \\ x_1' = x_2 \\ \theta(0) = \frac{\pi}{6} \\ \theta'(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2' = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{c_f}{m} x_2 \\ x_1' = x_2 \\ x_1(0) = \frac{\pi}{6} \\ x_2(0) = 0 \end{array} \right.$$

En définissant $y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, on retrouve la forme étudiée précédemment

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta' \\ \theta'' \end{bmatrix} = f(t, y) \\ y(0) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

où f est une fonction vectorielle de la forme

$$f(t, y) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{c_f}{m} x_2 \end{bmatrix}$$

Résolvons numériquement l'équation dans le cas d'un pendule de masse et de longueur unitaire, et analysons l'impact du coefficient de frottement c_f .
Appliquons la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 afin d'estimer la solution $\theta(t)$ sur l'horizon temporel : $0 - 20$ s.

Résolvons numériquement l'équation dans le cas d'un pendule de masse et de longueur unitaire, et analysons l'impact du coefficient de frottement c_f .
 Appliquons la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 afin d'estimer la solution $\theta(t)$ sur l'horizon temporel : $0 - 20$ s.

Prenons un pas de temps $h = 0.001$, la condition initiale (t_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations $N = 20000$, les valeurs approchées successives de la fonction $y(t)$ sont calculées par la formule

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} k_{1,1} = h x_{2_n} \\ k_{2,1} = h \left(-g \sin x_{1_n} - c_f x_{2_n} \right) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} k_{1,2} = h x_{2_n} + h \frac{k_{2,1}}{2} \\ k_{2,2} = h \left(-g \sin \left(x_{1_n} + \frac{k_{1,1}}{2} \right) - c_f \left(x_{2_n} + \frac{k_{2,1}}{2} \right) \right) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} k_{1,3} = h x_{2_n} + h \frac{k_{2,1}}{2} \\ k_{2,3} = h \left(-g \sin \left(x_{1_n} + \frac{k_{1,2}}{2} \right) - c_f \left(x_{2_n} + \frac{k_{2,2}}{2} \right) \right) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} k_{1,4} = h x_{2_n} + h k_{2,3} \\ k_{2,4} = h \left(-g \sin \left(x_{1_n} + k_{1,3} \right) - c_f \left(x_{2_n} + k_{2,3} \right) \right) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x_{1_{n+1}} = x_{1_n} + \frac{1}{6} (k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}) \\ y_{2_{n+1}} = x_{2_n} + \frac{1}{6} (k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4}) \end{array} \right. \\ t_{n+1} = t_n + h \end{array} \right.$$

