Automatique Numérique

Yassine Ariba

Dpt GEI - Icam, Toulouse.

version 2.0

Sommaire

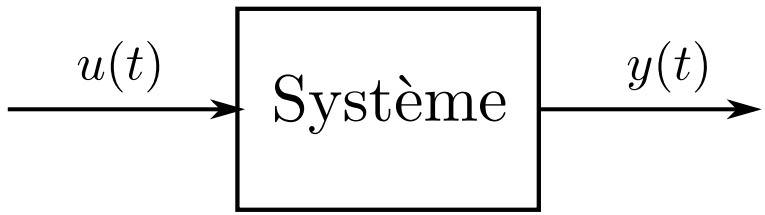
1. Introduction
   - Rappels
   - Généralités
   - Echantillonnage
   - Conversion numérique-analogique
2. Modélisation
   - Transformée en Z
   - Système à temps discret
   - Système échantillonné
3. Analyse d'un asservissement
   - Quelques signaux standards
   - Stabilité d'un système
   - Précision d'un système asservi
4. Synthèse de correcteurs
   - Principe
   - Méthodes de transposition
   - Implémentation

L'Automatique ou la Théorie de la Commande

Discipline traitant de la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes dynamiques. Elle a pour objectif l'étude et la conception de dispositifs fonctionnant sans intervention humaine.

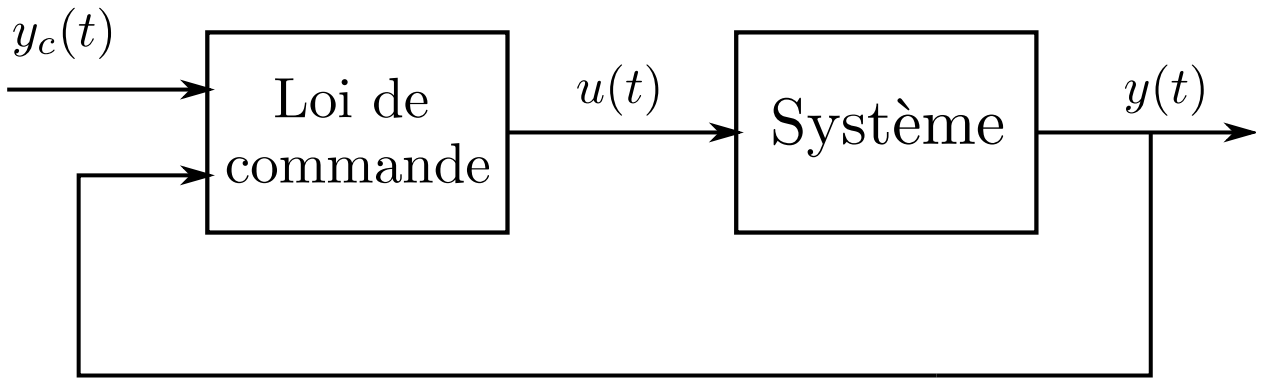
L'Automatique ou la Théorie de la Commande

Discipline traitant de la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes dynamiques. Elle a pour objectif l'étude et la conception de dispositifs fonctionnant sans intervention humaine.



L'Automatique ou la Théorie de la Commande

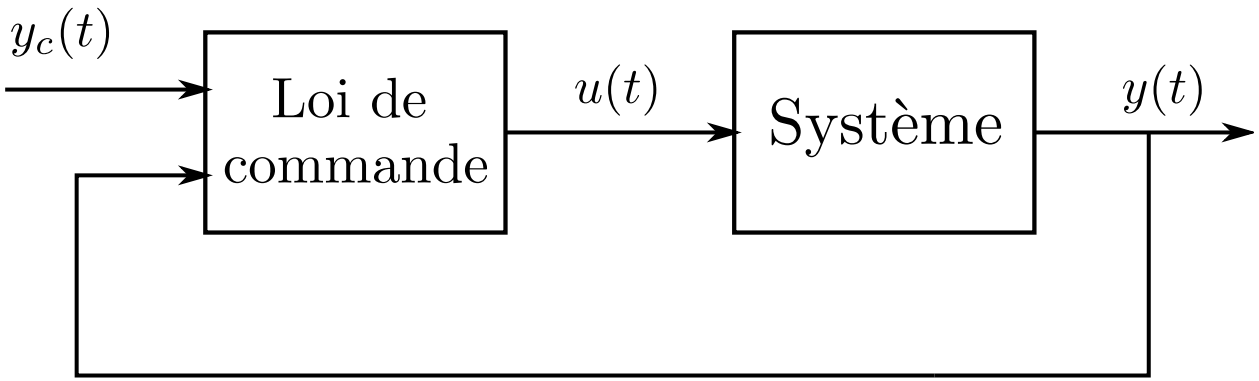
Discipline traitant de la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes dynamiques. Elle a pour objectif l'étude et la conception de dispositifs fonctionnant sans intervention humaine.



⋆ **Objectif :** Concevoir une loi de commande pour asservir la sortie du système suivant la consigne.

L'Automatique ou la Théorie de la Commande

Discipline traitant de la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes dynamiques. Elle a pour objectif l'étude et la conception de dispositifs fonctionnant sans intervention humaine.

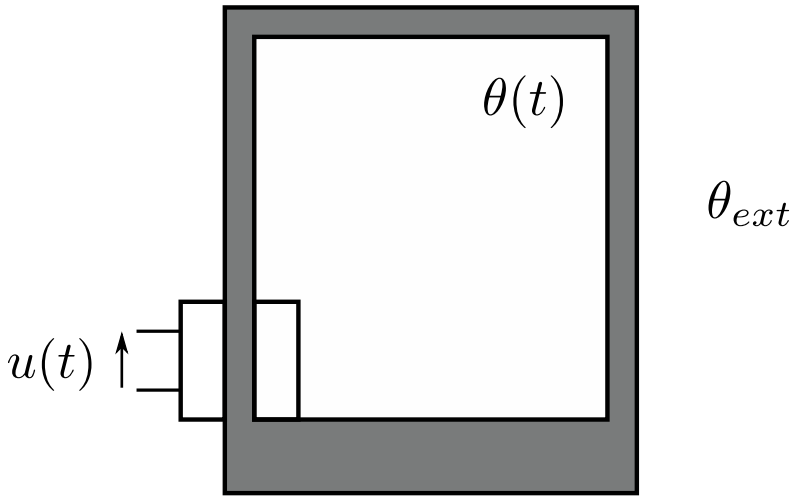


⋆ **Objectif :** Concevoir une loi de commande pour asservir la sortie du système suivant la consigne.

$\Rightarrow$ principe de contre-réaction

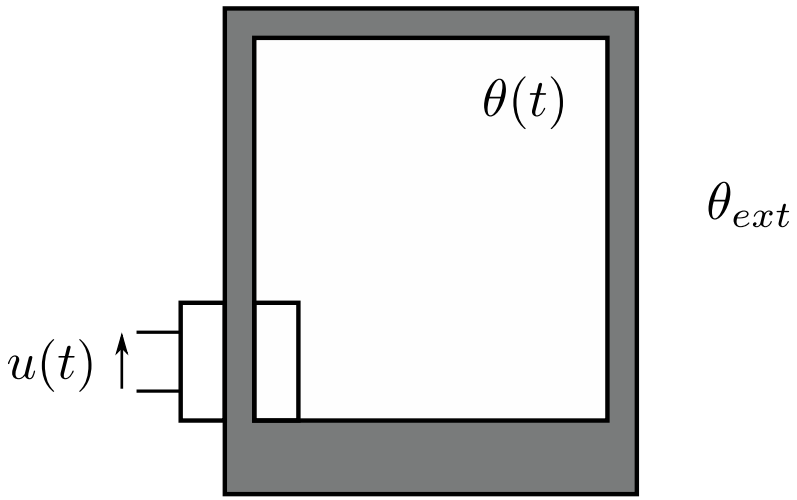
Exemple

Nous souhaitons réguler la température d'une enceinte thermique autour de 40°.



Exemple

Nous souhaitons réguler la température d'une enceinte thermique autour de 40°.



- Un élément chauffant avec l'étage de puissance est piloté par la tension de commande $u(t)$.
- La température dans l'enceinte est notée $\theta(t)$.
- La température extérieure est notée θ_{ext}.

$1^{\text{ière}}$ approche :

par essais ou par calculs, trouver la valeur $u(t) = u_0$ telle que la puissance fournie par l'élément chauffant compense les pertes avec l'extérieur et résulte en une température $\theta = 40°$.

$1^{\text{ière}}$ approche :

par essais ou par calculs, trouver la valeur $u(t) = u_0$ telle que la puissance fournie par l'élément chauffant compense les pertes avec l'extérieur et résulte en une température $\theta = 40°$.

$\Rightarrow$ commande en boucle ouverte

Problèmes ?

- θ change si θ_{ext} varie.
- θ change si des objets sont présents à l'intérieur.
- La rapidité de convergence n'est pas contrôlée.
- La commande n'est pas *réactive*.

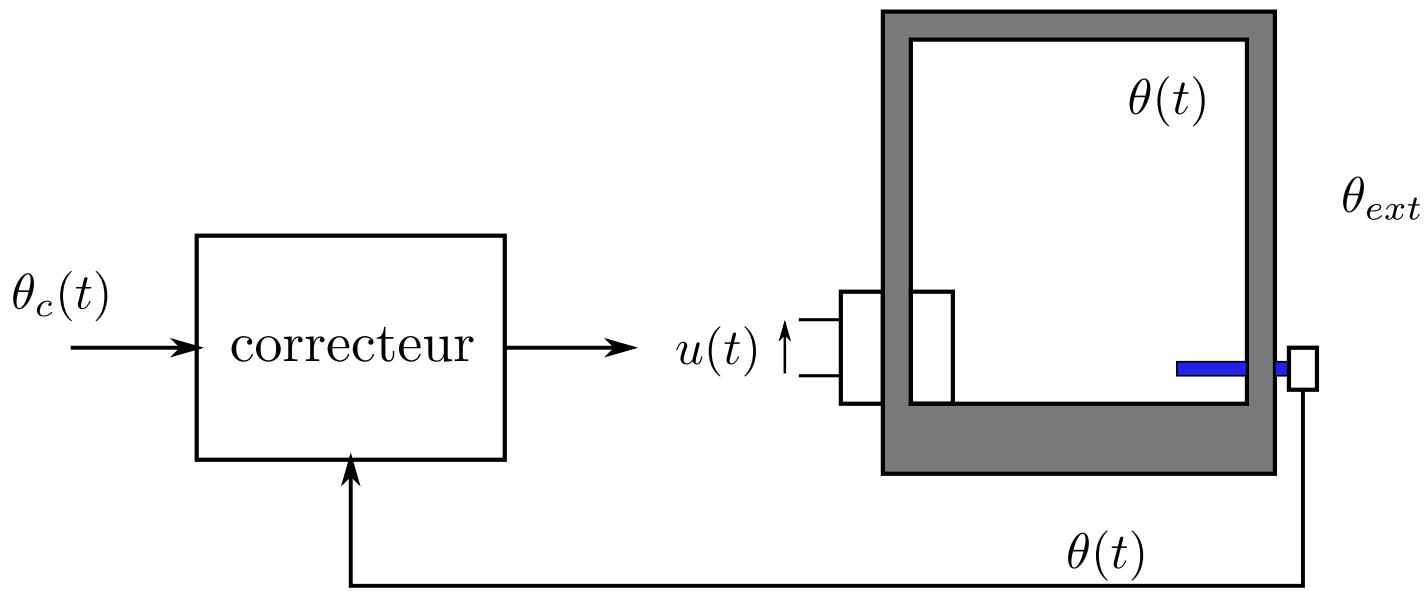
2^{nde} approche :

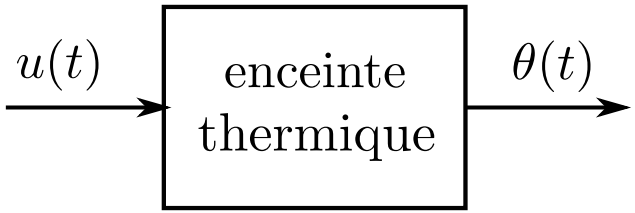
Un capteur est mis en place pour mesurer θ. Une loi de commande est élaborée pour calculer automatiquement $u(t)$ par rapport à la mesure et à la valeur de consigne.

2^{nde} approche :

Un capteur est mis en place pour mesurer θ. Une loi de commande est élaborée pour calculer automatiquement $u(t)$ par rapport à la mesure et à la valeur de consigne.

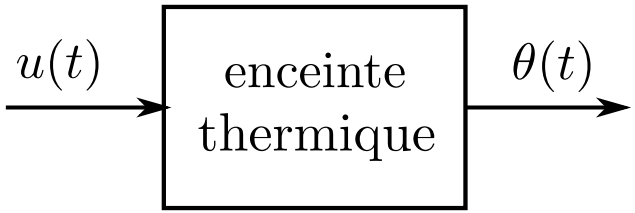
$\Rightarrow$ commande en boucle fermée





Une étude expérimentale approxime la relation entre l'entrée $u(t)$ et la sortie $\theta(t)$ par

$$240\ \dot{\theta}(t) + \theta(t) = 4\ u(t)$$



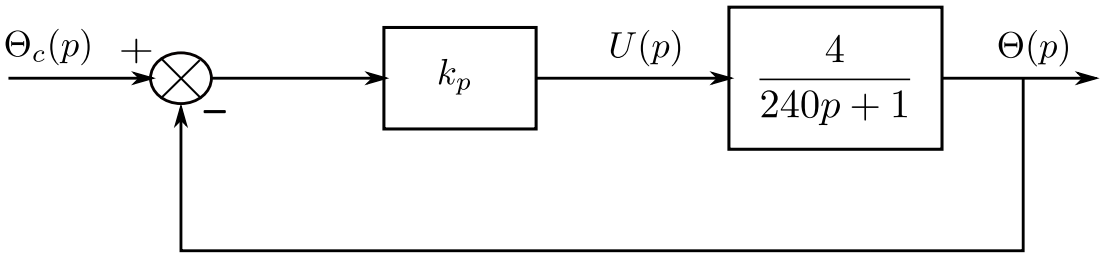
Une étude expérimentale approxime la relation entre l'entrée $u(t)$ et la sortie $\theta(t)$ par

$$240\ \dot{\theta}(t) + \theta(t) = 4\ u(t)$$

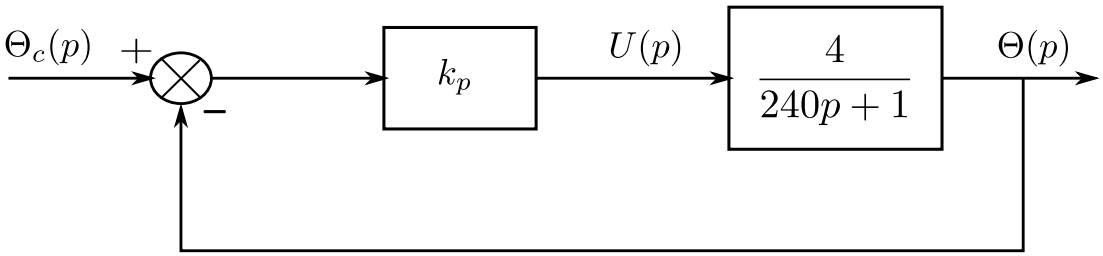
Nous avons donc pour le système la fonction de transfert :

$$\frac{\Theta(p)}{U(p)} = \frac{4}{240p + 1}$$

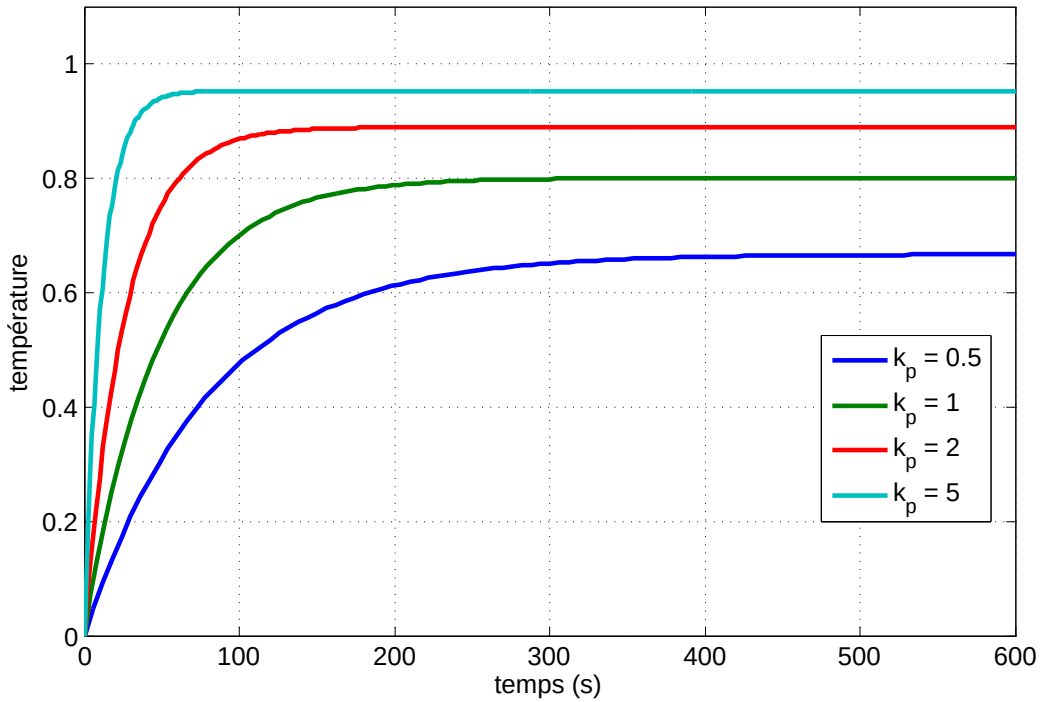
Correcteur proportionnel



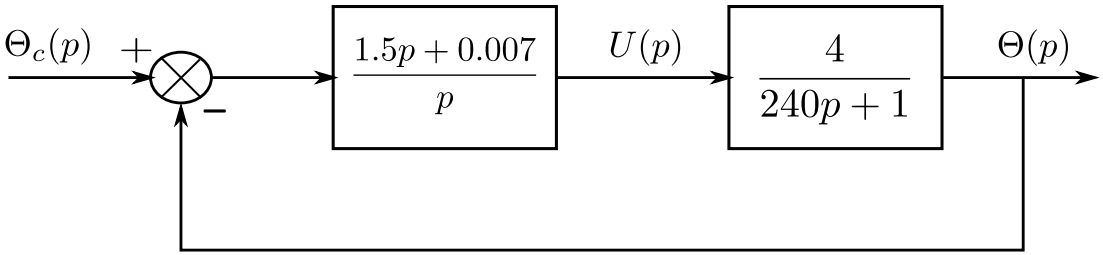
Correcteur proportionnel



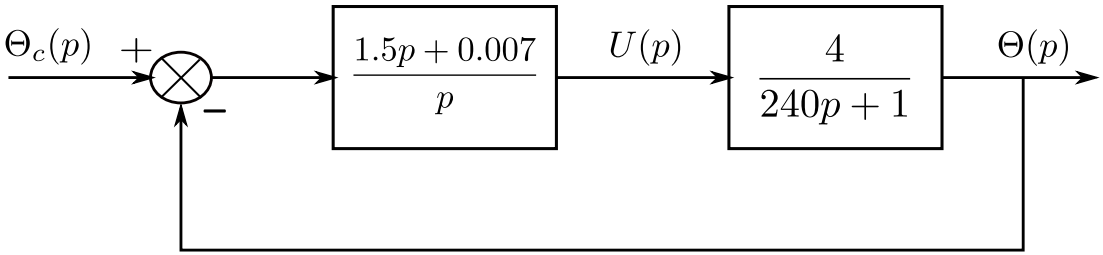
Réponse à un échelon unitaire.



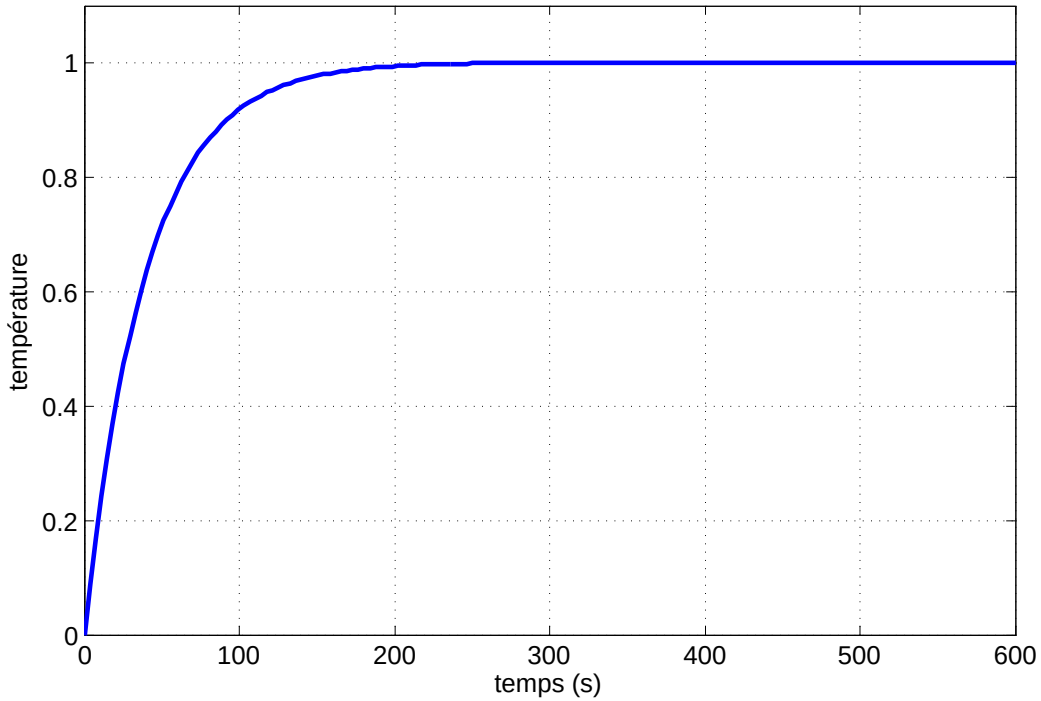
Correcteur PI

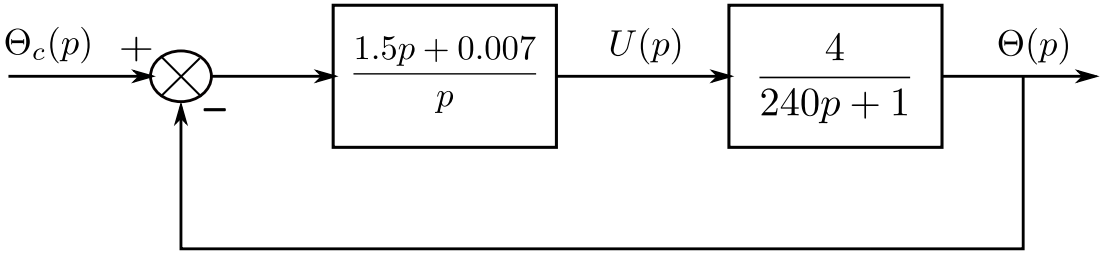


Correcteur PI

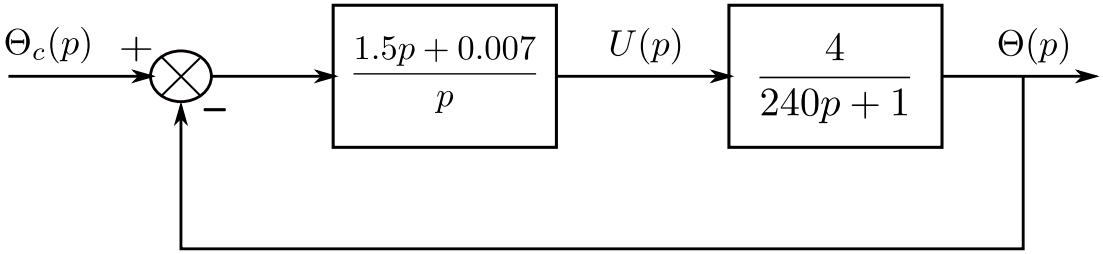


Réponse à un échelon unitaire.

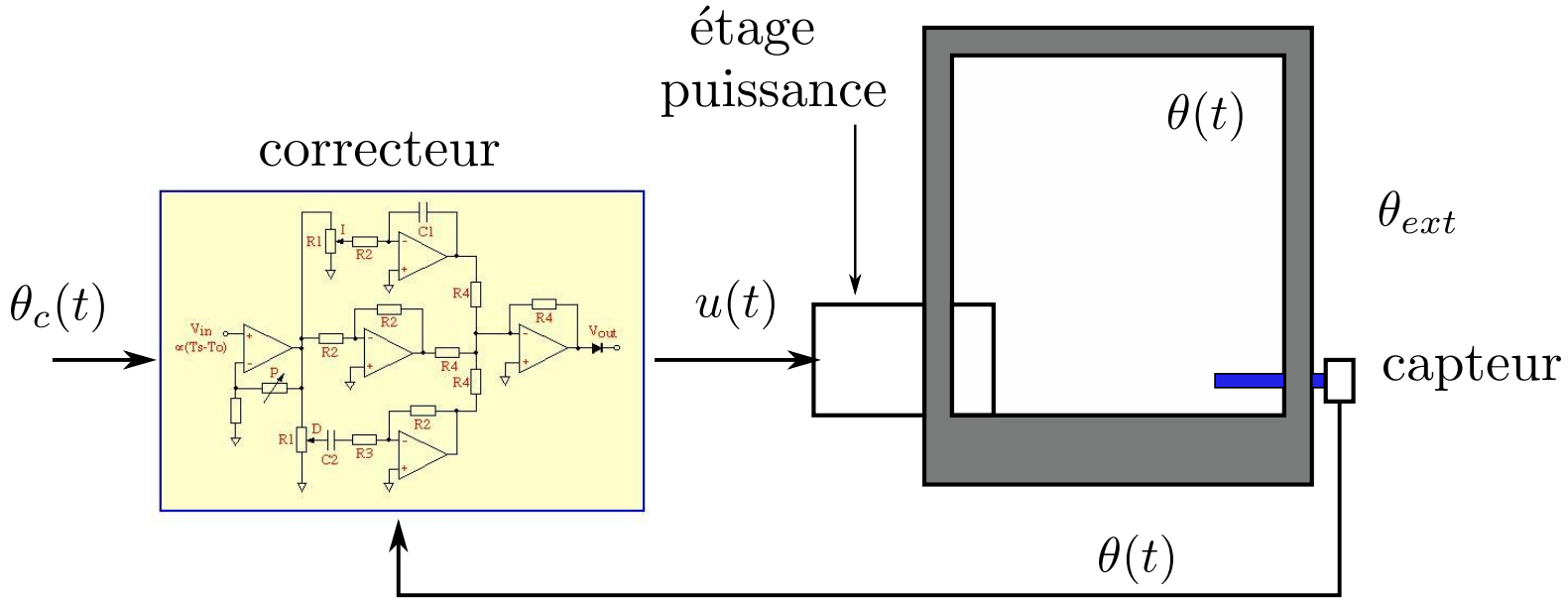




Implémentation ?



Implémentation ?



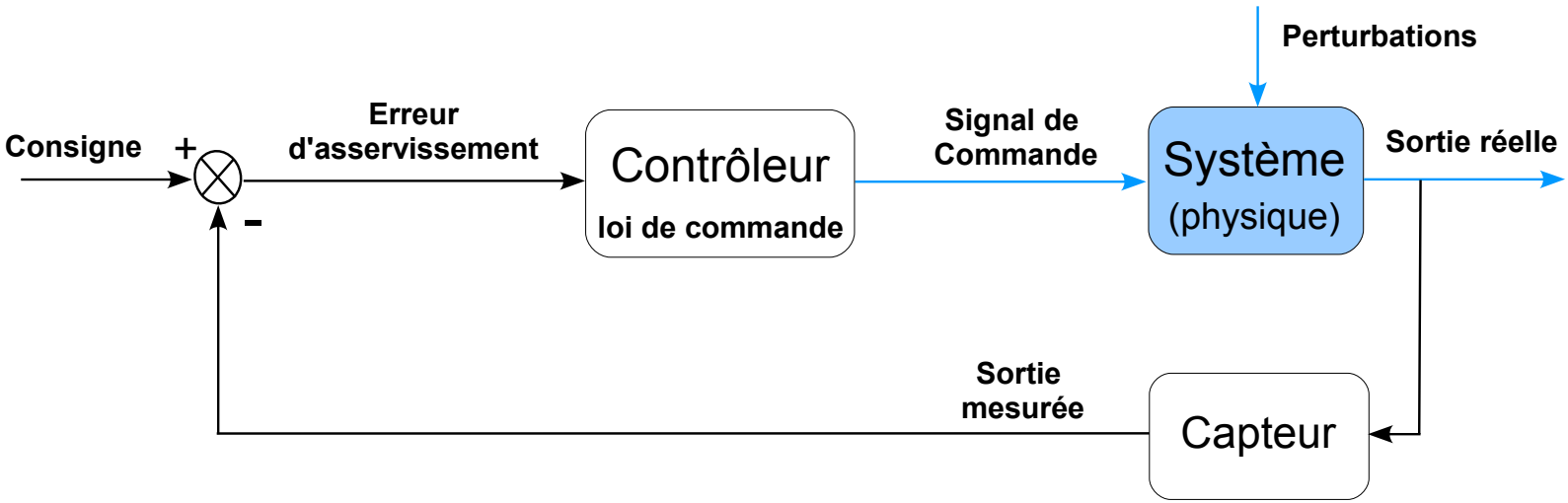
$\Rightarrow$ réalisation **analogique**

Sommaire

1. Introduction
   - Rappels
   - Généralités
   - Echantillonnage
   - Conversion numérique-analogique
2. Modélisation
   - Transformée en Z
   - Système à temps discret
   - Système échantillonné
3. Analyse d'un asservissement
   - Quelques signaux standards
   - Stabilité d'un système
   - Précision d'un système asservi
4. Synthèse de correcteurs
   - Principe
   - Méthodes de transposition
   - Implémentation

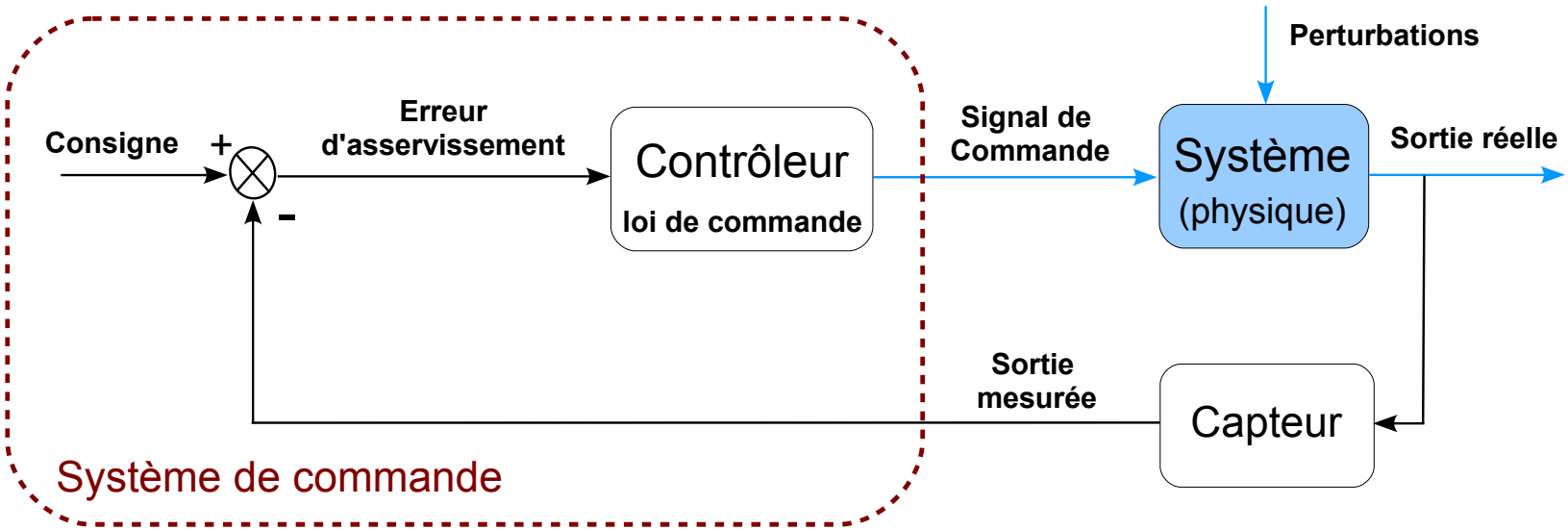
Généralités

Schéma de principe de base d'un système asservi



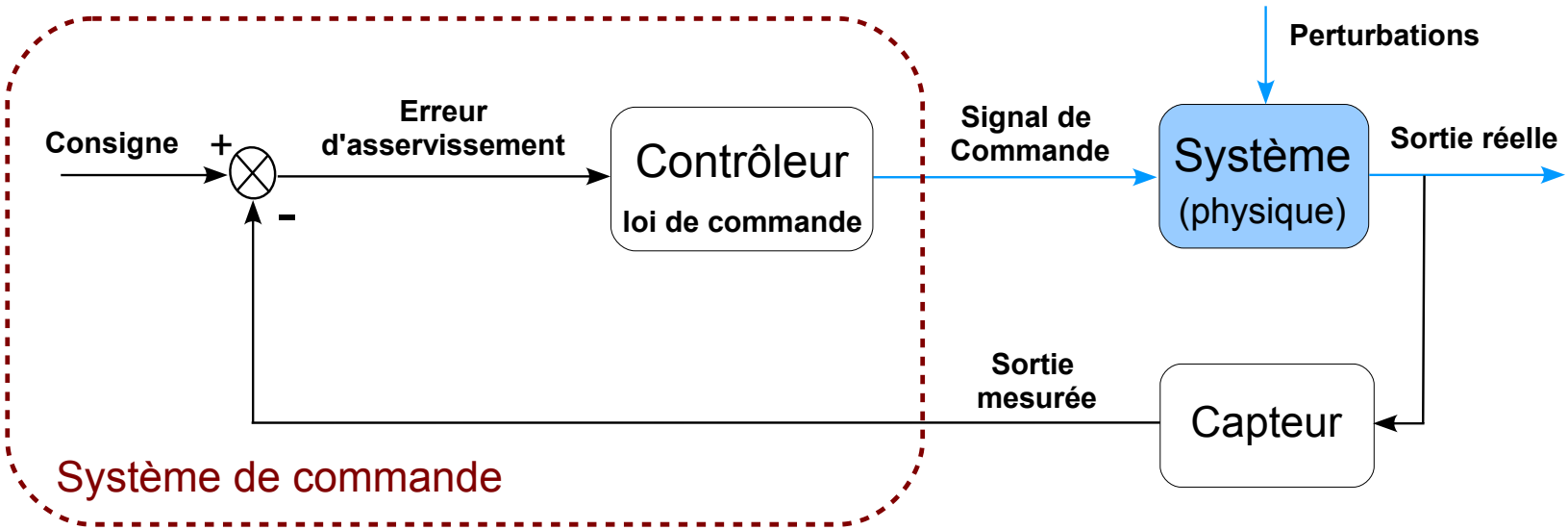
Généralités

Schéma de principe de base d'un système asservi



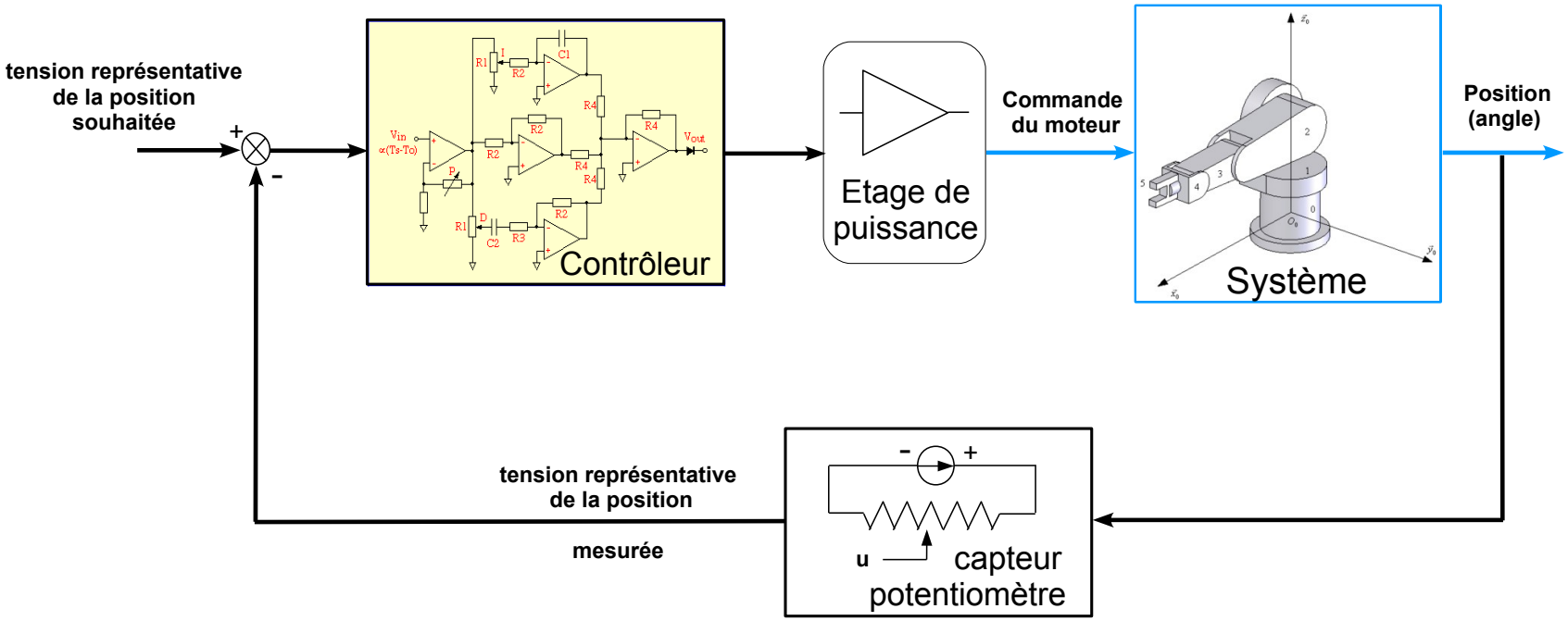
Généralités

Schéma de principe de base d'un système asservi

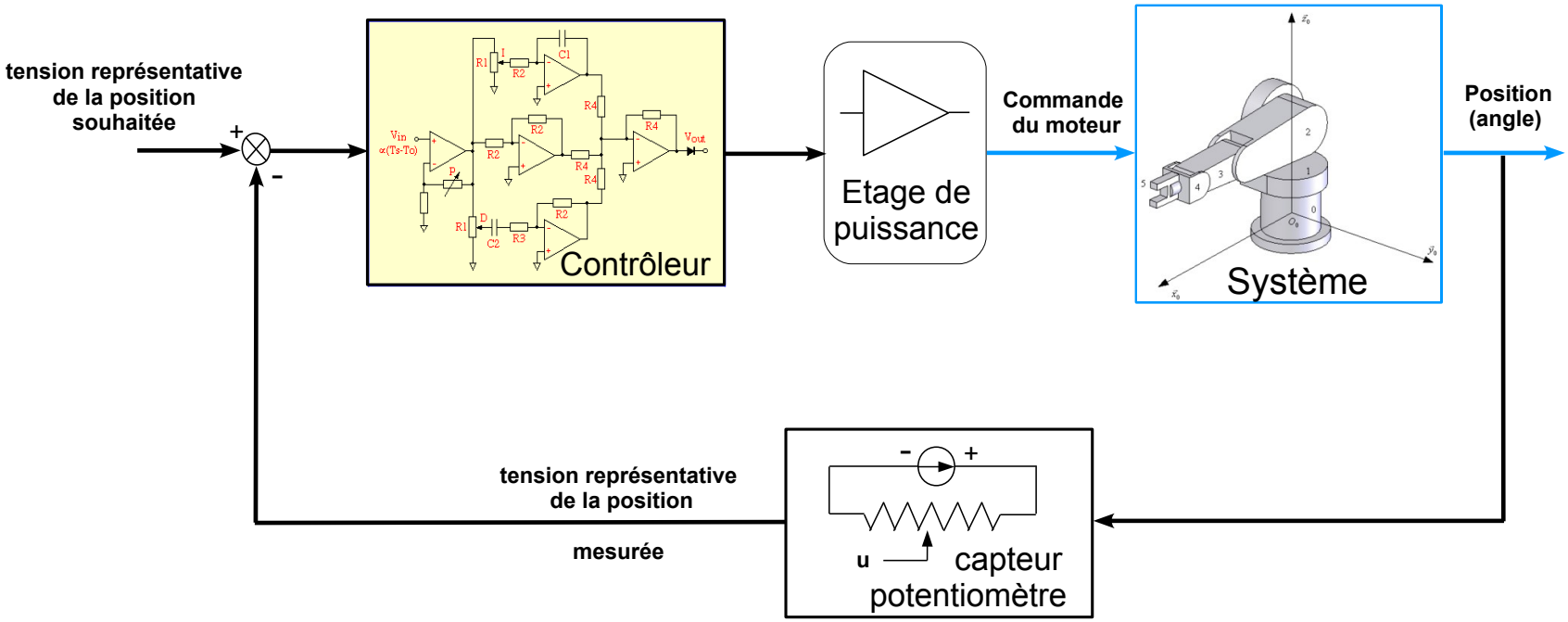


- Objectif : asservir la sortie à la valeur spécifiée en consigne.
- Le contrôleur génère le signal de commande pour contrôler le système en fonction de l'écart entre la consigne et la sortie mesurée.
- Des perturbations peuvent modifier le comportement du système.

Commande analogique d'un système

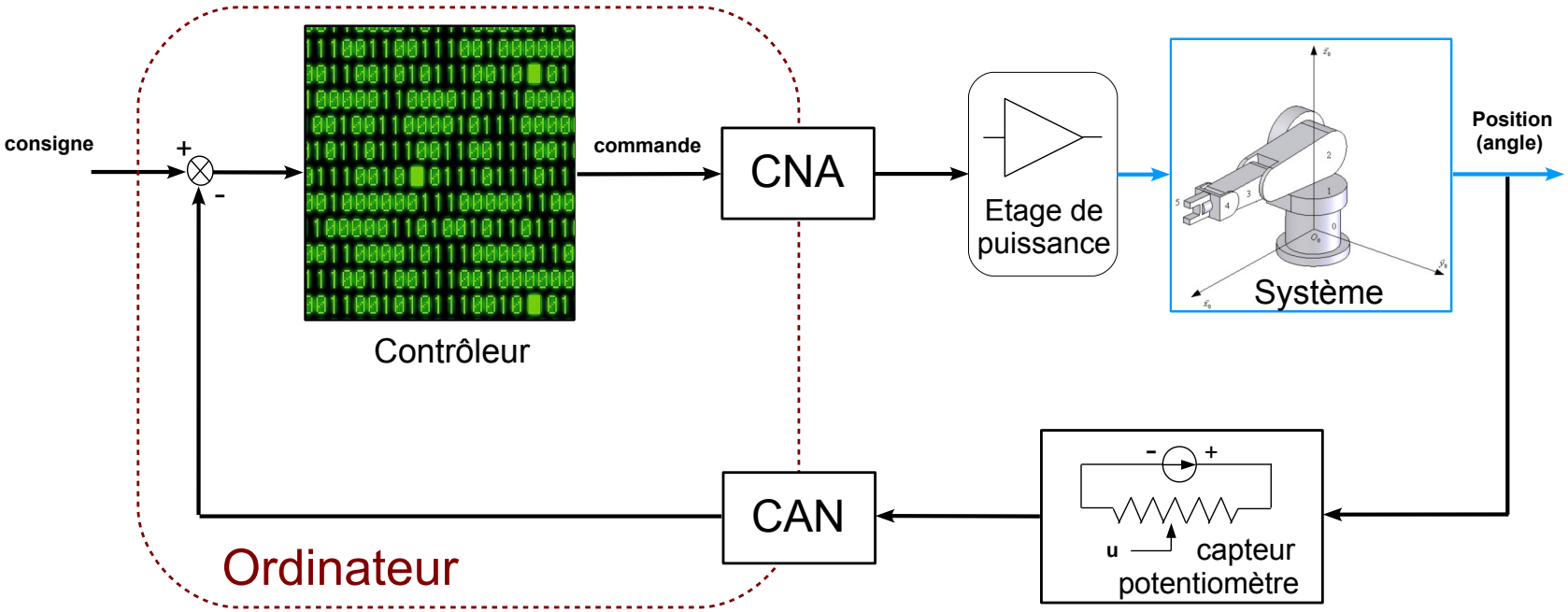


Commande analogique d'un système



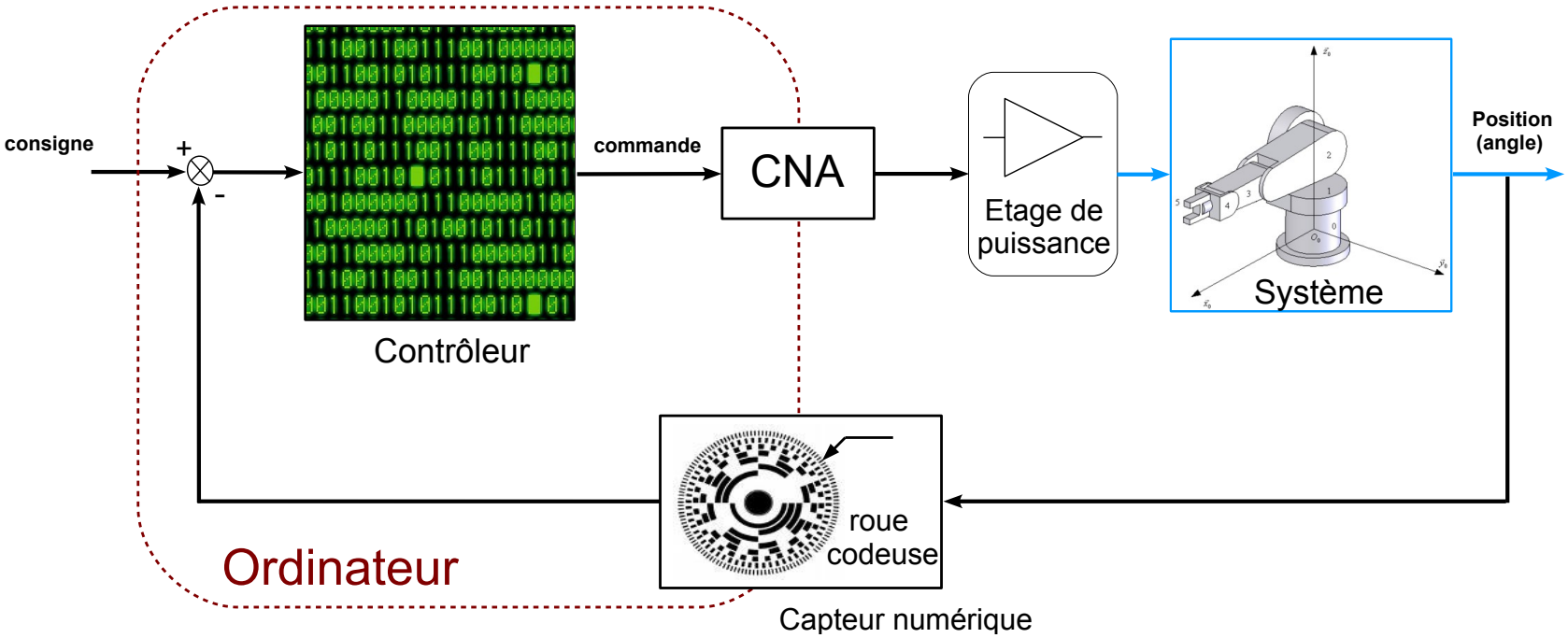
- La position mesurée est comparée à une position de référence (via une tension).
- Un contrôleur, **mis en oeuvre par un circuit électronique**, commande le moteur du bras.
- L'étage de puissance permet d'adapter le signal de commande à la puissance de fonctionnement du moteur.

Commande numérique d'un système



- Le système de commande est réalisé par un ordinateur/microcontrôleur.
- CAN : convertisseur analogique numérique, échantillonnage de la mesure.
- CNA : convertisseur numérique analogique, génération d'une tension à partir d'un mot binaire.

Commande numérique d'un système



- Le système de commande est réalisé par un ordinateur/microcontrôleur.
- CAN : convertisseur analogique numérique, échantillonnage de la mesure.
- CNA : convertisseur numérique analogique, génération d'une tension à partir d'un mot binaire.
- Possibilité d'utiliser un capteur numérique, la mesure est un code binaire.

Commande numérique, pourquoi ?

Avantages

- Souplesse d'implémentation et de modification de la loi de commande.
- Facilité d'implémentation (programmation) de lois sophistiquées et comprenant de nombreux calculs.
- Possibilité d'adaptation des paramètres en temps-réel ou occasionnellement.
- Insensibilité aux bruits, fiabilité (pas de dérive).
- Interconnexion possible avec d'autres appareils numériques, réseaux...

Inconvénients

- Cohabitation de signaux continus et numériques, nécessité des conversions (A-N et N-A).
- Problème inhérent à l'échantillonnage.

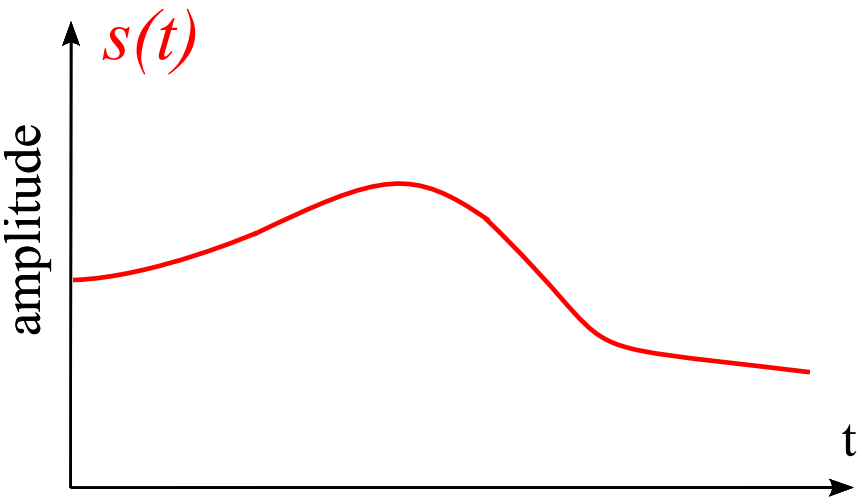
Sommaire

1. Introduction
   - Rappels
   - Généralités
   - Echantillonnage
   - Conversion numérique-analogique
2. Modélisation
   - Transformée en Z
   - Système à temps discret
   - Système échantillonné
3. Analyse d'un asservissement
   - Quelques signaux standards
   - Stabilité d'un système
   - Précision d'un système asservi
4. Synthèse de correcteurs
   - Principe
   - Méthodes de transposition
   - Implémentation

Un signal est la représentation physique de l'information qu'il transporte. Il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable (tension, force, température, vitesse...).

Signaux continus

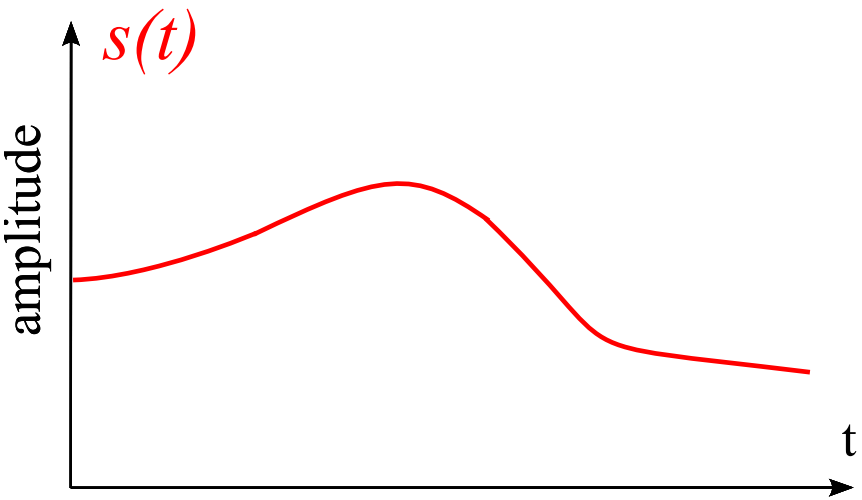
$$\begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & s(t) \end{cases}$$



Un signal est la représentation physique de l'information qu'il transporte. Il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable (tension, force, température, vitesse...).

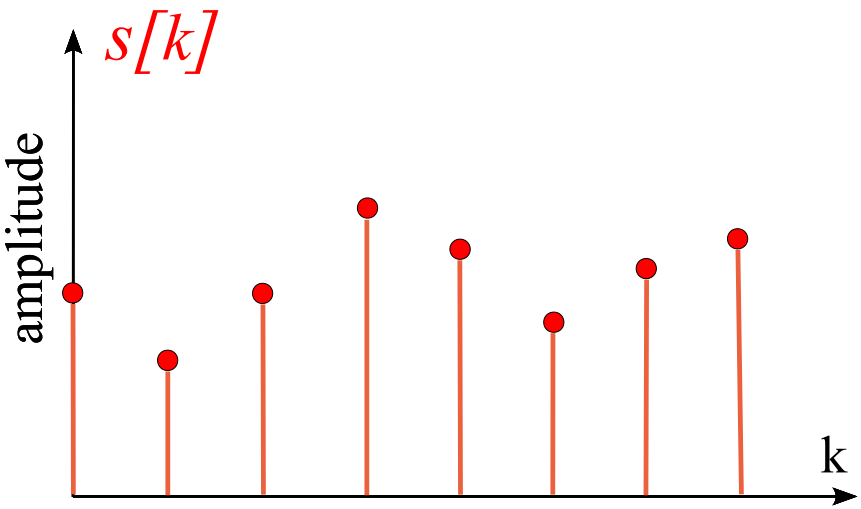
Signaux continus

$$\begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & s(t) \end{cases}$$



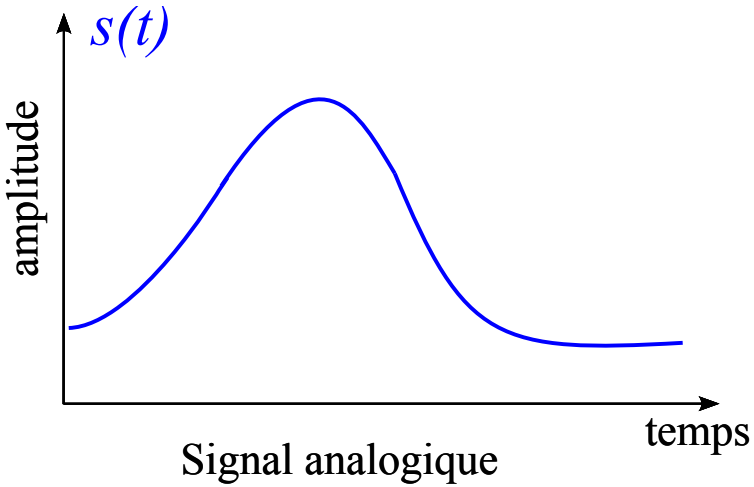
Signaux discrets

$$\begin{cases} \mathbb{N}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ k & \longrightarrow & s_k \end{cases} \quad (\text{ou } s[k])$$

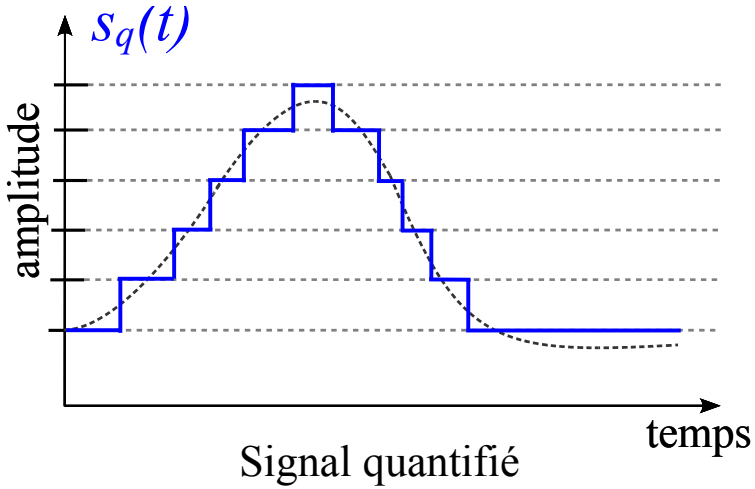


La **numérisation** d'un signal consiste à transposer la représentation d'un signal dans le domaine des temps et des amplitudes continus (signal analogique) au domaine des temps et des amplitudes discrets (signal numérique). Cette opération comporte deux étapes principales : *échantillonnage* et *quantification*.

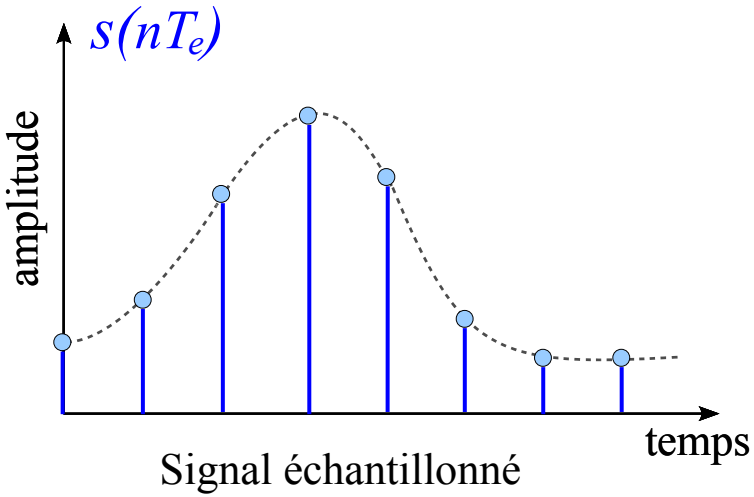
La **numérisation** d'un signal consiste à transposer la représentation d'un signal dans le domaine des temps et des amplitudes continus (signal analogique) au domaine des temps et des amplitudes discrets (signal numérique). Cette opération comporte deux étapes principales : *échantillonnage* et *quantification*.



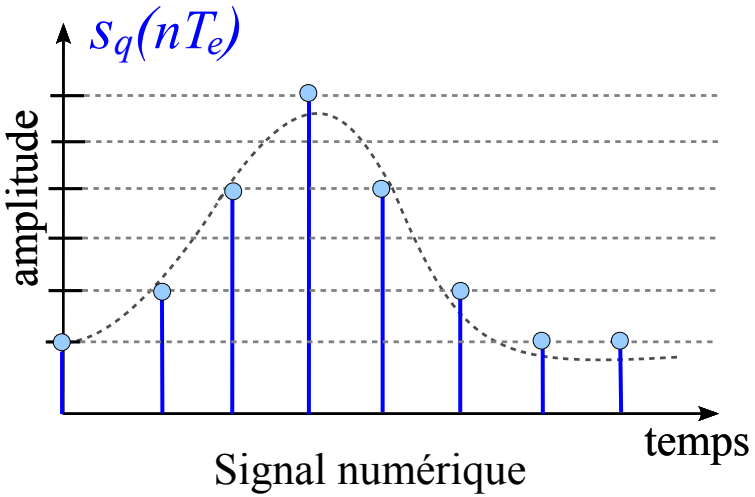
Signal analogique



Signal quantifié



Signal échantillonné

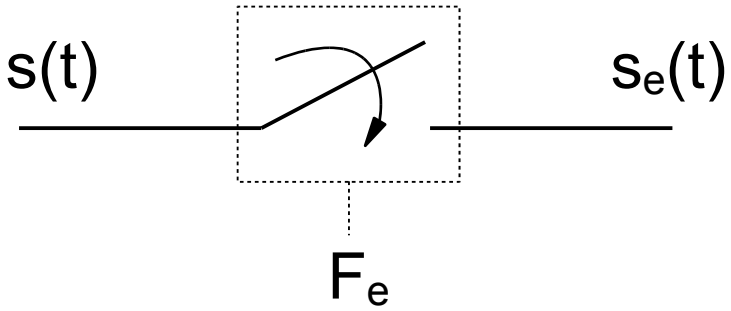


Signal numérique

Echantillonnage d'un signal

Un ordinateur n'est capable de traiter qu'un ensemble dénombrable de valeurs.

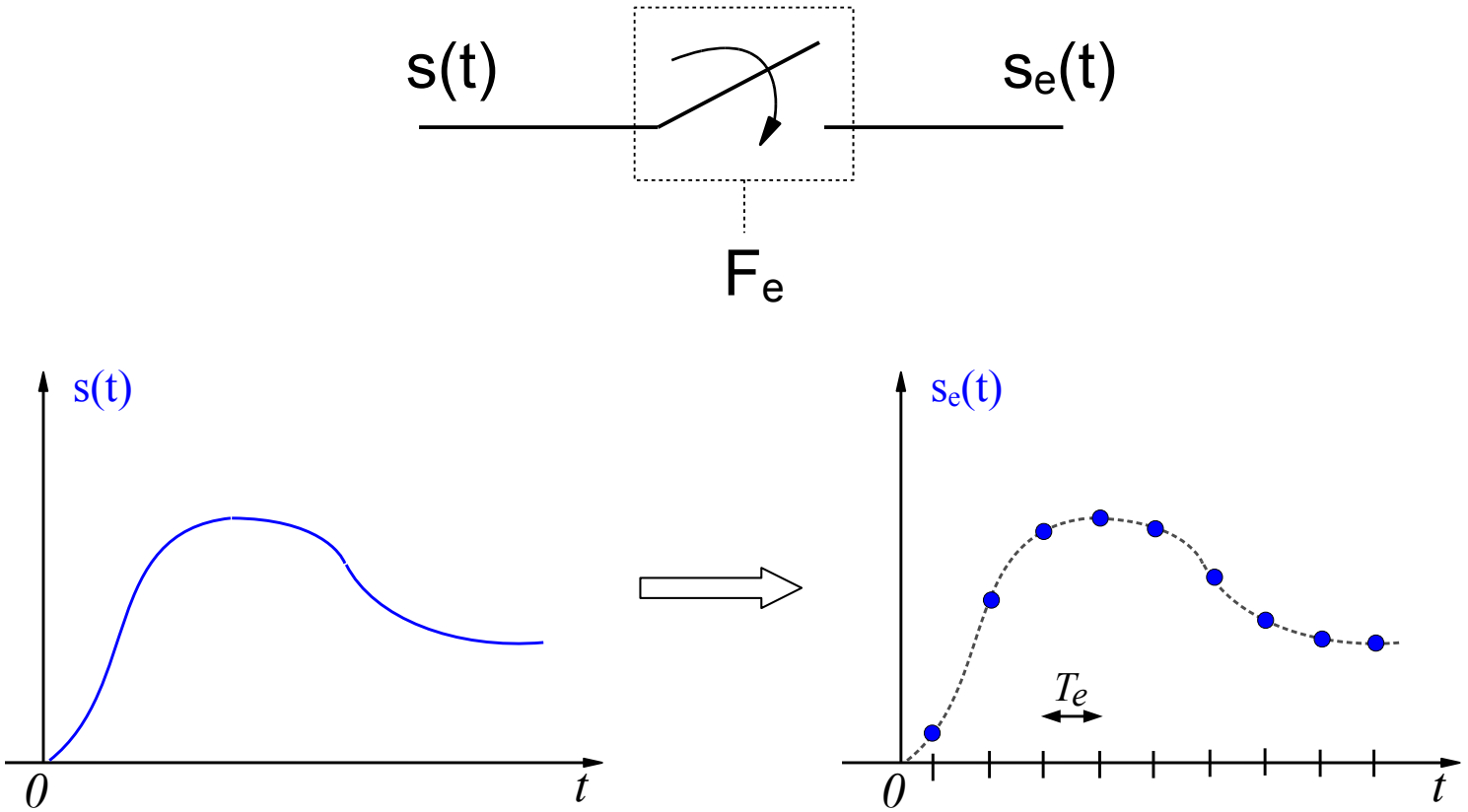
L'échantillonnage consiste à prélever les valeurs prises par un signal à des instants donnés :



Echantillonnage d'un signal

Un ordinateur n'est capable de traiter qu'un ensemble dénombrable de valeurs.

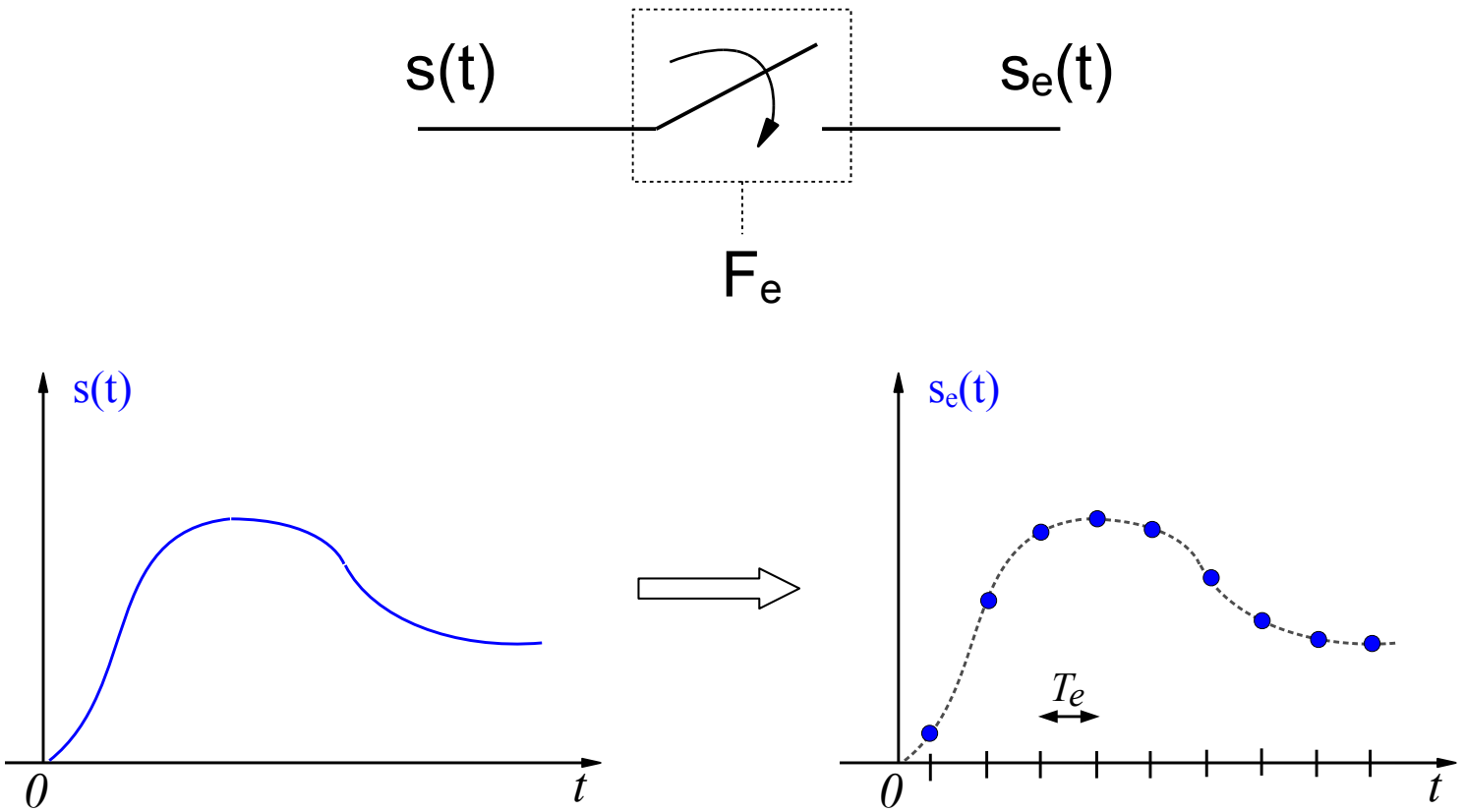
L'échantillonnage consiste à prélever les valeurs prises par un signal à des instants donnés :



Echantillonnage d'un signal

Un ordinateur n'est capable de traiter qu'un ensemble dénombrable de valeurs.

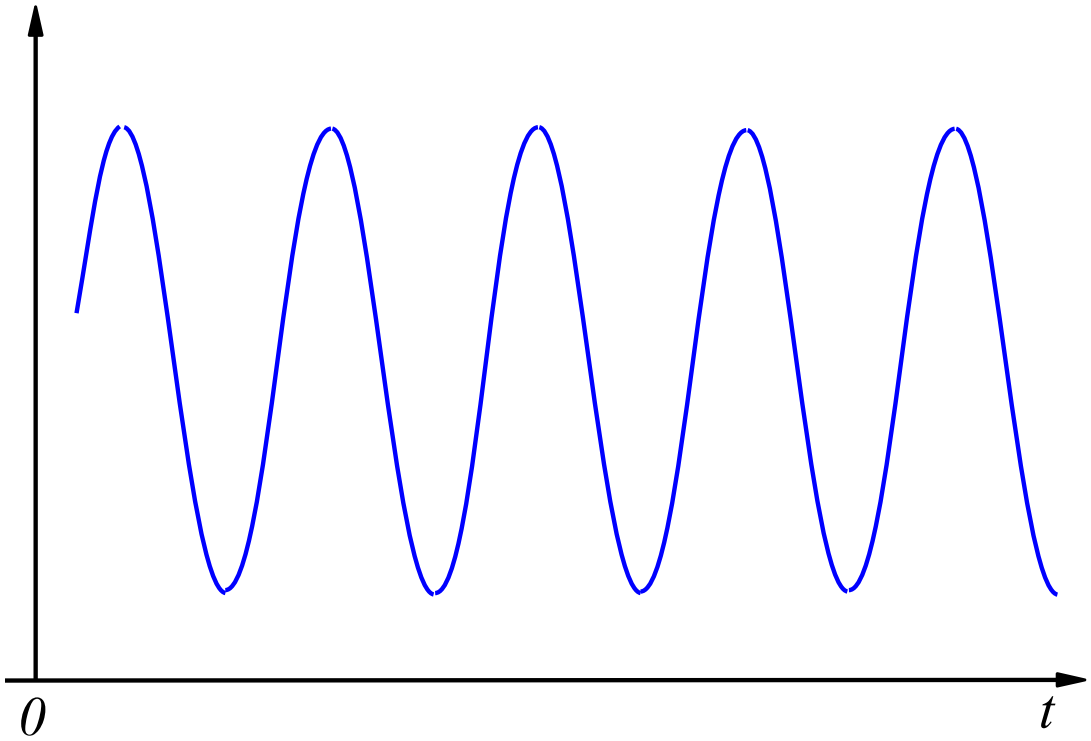
L'échantillonnage consiste à prélever les valeurs prises par un signal à des instants donnés :



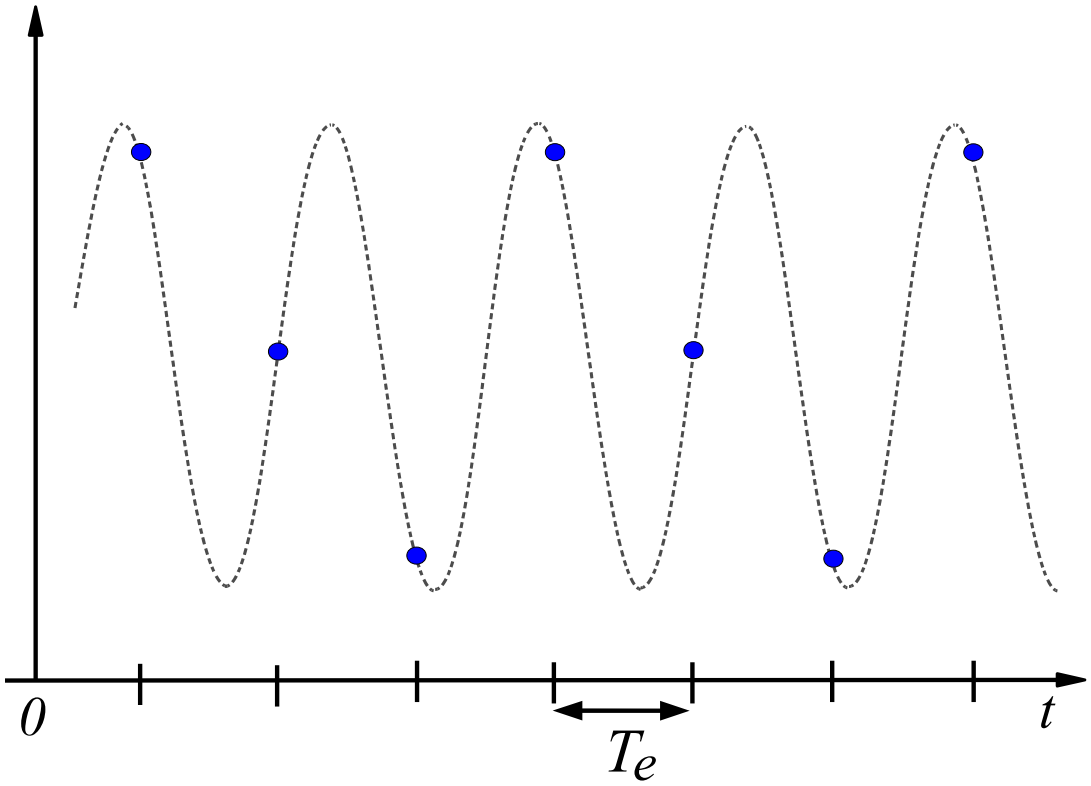
★ Combien de fois par seconde devrions-nous relever le signal pour le restituer correctement ?

$\Rightarrow$ fréquence d'échantillonnage ($F_e = \frac{1}{T_e}$) ?

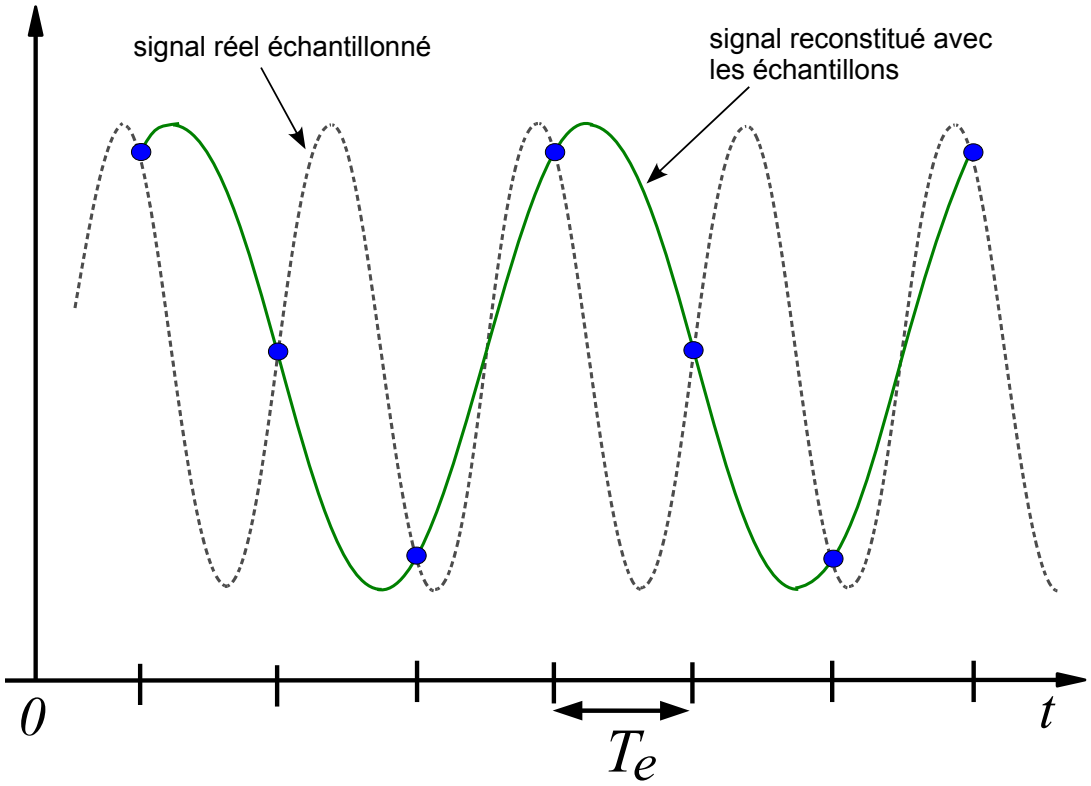
Exemple : échantillonnons une sinusoïde de fréquence f_0 à une fréquence $F_e = \frac{3}{2} f_0$.



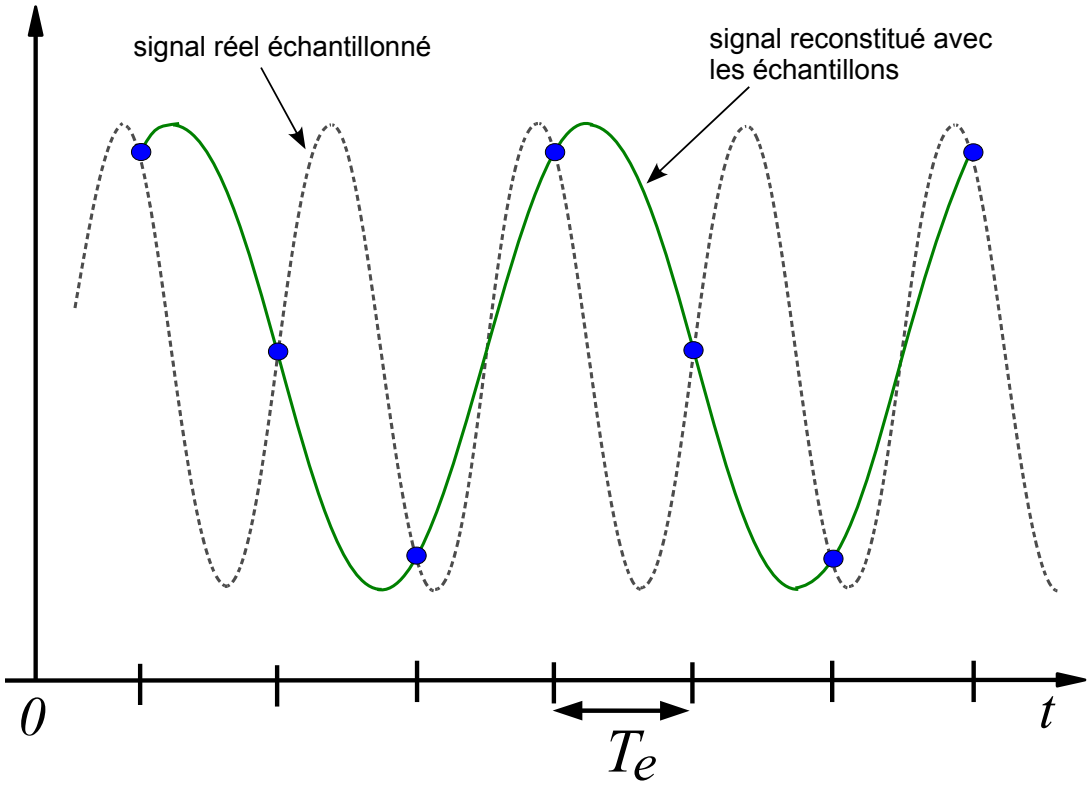
Exemple : échantillonnons une sinusoïde de fréquence f_0 à une fréquence $F_e = \frac{3}{2} f_0$.



Exemple : échantillonnons une sinusoïde de fréquence f_0 à une fréquence $F_e = \frac{3}{2} f_0$.



Exemple : échantillonnons une sinusoïde de fréquence f_0 à une fréquence $F_e = \frac{3}{2} f_0$.

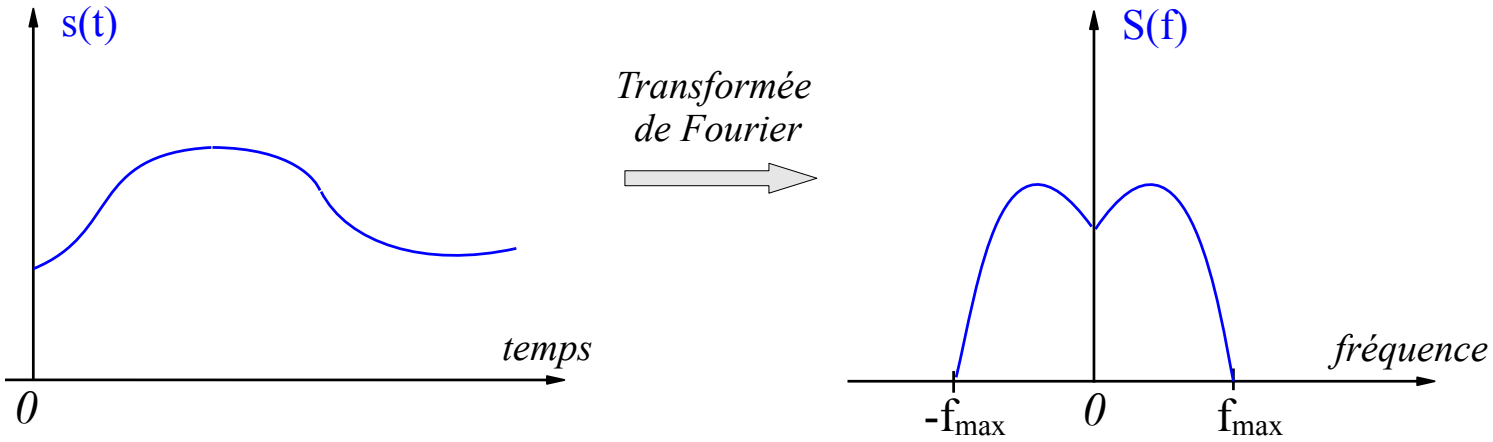


Intuitivement, choix de F_e :

- assez élevée pour représenter fidèlement le signal original,
- limiter le nombre d'échantillons pour économiser le temps de calcul, la mémoire, l'énergie...

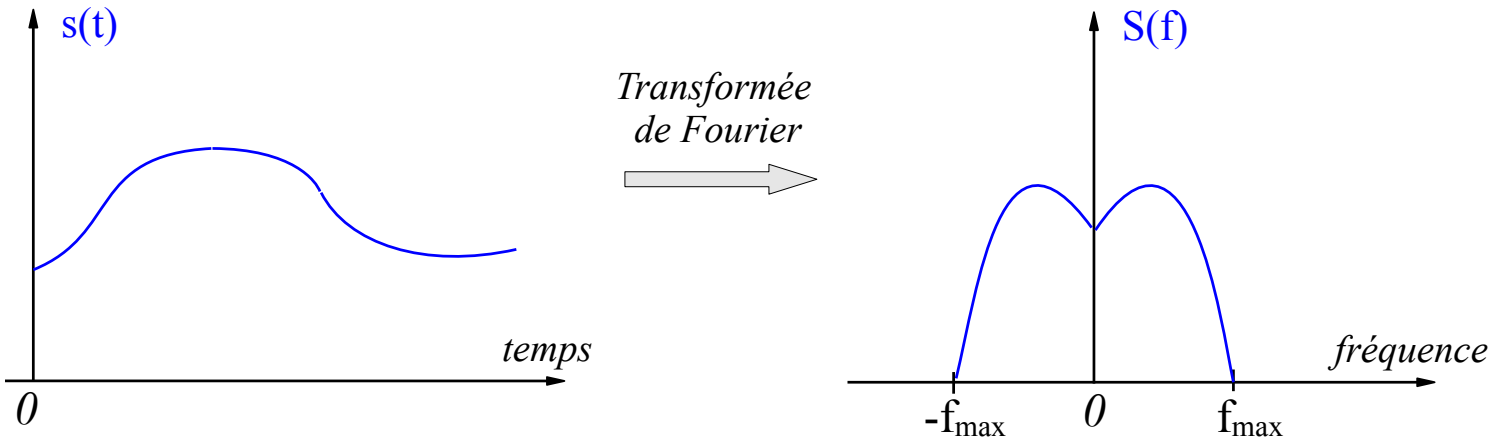
(*résultat fondamental non détaillé ici*)

Soit un signal $s(t)$ ayant un spectre à support borné ($S(f) = 0$ pour $f > f_{max}$)



(*résultat fondamental non détaillé ici*)

Soit un signal $s(t)$ ayant un spectre à support borné ($S(f) = 0$ pour $f > f_{max}$)



Théorème de Shannon :

Pour préserver l'information contenue dans un signal analogique lors de son échantillonnage, la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure au double de la largeur spectrale du signal :

$$F_e \geq 2f_{max}$$

f_{max} est la fréquence maximale du spectre "utile" (contenant l'information) du signal original.

Sommaire

1. Introduction
   - Rappels
   - Généralités
   - Echantillonnage
   - Conversion numérique-analogique
2. Modélisation
   - Transformée en Z
   - Système à temps discret
   - Système échantillonné
3. Analyse d'un asservissement
   - Quelques signaux standards
   - Stabilité d'un système
   - Précision d'un système asservi
4. Synthèse de correcteurs
   - Principe
   - Méthodes de transposition
   - Implémentation

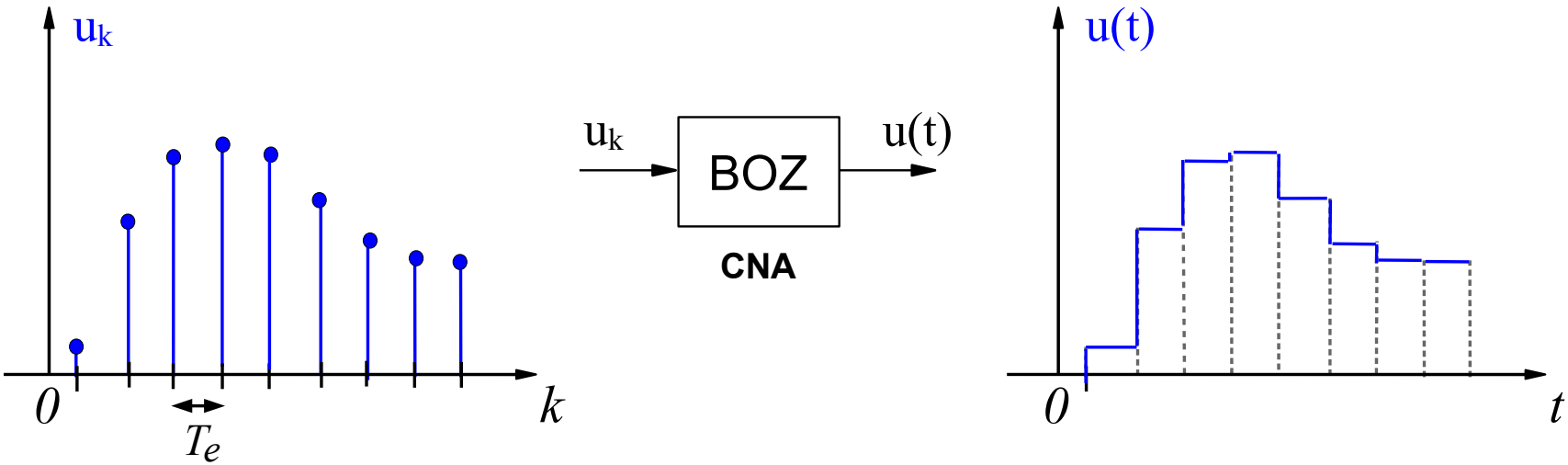
Conversion numérique-analogique

A partir des valeurs numériques calculées par l'ordinateur, quel signal doit être généré pour la commande du système analogique ?

Conversion numérique-analogique

A partir des valeurs numériques calculées par l'ordinateur, quel signal doit être généré pour la commande du système analogique ?

$\Rightarrow$ opération la plus courante : bloquer les valeurs sur un intervalle T_e.

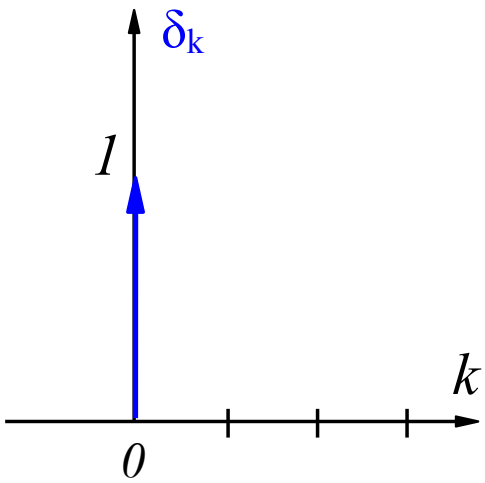


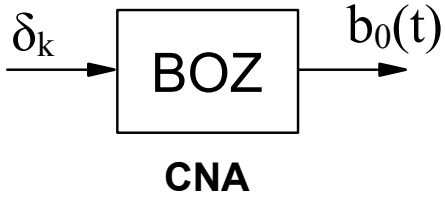
Bloqueur d'Ordre Zéro : interpolation d'ordre 0 (constant) entre 2 échantillons.

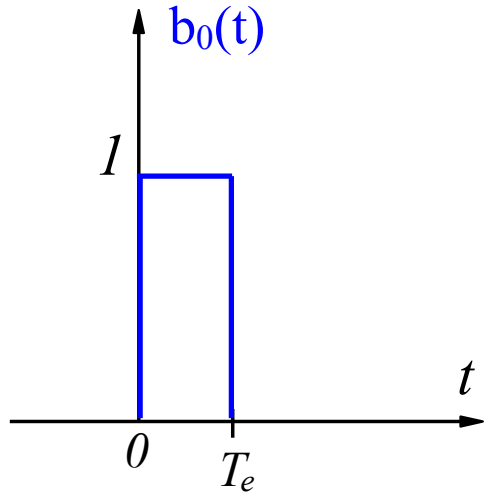
Fonction de transfert du BOZ ?

Fonction de transfert du BOZ ?

Réponse impulsionnelle du bloqueur :

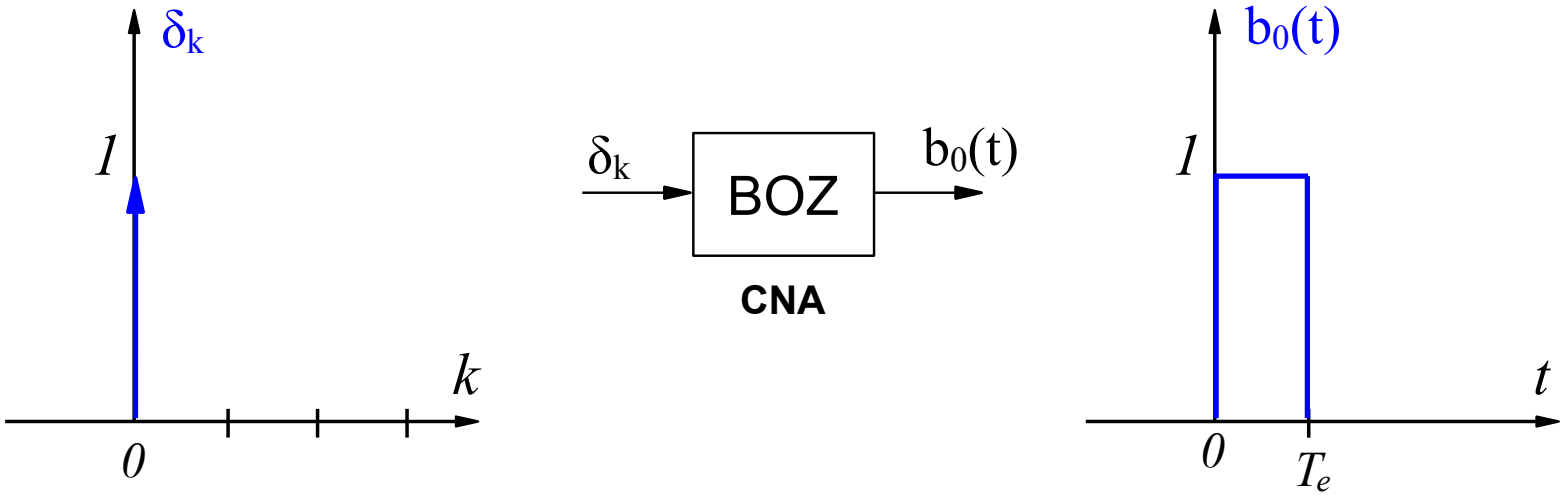






Fonction de transfert du BOZ ?

Réponse impulsionnelle du bloqueur :



$b_0(t) = \Gamma(t) - \Gamma(t - T_e)$, avec $\Gamma(t)$ la fonction échelon unité

Par transformée de Laplace, on a :

$$B_0(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-T_e p}}{p} = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p}$$

Sommaire

1. Introduction
   - Rappels
   - Généralités
   - Echantillonnage
   - Conversion numérique-analogique
2. Modélisation
   - Transformée en Z
   - Système à temps discret
   - Système échantillonné
3. Analyse d'un asservissement
   - Quelques signaux standards
   - Stabilité d'un système
   - Précision d'un système asservi
4. Synthèse de correcteurs
   - Principe
   - Méthodes de transposition
   - Implémentation

Transformée de Laplace

Outil fondamental en Automatique : la transformée de Laplace

$$s(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} S(p)$$

Transformée de Laplace

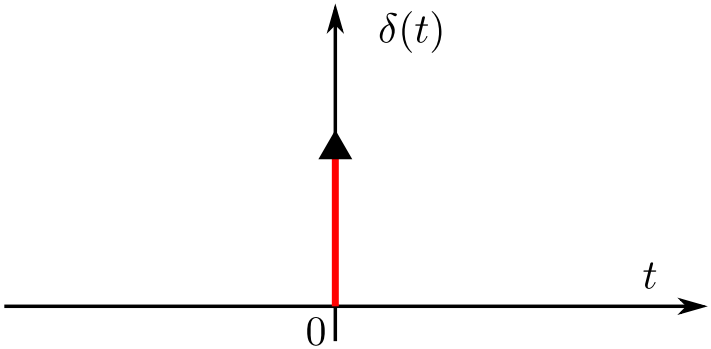
Outil fondamental en Automatique : la transformée de Laplace

$$s(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} S(p)$$

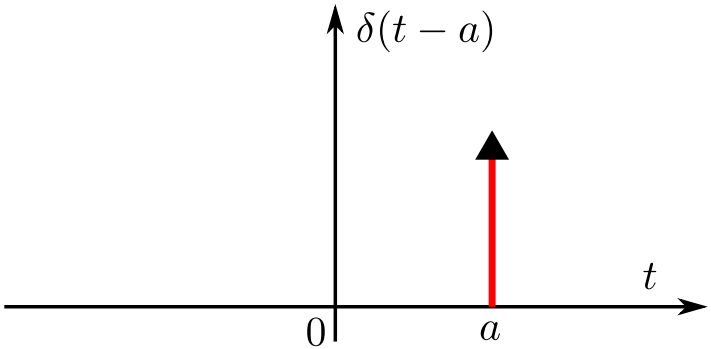
En supposant que $s(t) = 0, \forall t < 0$, On a :

échelon	1	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$\frac{1}{p}$
rampe	t	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$\frac{1}{p^2}$
exponentielle $(a > 0)$	e^{-at}	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$\frac{1}{p+a}$
sinus	$\sin \omega t$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Transformée de Laplace d'une impulsion de Dirac



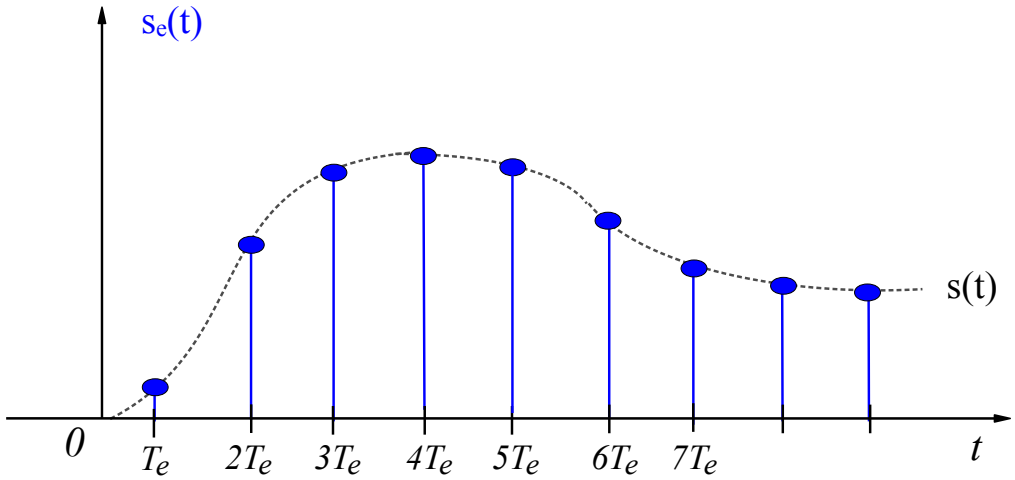
$$\Rightarrow \qquad S(p) = 1$$



$$\Rightarrow \qquad S(p) = e^{-p\,a}$$

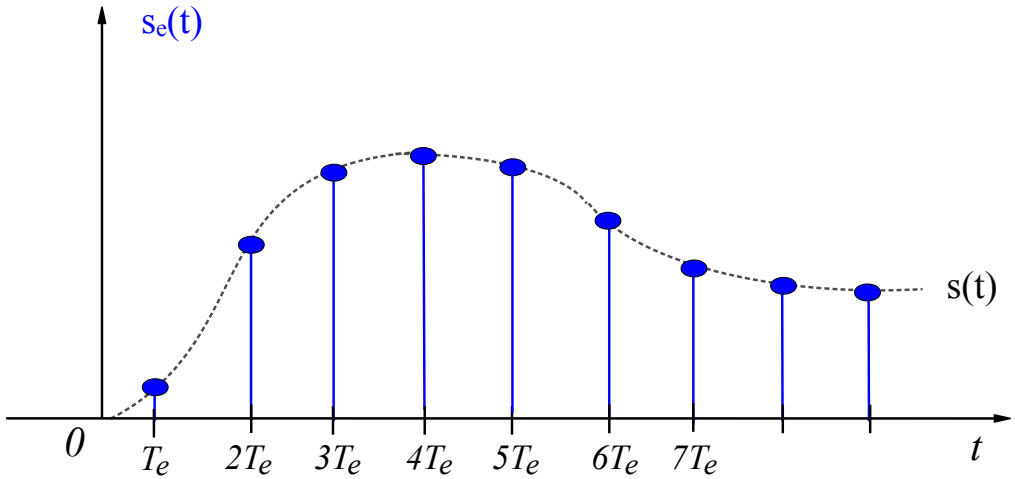
Cas des signaux discret

Quelle est la transformée de Laplace d'un signal discret ?



Cas des signaux discret

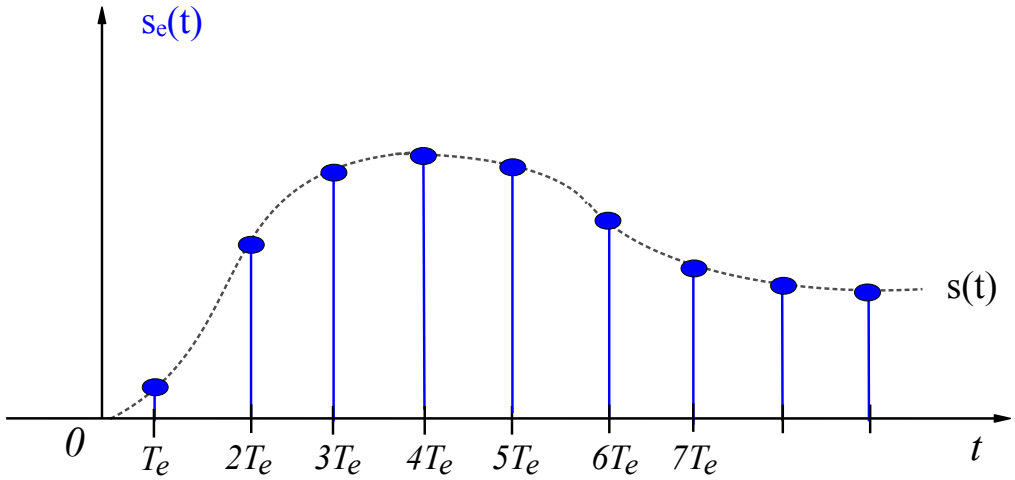
Quelle est la transformée de Laplace d'un signal discret ?



$$s_e(t) = s(0)\delta(t) + s(T_e)\delta(t - T_e) + s(2T_e)\delta(t - 2T_e) + s(3T_e)\delta(t - 3T_e) + \ldots + s(kT_e)\delta(t - kT$$

Cas des signaux discret

Quelle est la transformée de Laplace d'un signal discret ?



$$s_e(t) = s(0)\delta(t) + s(T_e)\delta(t - T_e) + s(2T_e)\delta(t - 2T_e) + s(3T_e)\delta(t - 3T_e) + \ldots + s(kT_e)\delta(t - kT$$

$$\downarrow \quad \mathcal{L}$$

$$S_e(p) = s(0) + s(T_e)e^{-pT_e} + s(2T_e)e^{-p2T_e} + s(3T_e)e^{-p3T_e} + \ldots + s(kT_e)e^{-pkT_e}$$

Transformée en Z

La transformée de Laplace d'un signal discret s'écrit donc :

$$s_e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} S_e(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e)\, e^{-pkT_e}$$

Transformée en Z

La transformée de Laplace d'un signal discret s'écrit donc :

$$s_e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} S_e(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e)\, e^{-pkT_e}$$

Si l'on pose $z = e^{pT_e}$,

on définit la **transformée en Z** d'un signal discret $s[k]$, la série :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s[k]\, z^{-k}$$

On note $S(z) = \mathcal{Z}\Big\{s_e(t)\Big\}$. z est une variable complexe.

On note : $s[k] \equiv s(kT_e)$

Soit les signaux : $f[k] \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z)$ et $g[k] \xrightarrow{\mathcal{Z}} G(z)$

Propriétés :

- Linéarité, pour a et b réels quelconques,

$$\mathcal{Z}\Big\{a\,f[k] \;+\; b\,g[k]\Big\} \;=\; a\,F(z) \;+\; b\,G(z)$$

- Retard, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{Z}\Big\{f[k-n]\Big\} \;=\; z^{-n}\,F(z)$$

- Avance, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{Z}\Big\{f[k+n]\Big\} \;=\; z^{n}\,F(z) - \sum_{i=0}^{n-1} f[k]\,z^{n-k}$$

- Théorème de la valeur finale,

$$\lim_{k\to\infty} f[k] \;=\; \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\,F(z)$$

Table des transformées en Z

Rappelons que les fonctions temporelles $f(t)$ ci-dessous sont nulles pour $t < 0$.

Signal continu $f(t)$	Signal échantillonné $f(kT_e)$	Transformée en Z : $F(z)$
1	1	$\dfrac{z}{z-1}$
t	kT_e	$\dfrac{T_e z}{(z-1)^2}$
	a^k	$\dfrac{z}{z-a}$
e^{-at}	e^{-akT_e}	$\dfrac{z}{z-e^{-aT_e}}$

Table des transformées en Z

Rappelons que les fonctions temporelles $f(t)$ ci-dessous sont nulles pour $t < 0$.

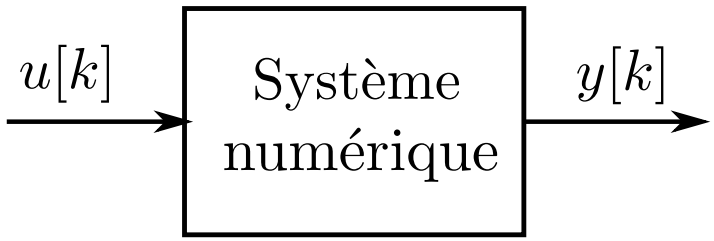
Signal continu $f(t)$	Signal échantillonné $f(kT_e)$	Transformée en Z : $F(z)$
$\sin(\omega t)$	$\sin(\omega k T_e)$	$\dfrac{z \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e) + 1}$
$\cos(\omega t)$	$\cos(\omega k T_e)$	$\dfrac{z^2 - z\cos(\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_e) + 1}$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$e^{-akT_e}\sin(\omega k T_e)$	$\dfrac{ze^{-aT_e}\sin(\omega T_e)}{z^2 - 2ze^{-aT_e}\cos(\omega T_e) + e^{-2aT_e}}$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$e^{-akT_e}\cos(\omega k T_e)$	$\dfrac{z^2 - ze^{-aT_e}\cos(\omega T_e)}{z^2 - 2ze^{-aT_e}\cos(\omega T_e) + e^{-2aT_e}}$

Sommaire

1. Introduction
   - Rappels
   - Généralités
   - Echantillonnage
   - Conversion numérique-analogique
2. Modélisation
   - Transformée en Z
   - Système à temps discret
   - Système échantillonné
3. Analyse d'un asservissement
   - Quelques signaux standards
   - Stabilité d'un système
   - Précision d'un système asservi
4. Synthèse de correcteurs
   - Principe
   - Méthodes de transposition
   - Implémentation

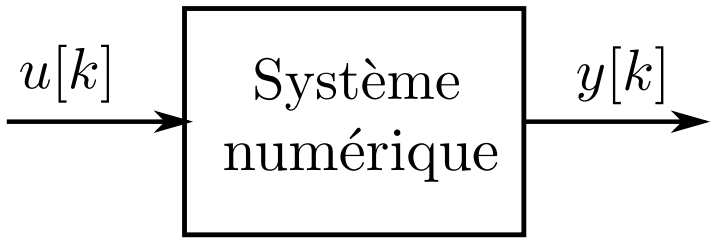
Système à temps discret

Un système numérique met en relation des variables à temps discret



Système à temps discret

Un système numérique met en relation des variables à temps discret

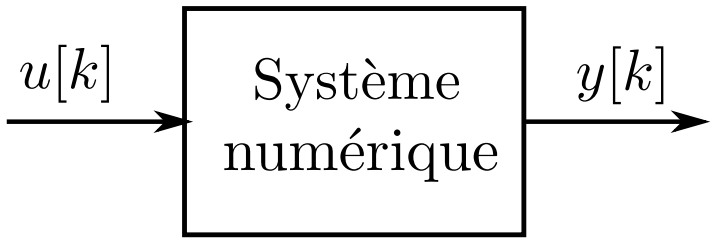


L'entrée et la sortie sont liées par une **équation récurrente** :
(cas des systèmes linéaires invariants)

$$a_n y[k] + a_{n-1} y[k-1] + \ldots + a_0 y[k-n] = b_m u[k] + b_{m-1} u[k-1] + \ldots + b_0 u[k-m]$$

Système à temps discret

Un système numérique met en relation des variables à temps discret



L'entrée et la sortie sont liées par une **équation récurrente** :
(cas des systèmes linéaires invariants)

$$a_n y[k] + a_{n-1} y[k-1] + \ldots + a_0 y[k-n] = b_m u[k] + b_{m-1} u[k-1] + \ldots + b_0 u[k-m]$$

exemple :

$$2y[k] + 4y[k-1] + y[k-2] = u[k] + 0.5u[k-1]$$

ou encore

$$2y[k+2] + 4y[k+1] + y[k] = u[k+2] + 0.5u[k+1]$$

Nous pouvons directement exprimer l'évolution de la sortie :

$$y[k] = \frac{1}{a_n}\left(b_m u[k] + b_{m-1} u[k-1] + \ldots + b_0 u[k-m] - a_{n-1} y[k-1] - \ldots - a_0 y[k-n]\right)$$

A l'instant k, la valeur de la sortie s'exprime en fonction des échantillons passées de l'entrée et de la sortie (et éventuellement de l'entrée présente).

Nous pouvons directement exprimer l'évolution de la sortie :

$$y[k] = \frac{1}{a_n}\Big(b_m u[k]+b_{m-1}u[k-1]+\ldots+b_0 u[k-m]-a_{n-1}y[k-1]-\ldots-a_0 y[k-n]\Big)$$

A l'instant k, la valeur de la sortie s'exprime en fonction des échantillons passées de l'entrée et de la sortie (et éventuellement de l'entrée présente).

exemple :

$$y[k] = \frac{1}{2}\Big(u[k] + 0.5u[k-1] - 4y[k-1] - y[k-2]\Big)$$

Si $y[k]$ dépend de valeurs d'entrées futurs, $u[k+i]$, le système n'est pas causal.

Exemple 1 évolution de la dette de Mr. xxx.

A chaque mois k, on définit :

$y[k]$: la dette r : l'intérêt $u[k]$: remboursement mensuel

Exemple 1 évolution de la dette de Mr. xxx.

A chaque mois k, on définit :

$y[k]$: la dette r : l'intérêt $u[k]$: remboursement mensuel

Modèle à temps discret :

$$y[k+1] = y[k] + r\, y[k] - u[k]$$

Exemple 1 évolution de la dette de Mr. xxx.

A chaque mois k, on définit :

$y[k]$: la dette r : l'intérêt $u[k]$: remboursement mensuel

Modèle à temps discret :

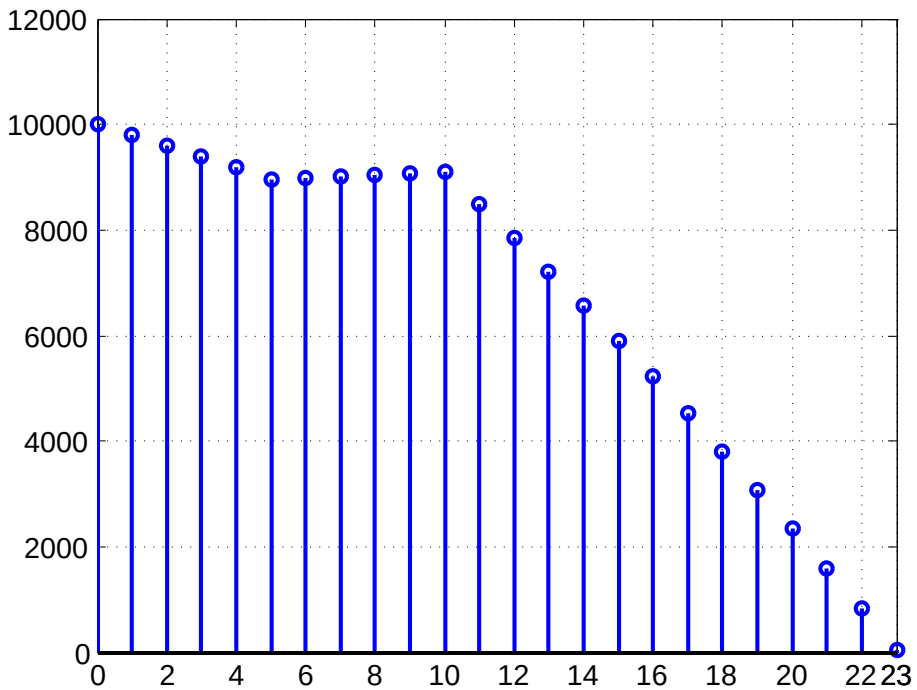
$$y[k+1] = y[k] + r\, y[k] - u[k]$$

Evolution de la dette :

$r = 0.02$

$y[0] = 10000$ (emprunt initial)

$$u[k] = \begin{cases} 400, & k = 1, \ldots, 5 \\ 150, & k = 6, \ldots, 10 \\ 800, & k = 11, \ldots, 23 \end{cases}$$



Exemple 2 dynamique des populations (modélisation basique).

Population = ensemble d'individus d'une même espèce vivant dans un même territoire et pouvant se reproduire entre eux.

$$N_{t+1} - N_t = \text{ naissances } - \text{ morts } + \text{ migrations}$$

Exemple 2 dynamique des populations (modélisation basique).

Population = ensemble d'individus d'une même espèce vivant dans un même territoire et pouvant se reproduire entre eux.

$$N_{t+1} - N_t = \text{ naissances } - \text{ morts } + \text{ migrations}$$

Modèle exponentiel :

- population isolée,
- pas de migrations,
- ressources illimitées.

$$N[k+1] = N[k] + r\, N[k]$$

r : taux intrinsèque d'accroissement.

Exemple 2 dynamique des populations (modélisation basique).

Population = ensemble d'individus d'une même espèce vivant dans un même territoire et pouvant se reproduire entre eux.

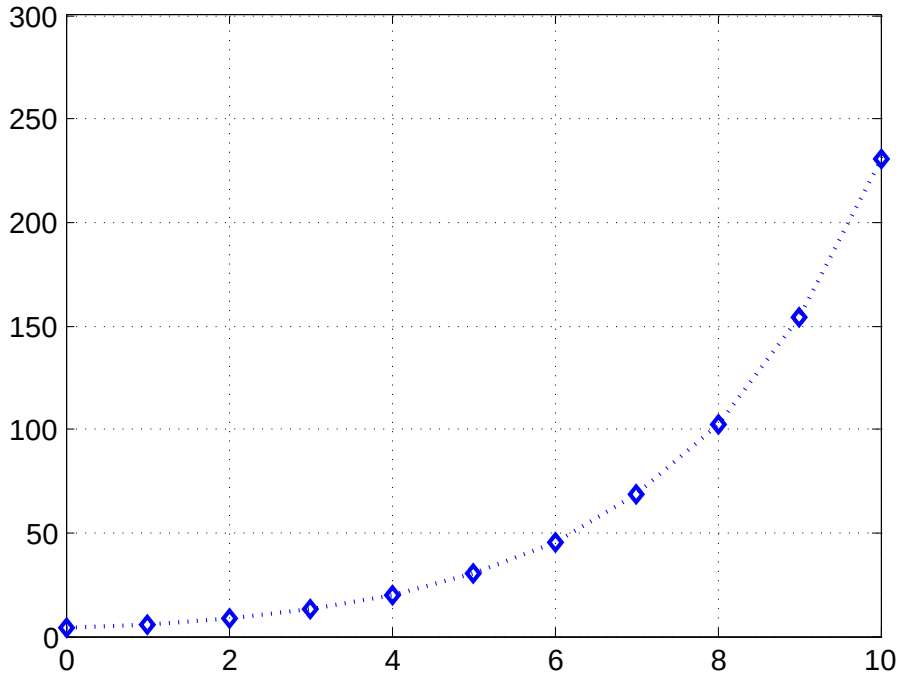
$$N_{t+1} - N_t = \text{ naissances } - \text{ morts } + \text{ migrations}$$

Modèle exponentiel :

- population isolée,
- pas de migrations,
- ressources illimitées.

$$N[k+1] = N[k] + r\, N[k]$$

r : taux intrinsèque d'accroissement.



exemple avec $N[0] = 4$ et $r = 0.5$

Appliquons la transformée en Z à une équation récurrente

$$y[k] + 3y[k-1] + 6y[k-2] \;=\; u[k]$$

Appliquons la transformée en Z à une équation récurrente

$$y[k] + 3y[k-1] + 6y[k-2] \;=\; u[k]$$

$$\Big\downarrow \quad \mathcal{Z}$$

$$Y(z) + 3z^{-1}Y(z) + 6z^{-2}Y(z) = U(z)$$

Appliquons la transformée en Z à une équation récurrente

$$y[k] + 3y[k-1] + 6y[k-2] \;=\; u[k]$$

$$\downarrow \quad \mathcal{Z}$$

$$Y(z) + 3z^{-1}Y(z) + 6z^{-2}Y(z) = U(z)$$

$$\downarrow$$

Fonction de transfert en Z : $\boxed{F(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{1}{1 + 3z^{-1} + 6z^{-2}}}$

Appliquons la transformée en Z à une équation récurrente

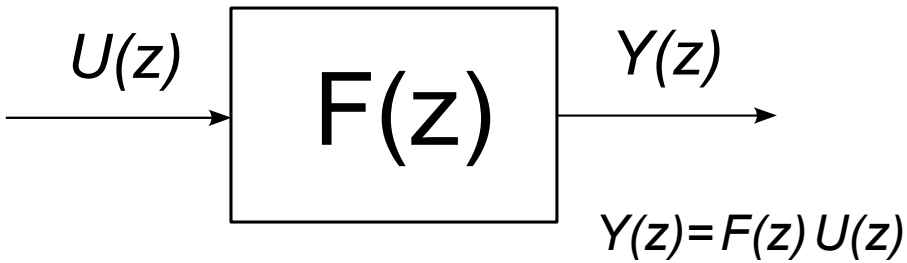
$$y[k] + 3y[k-1] + 6y[k-2] \;=\; u[k]$$

$$\downarrow \quad \mathcal{Z}$$

$$Y(z) + 3z^{-1}Y(z) + 6z^{-2}Y(z) = U(z)$$

$$\downarrow$$

Fonction de transfert en Z : $\boxed{F(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{1}{1 + 3z^{-1} + 6z^{-2}}}$



Cas général :

$$a_n y[k] + a_{n-1} y[k-1] + \ldots + a_0 y[k-n] \;=\; b_m u[k] + b_{m-1} u[k-1] + \ldots + b_0 u[k-m]$$

Cas général :

$$a_n y[k] + a_{n-1} y[k-1] + \ldots + a_0 y[k-n] \;=\; b_m u[k] + b_{m-1} u[k-1] + \ldots + b_0 u[k-m]$$

$$\downarrow \quad \mathcal{Z}$$

$$a_n Y(z) + a_{n-1} z^{-1} Y(z) + \ldots + a_0 z^{-n} Y(z) = b_m U(z) + b_{m-1} z^{-1} U(z) + \ldots + b_0 z^{-m} U(z)$$

Cas général :

$$a_n y[k] + a_{n-1} y[k-1] + \ldots + a_0 y[k-n] \;=\; b_m u[k] + b_{m-1} u[k-1] + \ldots + b_0 u[k-m]$$

$$\downarrow \quad \mathcal{Z}$$

$$a_n Y(z) + a_{n-1} z^{-1} Y(z) + \ldots + a_0 z^{-n} Y(z) = b_m U(z) + b_{m-1} z^{-1} U(z) + \ldots + b_0 z^{-m} U(z)$$

$$\downarrow$$

Fonction de transfert en Z :

$$\boxed{F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m + b_{m-1} z^{-1} + \ldots + b_0 z^{-m}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}}}$$

Cas général :

$$a_n y[k] + a_{n-1} y[k-1] + \ldots + a_0 y[k-n] \;=\; b_m u[k] + b_{m-1} u[k-1] + \ldots + b_0 u[k-m]$$

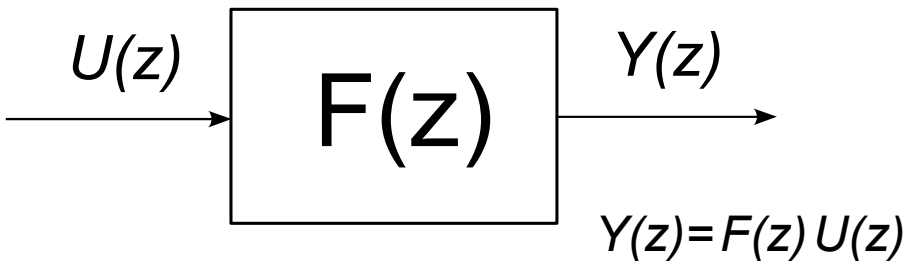
$$\downarrow \quad \mathcal{Z}$$

$$a_n Y(z) + a_{n-1} z^{-1} Y(z) + \ldots + a_0 z^{-n} Y(z) = b_m U(z) + b_{m-1} z^{-1} U(z) + \ldots + b_0 z^{-m} U(z)$$

$$\downarrow$$

Fonction de transfert en Z :

$$\boxed{F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m + b_{m-1} z^{-1} + \ldots + b_0 z^{-m}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}}}$$



Exemple :

Soit un système à temps discret, d'entré $u[k]$ et de sortie $y[k]$, régit par

$$y[k] + 2y[k-1] - 4y[k-2] = 5u[k] + u[k-1]$$

Exemple :

Soit un système à temps discret, d'entré $u[k]$ et de sortie $y[k]$, régit par

$$y[k] + 2y[k-1] - 4y[k-2] = 5u[k] + u[k-1]$$

Application de la transformée en Z :

$$Y(z) + 2z^{-1}Y(z) - 4z^{-2}Y(z) = 5U(z) + z^{-1}U(z)$$

Exemple :

Soit un système à temps discret, d'entré $u[k]$ et de sortie $y[k]$, régit par

$$y[k] + 2y[k-1] - 4y[k-2] = 5u[k] + u[k-1]$$

Application de la transformée en Z :

$$Y(z) + 2z^{-1}Y(z) - 4z^{-2}Y(z) = 5U(z) + z^{-1}U(z)$$

On en déduit la fonction de transfert en Z du système :

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{5 + z^{-1}}{1 + 2z^{-1} - 4z^{-2}}$$

ou encore

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{5z^2 + z}{z^2 + 2z - 4}$$

Parallèle systèmes analogiques - systèmes numériques

Temps discret	Temps continu
Equations récurrentes	Equations différentielles
$\left\{ y[k], y[k-1], y[k-2], \ldots, u[k], u[k-1], \ldots \right\}$	$\left\{ y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \ldots, u(t), \dot{u}(t), \ldots \right\}$
Fonction de transfert en Z	Fonction de transfert
(trans. en Z) $\left\{ Y(z), U(z) \right\}$	(trans. de Laplace) $\left\{ Y(p), U(p) \right\}$

Sommaire

1. Introduction
   - Rappels
   - Généralités
   - Echantillonnage
   - Conversion numérique-analogique
2. Modélisation
   - Transformée en Z
   - Système à temps discret
   - Système échantillonné
3. Analyse d'un asservissement
   - Quelques signaux standards
   - Stabilité d'un système
   - Précision d'un système asservi
4. Synthèse de correcteurs
   - Principe
   - Méthodes de transposition
   - Implémentation

Système échantillonné

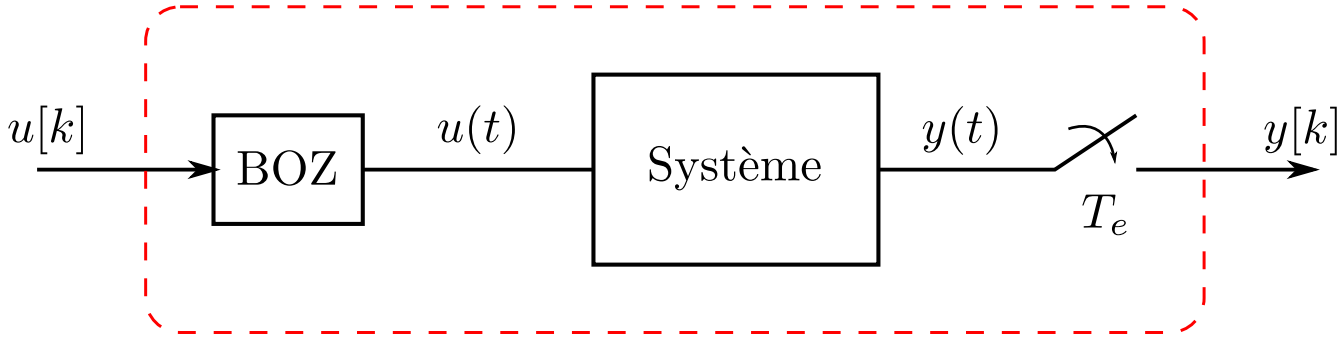
Commande d'un procédé analogique par calculateur :

point de vue du calculateur ?

Système échantillonné

Commande d'un procédé analogique par calculateur :

point de vue du calculateur ?

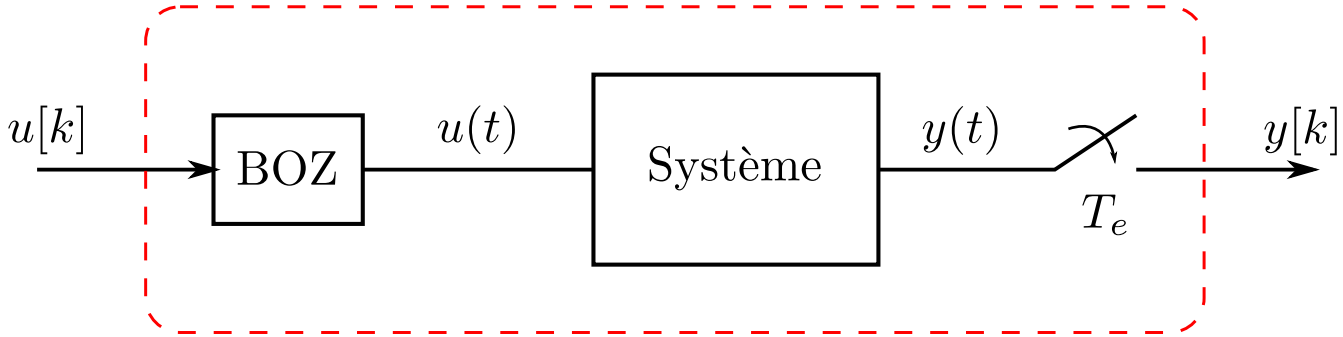


- conversion numérique-analogique : $u[k] \longrightarrow u(t)$
- conversion analogique-numérique : $y(t) \longrightarrow y[k]$
- le calculateur manipule les signaux discrets : $u[k]$ et $y[k]$

Système échantillonné

Commande d'un procédé analogique par calculateur :

point de vue du calculateur ?



- conversion numérique-analogique : $u[k] \longrightarrow u(t)$
- conversion analogique-numérique : $y(t) \longrightarrow y[k]$
- le calculateur manipule les signaux discrets : $u[k]$ et $y[k]$

★ Fonction de transfert en Z du système échantillonné ?

La fonction de transfert du système étant

$$Y(p) = G(p)U(p)$$

quelle fonction de transfert en Z lie $u[k]$ et $y[k]$?

$$Y(z) = G(z)\,U(z)$$

La fonction de transfert du système étant

$$Y(p) = G(p)U(p)$$

quelle fonction de transfert en Z lie $u[k]$ et $y[k]$?

$$Y(z) \;=\; G(z)\,U(z)$$

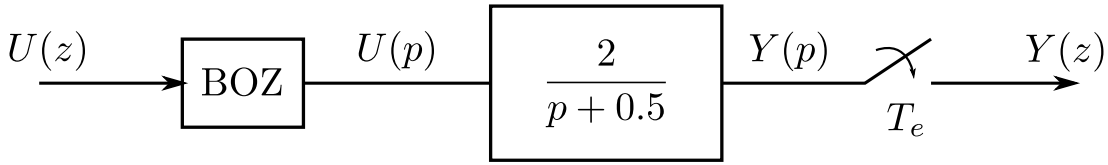
Fonction de transfert en Z d'un système échantillonné :

$$G(p) \quad \xrightarrow{\text{échantillonnage}} \quad G(z) \;=\; \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(p)}{p}\right\}$$

Le terme $\mathcal{Z}\left\{\dfrac{G(p)}{p}\right\}$ est obtenu à partir de la table des transformées.

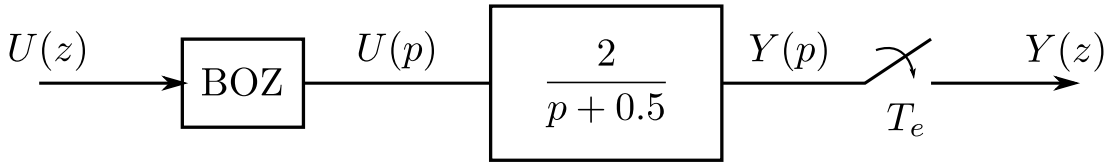
$F(p)$	$F(z)$
$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\dfrac{1}{p^2}$	$\dfrac{T_e z}{(z-1)^2}$
$\dfrac{1}{p+a}$	$\dfrac{z}{z-e^{-aT_e}}$
$\dfrac{1}{(p+a)^2}$	$\dfrac{T_e z\, e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2}$
$\dfrac{a}{p(p+a)}$	$\dfrac{z(1-e^{-aT_e})}{(z-1)(z-e^{-aT_e})}$
$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{ze^{-aT_e}\sin(\omega T_e)}{z^2-2ze^{-aT_e}\cos(\omega T_e)+e^{-2aT_e}}$
$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{z^2-ze^{-aT_e}\cos(\omega T_e)}{z^2-2ze^{-aT_e}\cos(\omega T_e)+e^{-2aT_e}}$

Exemple 1 :



Fonction de transfert échantillonné ?

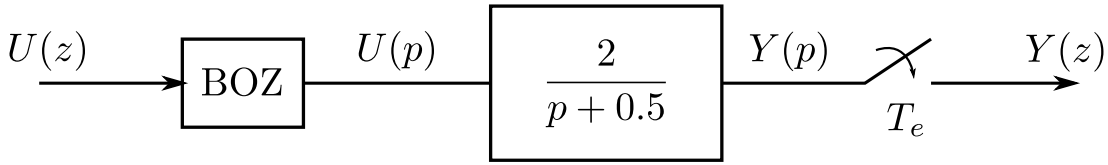
Exemple 1 :



Fonction de transfert échantillonné ?

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{ \frac{G(p)}{p} \right\}$$

Exemple 1 :



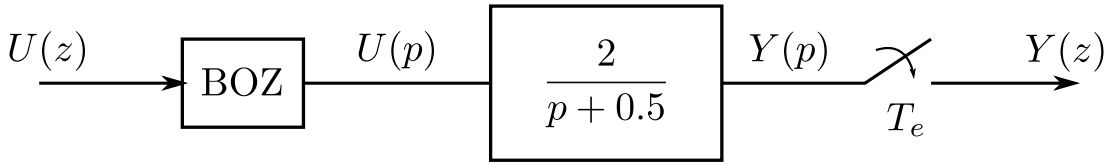
Fonction de transfert échantillonné ?

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{ \frac{G(p)}{p} \right\}$$

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{G(p)}{p} = \frac{2}{p(p+0.5)} = \frac{4}{p} - \frac{4}{p+0.5}$$

Exemple 1 :



Fonction de transfert échantillonné ?

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{ \frac{G(p)}{p} \right\}$$

Décomposition en éléments simples :

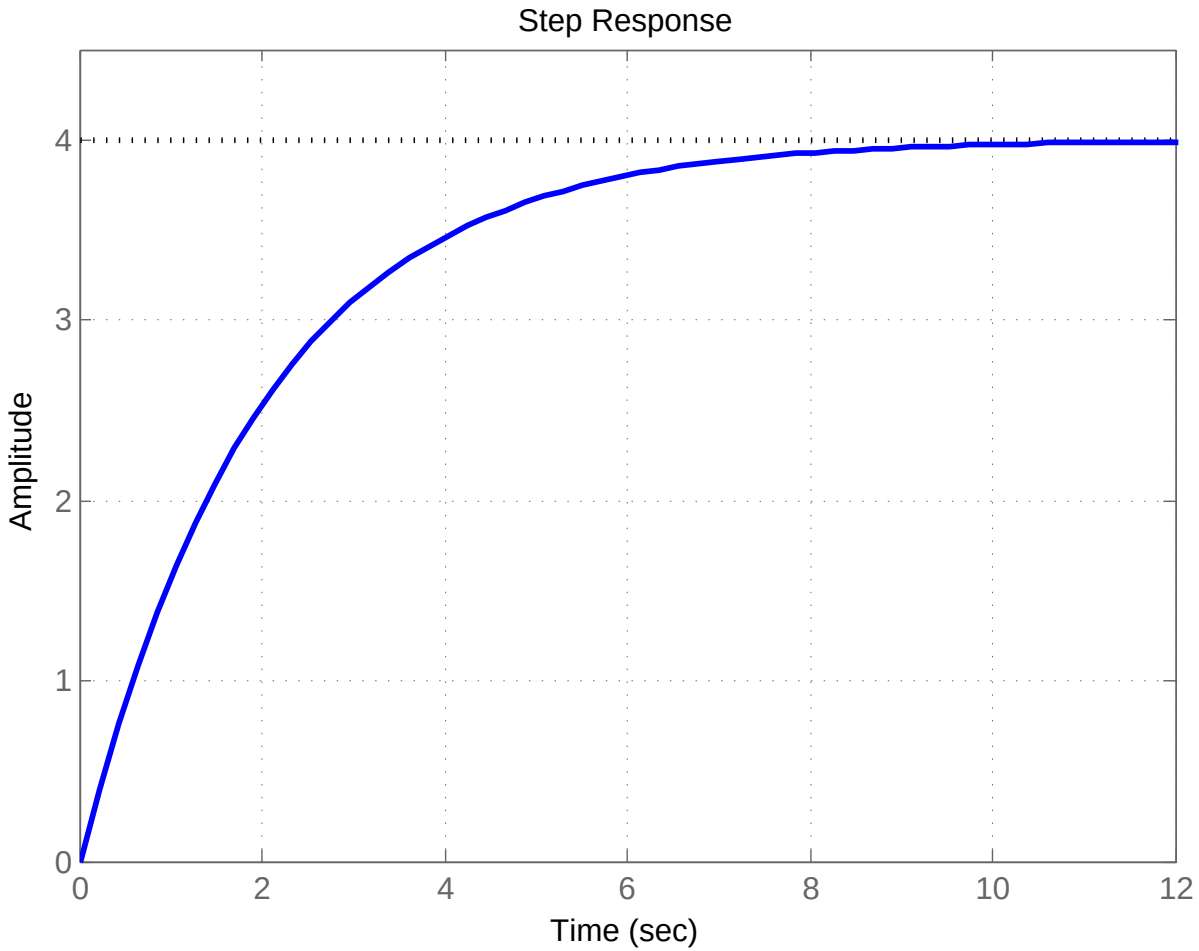
$$\frac{G(p)}{p} = \frac{2}{p(p+0.5)} = \frac{4}{p} - \frac{4}{p+0.5}$$

Utilisation de la table des transformées élémentaires :

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{4z}{z-1} - \frac{4z}{z-e^{-0.5\,Te}} \right] = 4 \frac{1-e^{-0.5\,Te}}{z-e^{-0.5\,Te}}$$

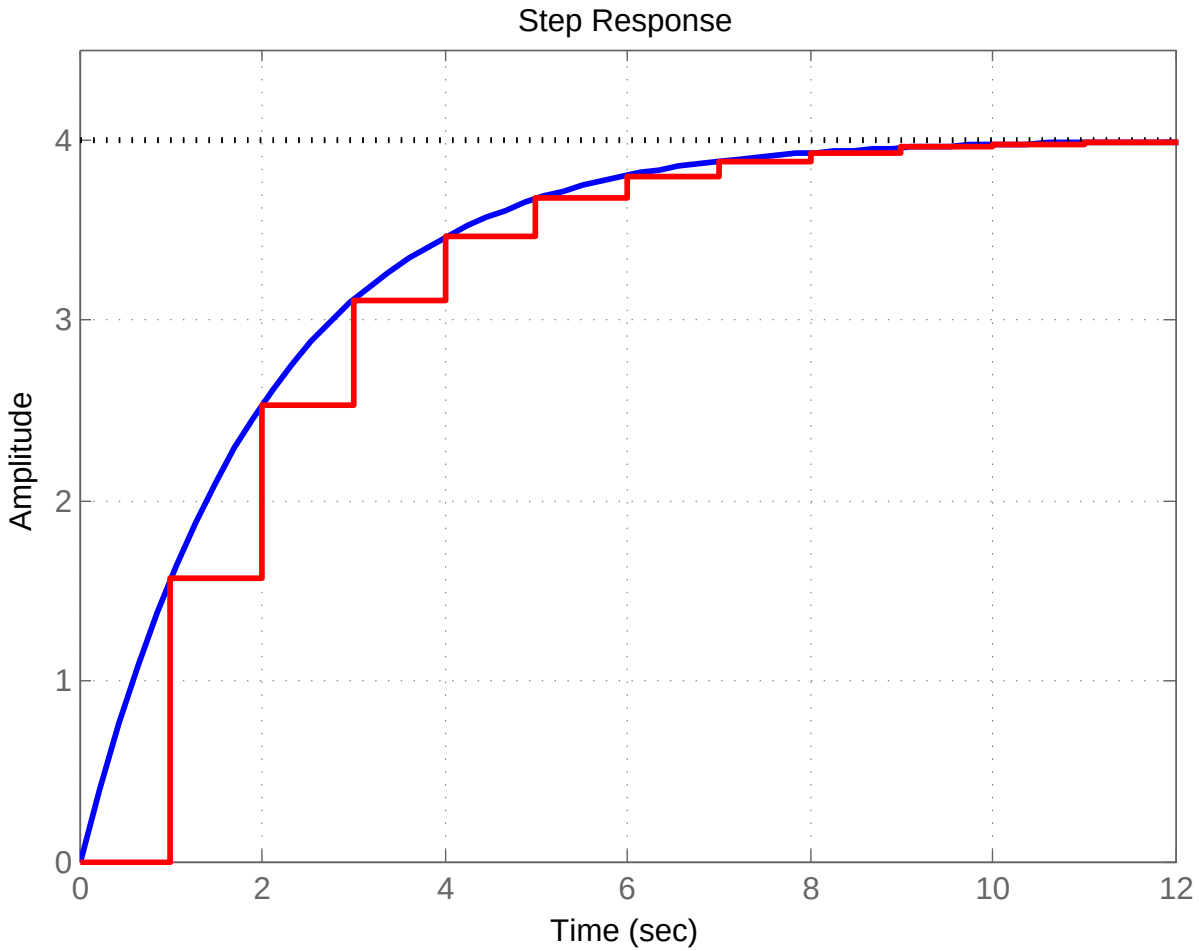
Tracés de la réponse indicielle de

$$G(p) = \frac{2}{p + 0.5} \qquad \text{et} \qquad G(z) = 4\frac{1 - e^{-0.5\,Te}}{z - e^{-0.5\,Te}} \qquad \text{avec } T_e = 1s$$

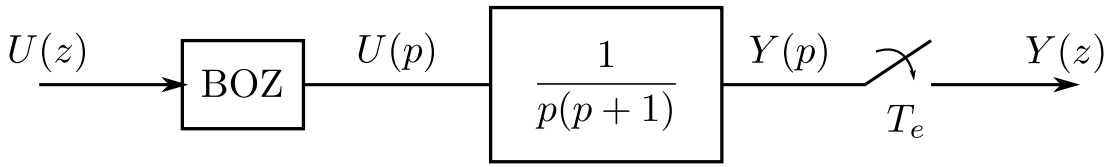


Tracés de la réponse indicielle de

$$G(p) = \frac{2}{p + 0.5} \qquad \text{et} \qquad G(z) = 4\frac{1 - e^{-0.5\,Te}}{z - e^{-0.5\,Te}} \qquad \text{avec } T_e = 1s$$

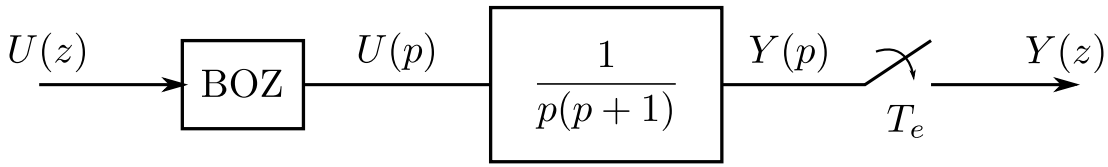


Exemple 2 :



Fonction de transfert échantillonné ?

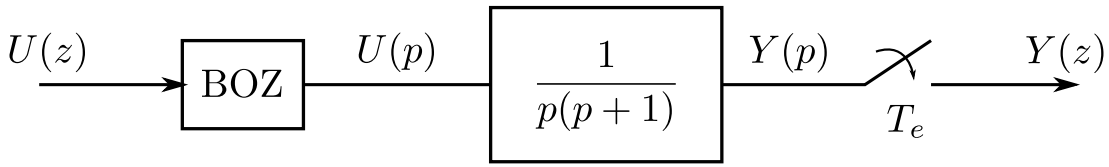
Exemple 2 :



Fonction de transfert échantillonné ?

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{ \frac{G(p)}{p} \right\}$$

Exemple 2 :



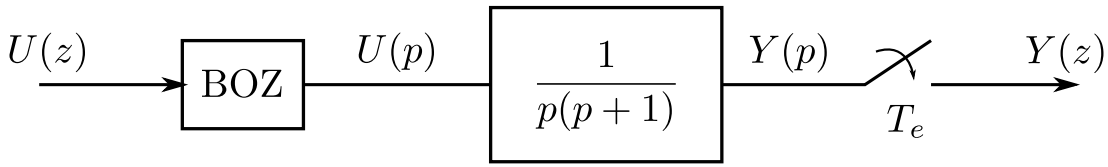
Fonction de transfert échantillonné ?

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{ \frac{G(p)}{p} \right\}$$

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{G(p)}{p} = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}$$

Exemple 2 :



Fonction de transfert échantillonné ?

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{ \frac{G(p)}{p} \right\}$$

Décomposition en éléments simples :

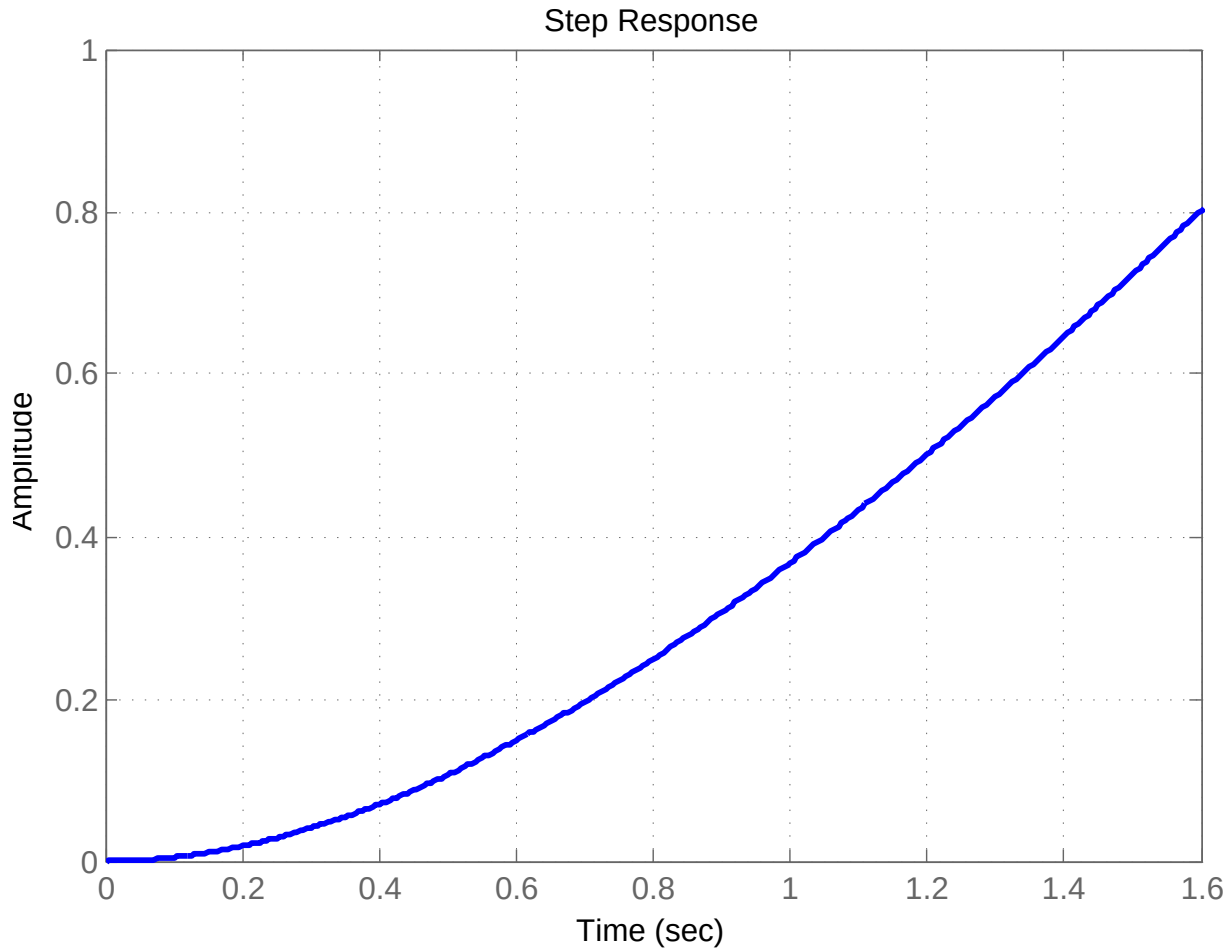
$$\frac{G(p)}{p} = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}$$

Utilisation de la table des transformées élémentaires :

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\left[\frac{-z}{z-1} + \frac{T_e z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T_e}}\right] = \frac{K(z-b)}{(z-1)(z-a)} \qquad \begin{cases} K = e^{-T_e} - 1 + T_e \\ a = e^{-T_e} \\ b = 1 - \frac{T_e(1-e^{-T_e})}{K} \end{cases}$$

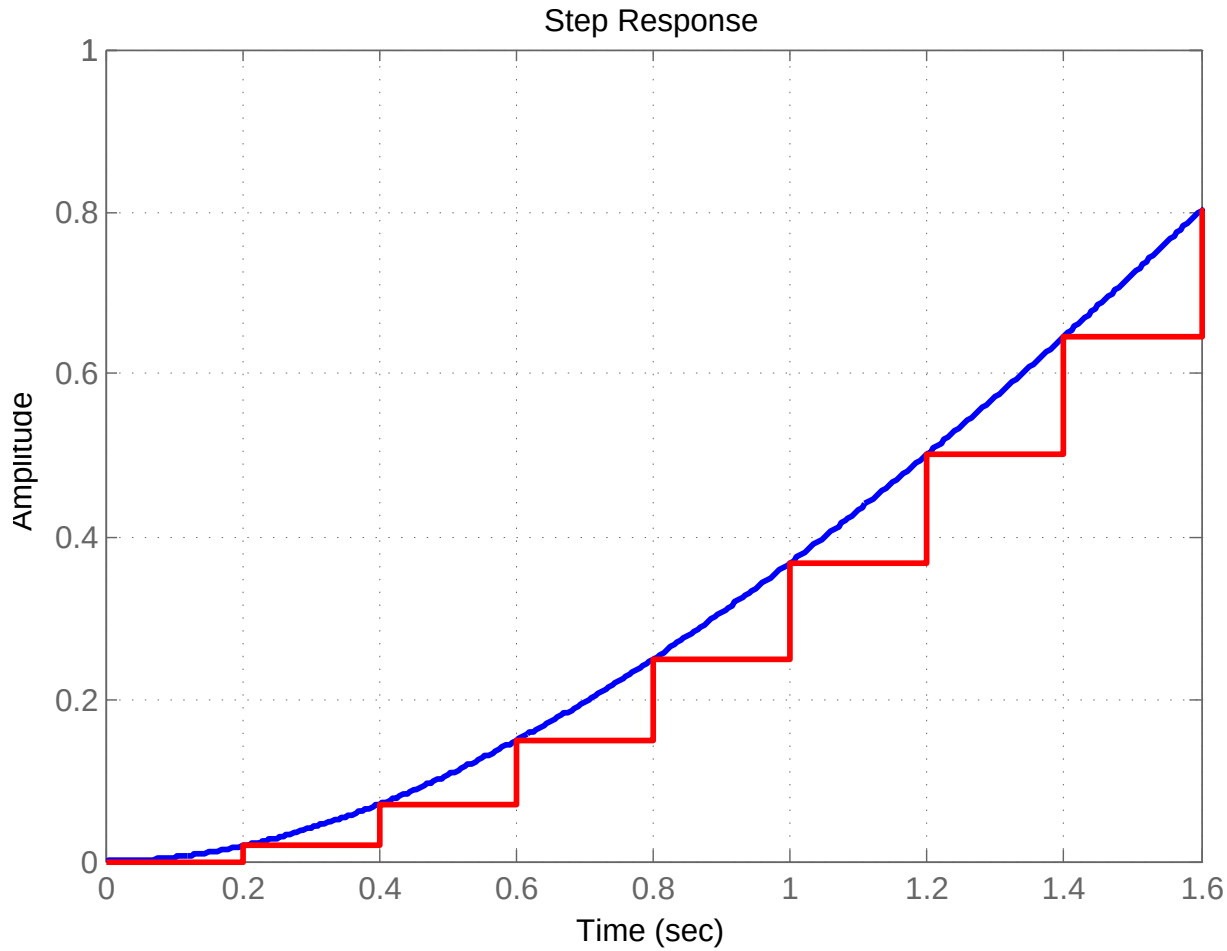
Tracés de la réponse indicielle de

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)} \qquad \text{et} \qquad G(z) = K\frac{z-b}{(z-1)(z-a)} \qquad \text{avec } T_e = 200ms$$



Tracés de la réponse indicielle de

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)} \qquad \text{et} \qquad G(z) = K\frac{z-b}{(z-1)(z-a)} \qquad \text{avec } T_e = 200ms$$



Sommaire

1. Introduction
   - Rappels
   - Généralités
   - Echantillonnage
   - Conversion numérique-analogique
2. Modélisation
   - Transformée en Z
   - Système à temps discret
   - Système échantillonné
3. Analyse d'un asservissement
   - Quelques signaux standards
   - Stabilité d'un système
   - Précision d'un système asservi
4. Synthèse de correcteurs
   - Principe
   - Méthodes de transposition
   - Implémentation

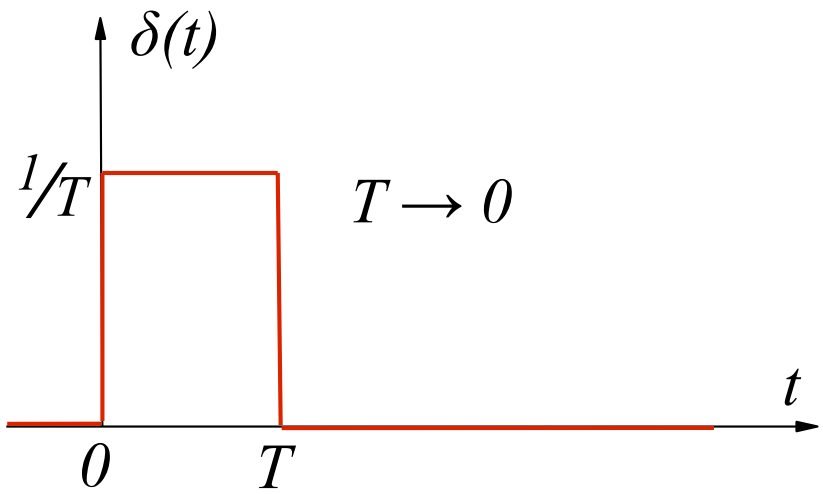
Quelques signaux standards

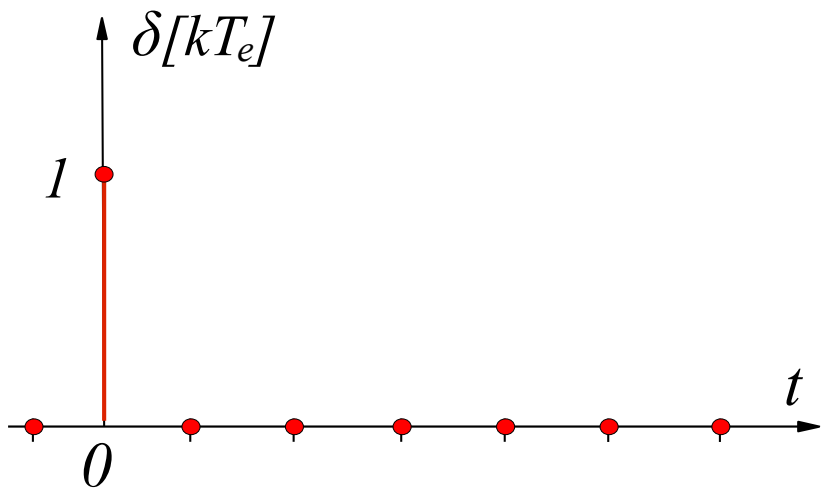
(rappel sur les signaux types utilisés pour l'analyse temporelle des systèmes)

Impulsion de Dirac

Signal défini par : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$

TL : $\Delta(p) = 1$ TZ : $\Delta(z) = 1$

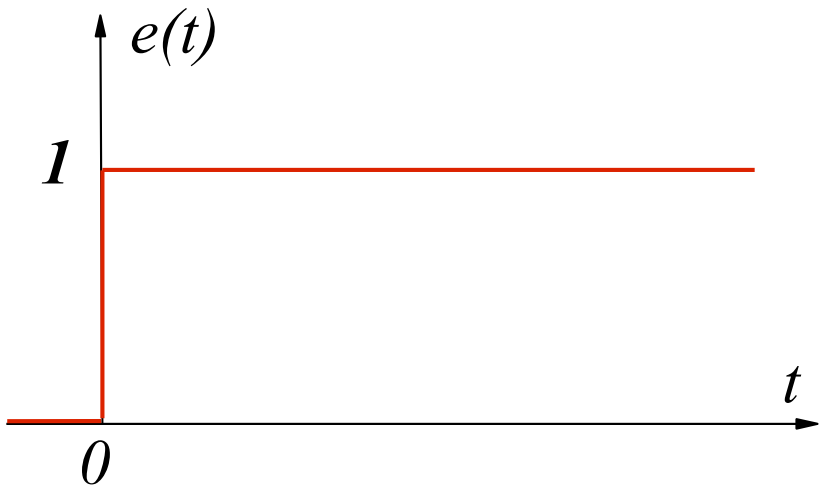


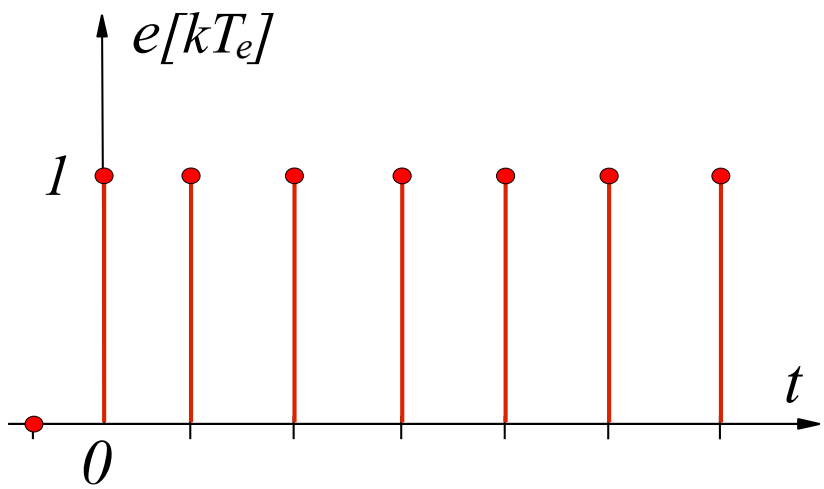


Echelon

Signal défini par : $e(t) = 1, \forall t \geq 0$ et $e(t) = 0, \forall t < 0$.

$$\text{TL} : \quad E(p) = \frac{1}{p} \qquad\qquad \text{TZ} : \quad E(z) = \frac{z}{z-1}$$

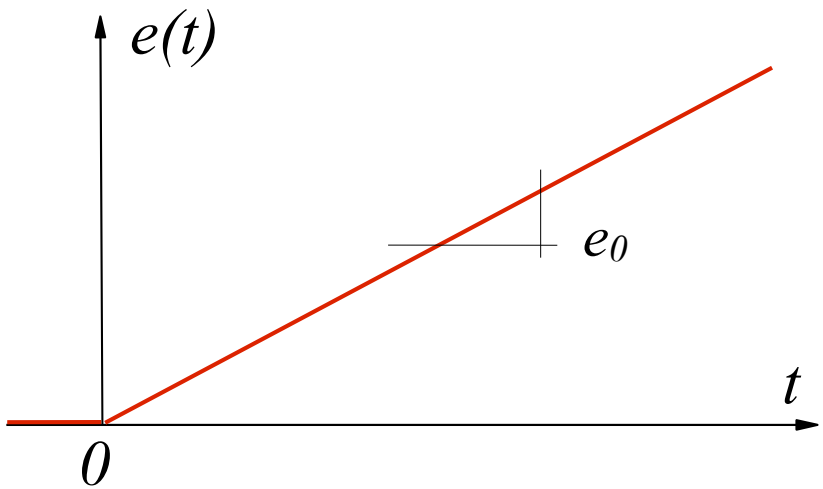


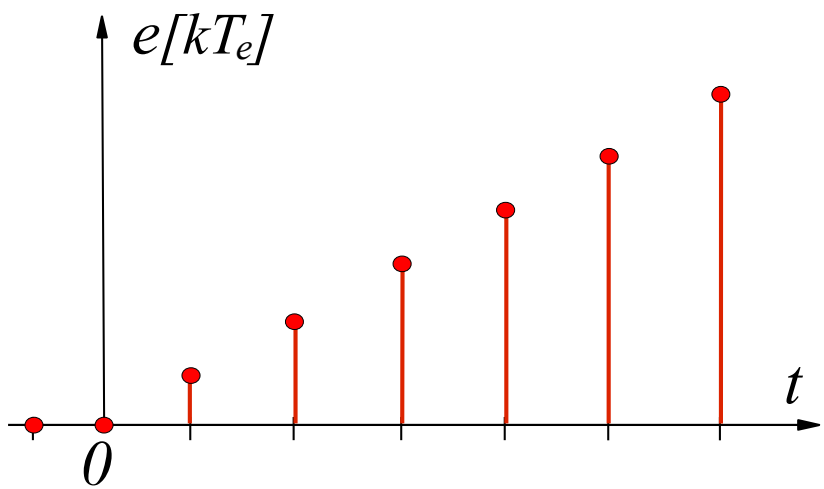


Rampe

Signal défini par : $e(t) = e_0\, t$, $\forall t \geq 0$ et $e(t) = 0$, $\forall t < 0$.

$$\text{TL} : \quad E(p) = \frac{e_0}{p^2} \qquad\qquad \text{TZ} : \quad E(z) = e_0 \frac{T_e z}{(z-1)^2}$$



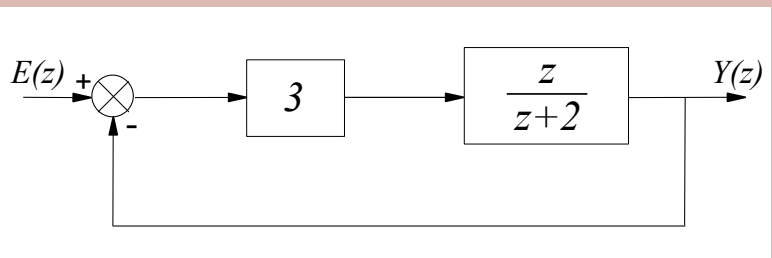


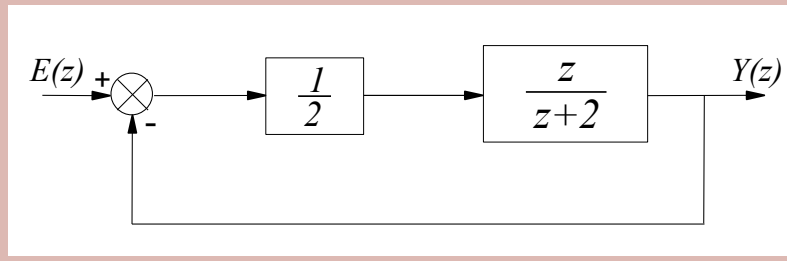
Sommaire

1. Introduction
   - Rappels
   - Généralités
   - Echantillonnage
   - Conversion numérique-analogique
2. Modélisation
   - Transformée en Z
   - Système à temps discret
   - Système échantillonné
3. Analyse d'un asservissement
   - Quelques signaux standards
   - Stabilité d'un système
   - Précision d'un système asservi
4. Synthèse de correcteurs
   - Principe
   - Méthodes de transposition
   - Implémentation

Stabilité d'un système

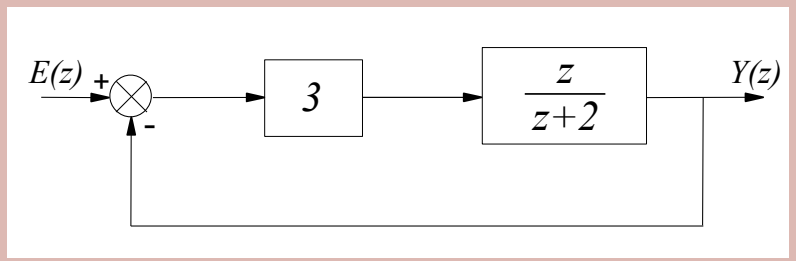
Y a-t-il une différence notable entre les deux asservissements suivant ?





Stabilité d'un système

Y a-t-il une différence notable entre les deux asservissements suivant ?

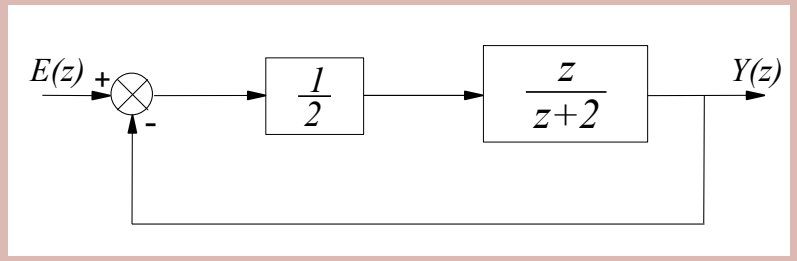


FTBF :

$$F(z) = \frac{3z}{4z+2}$$

Réponse impulsionnelle : $E(z) = 1$

$$Y(z) = F(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}} y[k] = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

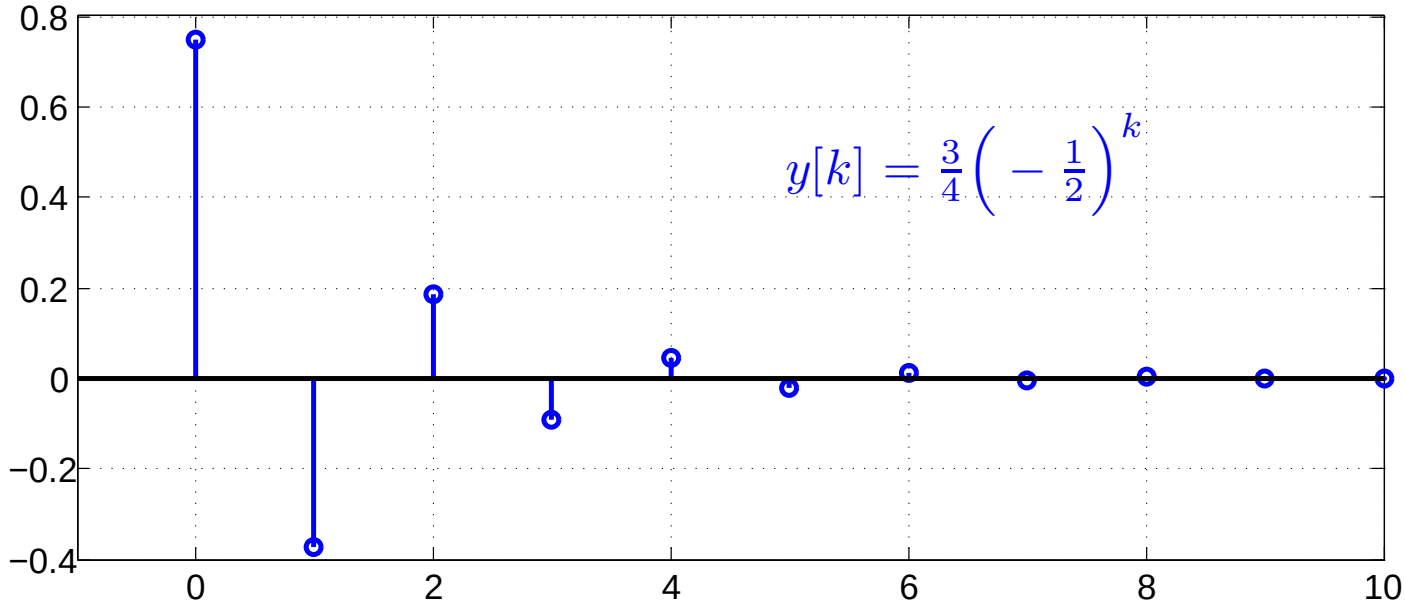


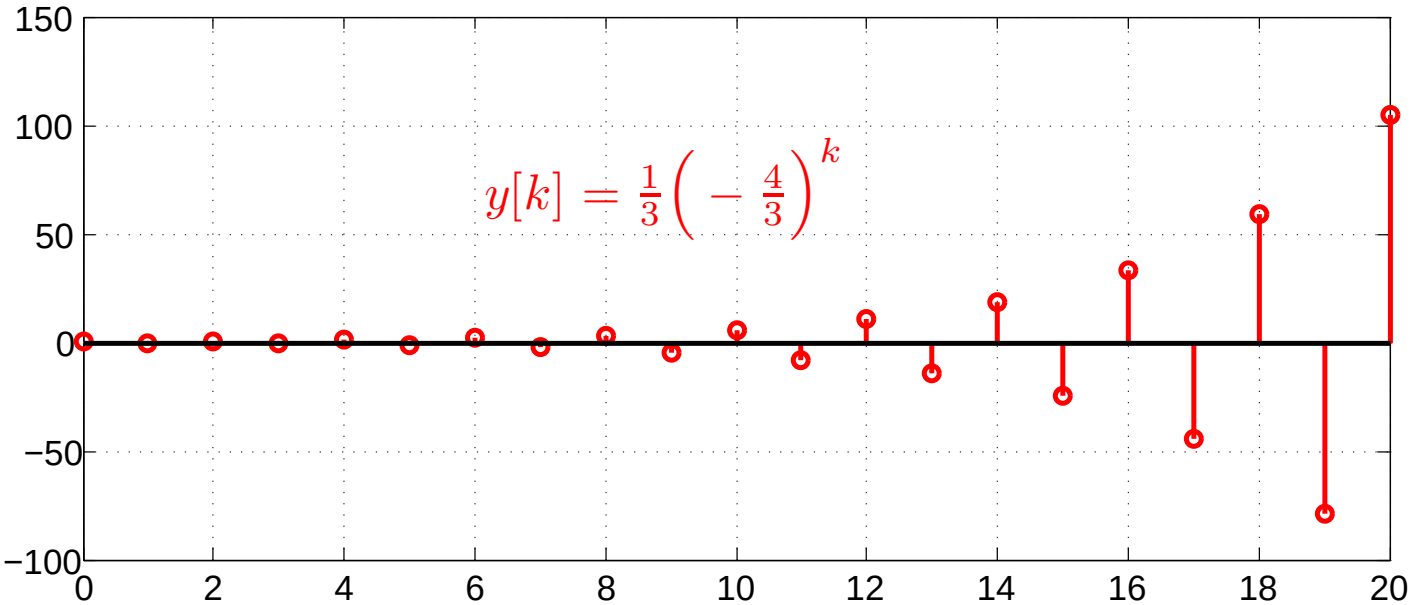
FTBF :

$$F(z) = \frac{\frac{1}{2}z}{\frac{3}{2}z+2}$$

Réponse impulsionnelle : $E(z) = 1$

$$Y(z) = F(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}} y[k] = \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)^k$$


0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
0
2
4
6
8
10
$y[k] = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$


150
100
50
0
−50
−100
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
$y[k] = \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)^k$

★ Il s'agit d'un problème de **stabilité**.

Définition

Un système est dit stable [a] si pour tout signal d'entrée borné le signal de sortie est également borné :

$$\text{si } \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k| < \infty, \quad \text{alors} \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k| < \infty$$

a. Notons qu'il existe plusieurs notions de stabilité. Nous ne considèrerons ici que la stabilité BIBO (*bounded input bounded output*).

Théorème

Un système à temps discret linéaire ($F(z)$) est stable ssi le module de chacun de ses pôles est strictement inférieur à 1.

équ. caractéristique de $F(z)$: $\quad a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad$ racines $p_1, p_2, \ldots, p_n$

Condition de stabilité : $|p_i| < 1, \ \forall i = 1, \ldots n.$

Méthode pour l'analyse de stabilité d'un système numérique $F(z)$:

- Calcul direct des pôles de $F(z)$.
- Critère de Jury.

Méthode pour l'analyse de stabilité d'un système numérique $F(z)$:

- Calcul direct des pôles de $F(z)$.
- Critère de Jury.

Critère de Jury

Se base sur les coefficients du polynôme caractéristique (dénominateur de $F(z)$) :

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

- évite le calcul des pôles,
- fournit un ensemble d'inégalités à tester,
- seul les cas des ordres n=2, 3 et 4 sont donnés.

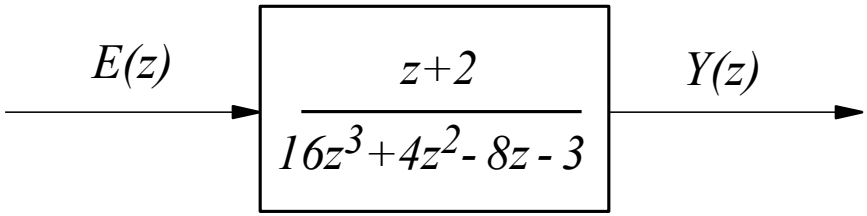
Un système numérique $F(z)$ est stable ssi les coefficients de son polynôme caractéristique vérifient (hypothèse : $a_n > 0$) :

$$n = 2 \ : \quad \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 > 0 \\ a_2 - a_0 > 0 \end{cases}$$

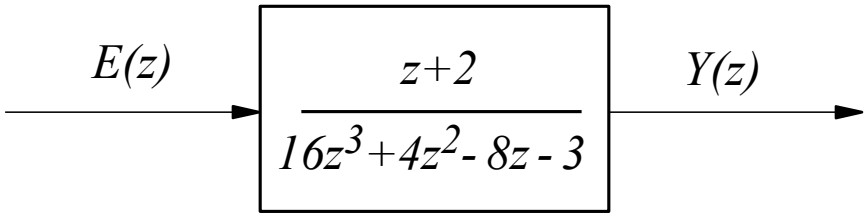
$$n = 3 \ : \quad \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0 \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0 \\ a_3 - |a_0| > 0 \\ a_0 a_2 - a_1 a_3 - a_0^2 + a_3^2 > 0 \end{cases}$$

$$n = 4 \ : \quad \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 > 0 \\ a_4^2 - a_0^2 - |a_0 a_3 - a_1 a_4| > 0 \\ (a_0 - a_4)^2 (a_0 - a_2 + a_4) + (a_1 - a_3)(a_0 a_3 - a_1 a_4) > 0 \end{cases}$$

Exemple 1 : Soit le système $F(z)$ suivant



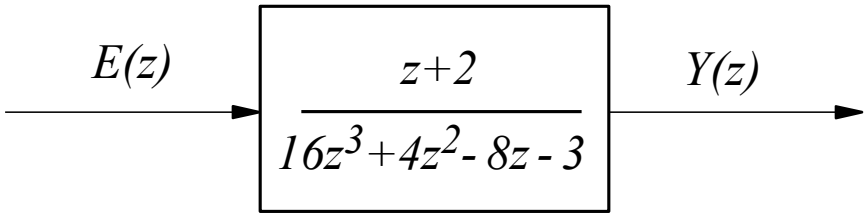
Exemple 1 : Soit le système $F(z)$ suivant



Application du critère de Jury :

$$\begin{cases} -3-8+4+16 = 9 > 0 \\ 3-8-4+16 = 7 > 0 \\ 16-3 = 13 > 0 \\ -3*4+8*16-9+256 = 363 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{système stable}$$

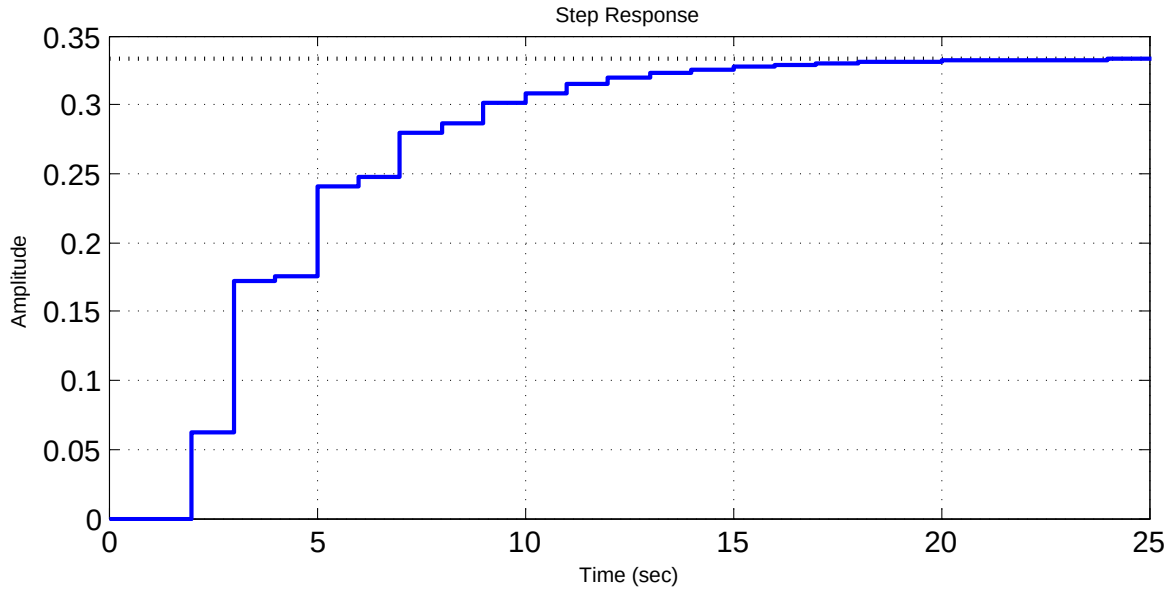
Exemple 1 : Soit le système $F(z)$ suivant



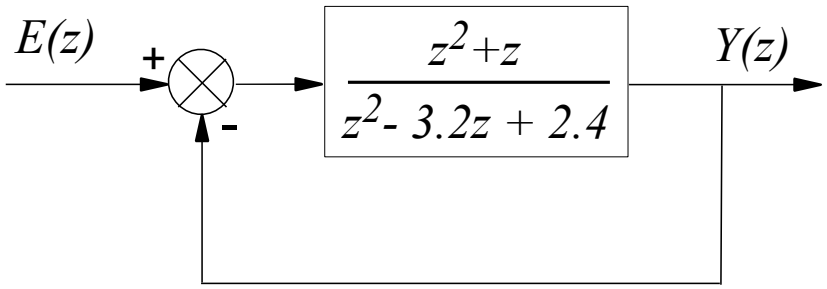
Application du critère de Jury :

$$\begin{cases} -3-8+4+16 & = 9 & > 0 \\ 3-8-4+16 & = 7 & > 0 \\ 16-3 & = 13 & > 0 \\ -3*4+8*16-9+256 & = 363 & > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{système stable}$$

Réponse indicielle (E(p) est un échelon) :

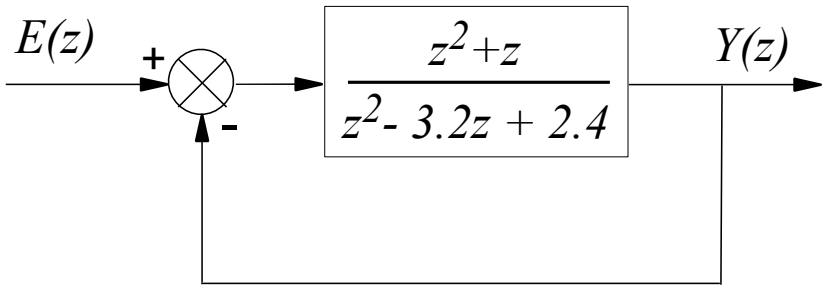


Exemple 2 : Soit le système $F(z)$ suivant



$$F(z) = \frac{z^2+z}{2z^2- 2.2z + 2.4}$$

Exemple 2 : Soit le système $F(z)$ suivant

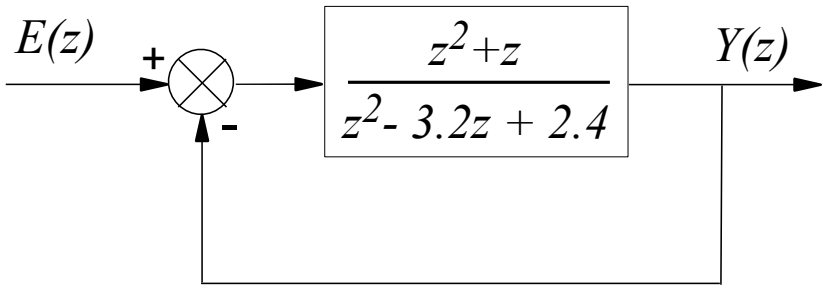


$$F(z) = \frac{z^2+z}{2z^2 - 2.2z + 2.4}$$

Application du critère de Jury :

$$\begin{cases} 2.4 - 2.2 + 2 = 2.2 > 0 \\ 2.4 + 2.2 + 2 = 6.6 > 0 \\ 2 - 2.4 = -0.4 \not> 0 \end{cases} \Rightarrow \text{système instable}$$

Exemple 2 : Soit le système $F(z)$ suivant

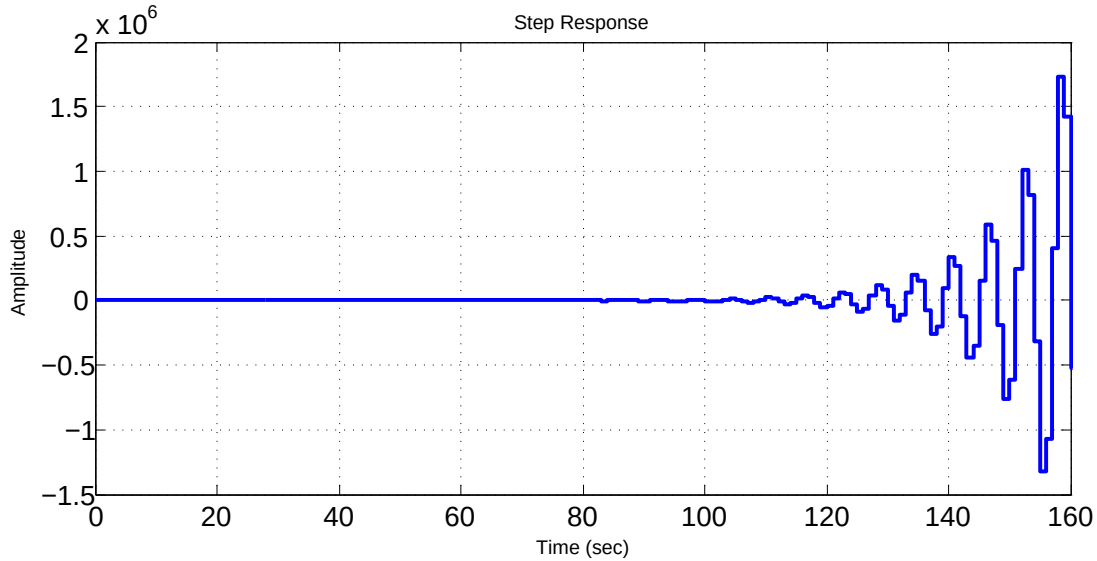


$$F(z) = \frac{z^2+z}{2z^2 - 2.2z + 2.4}$$

Application du critère de Jury :

$$\begin{cases} 2.4 - 2.2 + 2 & = 2.2 & > & 0 \\ 2.4 + 2.2 + 2 & = 6.6 & > & 0 \\ 2 - 2.4 & = -0.4 & \not> & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ système instable}$$

Réponse indicielle (E(p) est un échelon) :



Exemple 3 :

Soit le système $F(z)$ suivant

$$F(z) = \frac{2z^2 + z + 1}{z^3 + (K - 0.75)z - 0.25}$$

Exemple 3 :

Soit le système $F(z)$ suivant

$$F(z) = \frac{2z^2 + z + 1}{z^3 + (K - 0.75)z - 0.25}$$

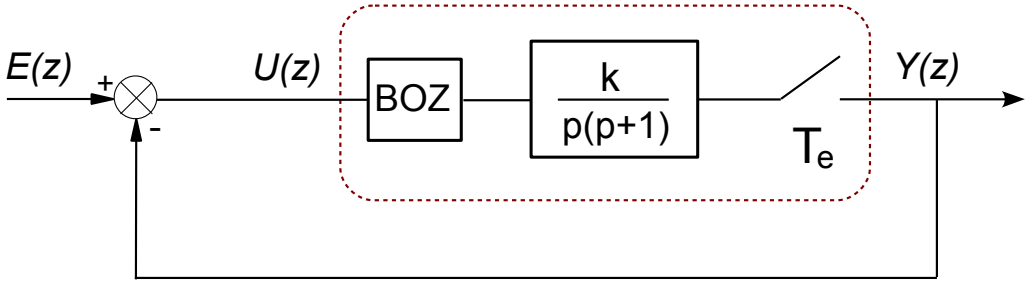
Application du critère de Jury :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 & = & K & > & 0 \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 & = & K + 0.5 & > & 0 \\ a_3 - |a_0| & = & 0.75 & > & 0 \\ a_0 a_2 - a_1 a_3 - a_0^2 + a_3^2 & = & 1.687 - K & > & 0 \end{cases}$$

Le système est donc stable pour $0 < K < 1.687$.

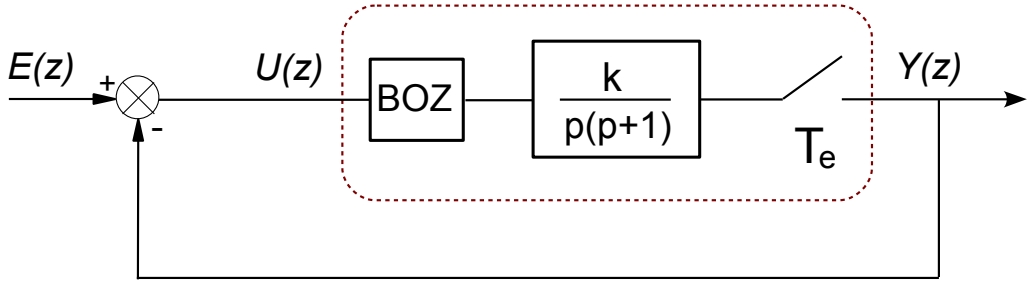
Exemple 4 : Bouclage d'un système échantillonné

Soit le système $F(z)$ suivant (k est un gain de réglage)



Exemple 4 : Bouclage d'un système échantillonné

Soit le système $F(z)$ suivant (k est un gain de réglage)



Fonction de transfert en Z du système échantillonné :

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{k}{p^2(p+1)}\right\} = \frac{(z-a)kb}{(z-1)(z-e^{-T_e})}$$

avec $a = \frac{e^{-T_e}(T_e+1)-1}{e^{-T_e}+T_e-1}$ et $b = e^{-T_e} - 1 + T_e$.

Fonction de transfert en Z du système en boucle fermée :

$$F(z) = \frac{(z-a)kb}{z^2 + (kb - 1 - e^{-T_e})z + e^{-T_e} - kba}$$

Application du critère de Jury :

$$\begin{cases} e^{-T_e} - kba + kb - 1 - e^{-T_e} + 1 & > & 0 \\ e^{-T_e} - kba - kb + 1 + e^{-T_e} + 1 & > & 0 \\ 1 - e^{-T_e} + kba & > & 0 \end{cases}$$

2 cas :

$T_e = 1\,s$

$$\begin{cases} k & > & 0 \\ 26.4 & > & k \\ 2.4 & > & k \end{cases}$$

$T_e = 10\,s$

$$\begin{cases} k & > & 0 \\ 0.25 & > & k \\ 1 & > & k \end{cases}$$

Application du critère de Jury :

$$\begin{cases} e^{-T_e} - kba + kb - 1 - e^{-T_e} + 1 & > & 0 \\ e^{-T_e} - kba - kb + 1 + e^{-T_e} + 1 & > & 0 \\ 1 - e^{-T_e} + kba & > & 0 \end{cases}$$

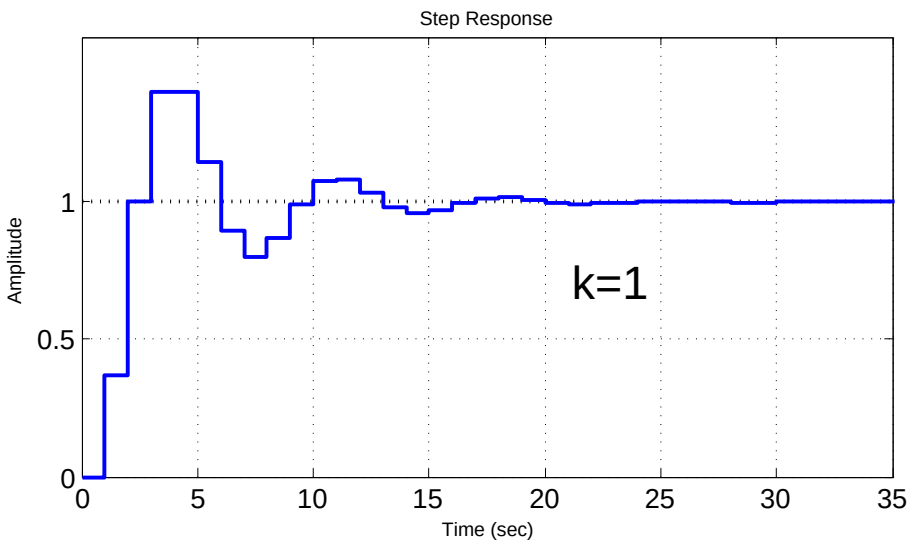
2 cas :

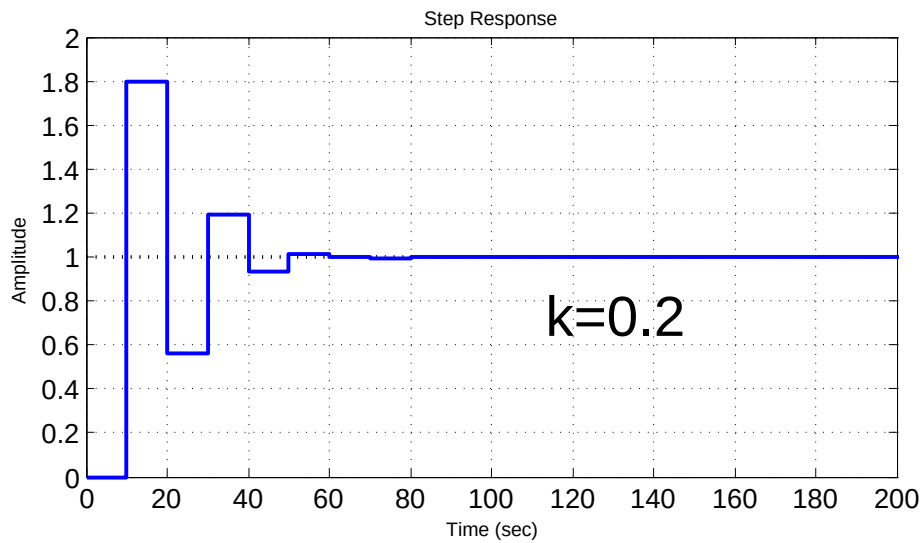
$T_e = 1\,s$

$$\begin{cases} k & > & 0 \\ 26.4 & > & k \\ 2.4 & > & k \end{cases}$$

$T_e = 10\,s$

$$\begin{cases} k & > & 0 \\ 0.25 & > & k \\ 1 & > & k \end{cases}$$



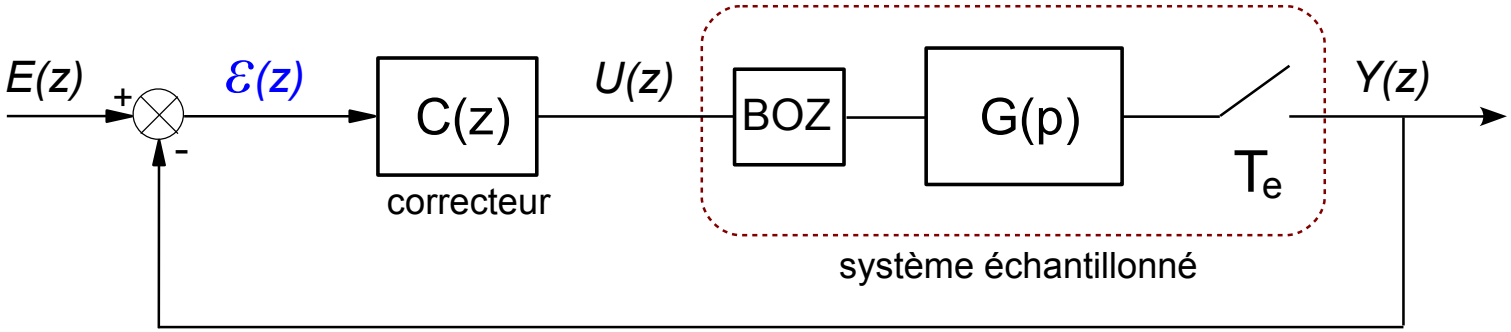


Sommaire

1. Introduction
   - Rappels
   - Généralités
   - Echantillonnage
   - Conversion numérique-analogique
2. Modélisation
   - Transformée en Z
   - Système à temps discret
   - Système échantillonné
3. Analyse d'un asservissement
   - Quelques signaux standards
   - Stabilité d'un système
   - Précision d'un système asservi
4. Synthèse de correcteurs
   - Principe
   - Méthodes de transposition
   - Implémentation

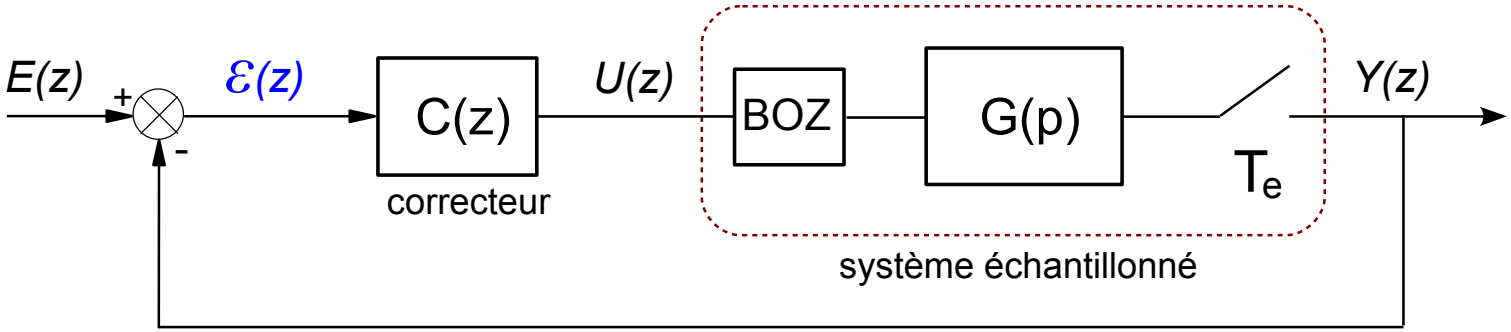
Précision d'un système asservi

Capacité de la sortie du système à suivre l'entrée de consigne



Précision d'un système asservi

Capacité de la sortie du système à suivre l'entrée de consigne

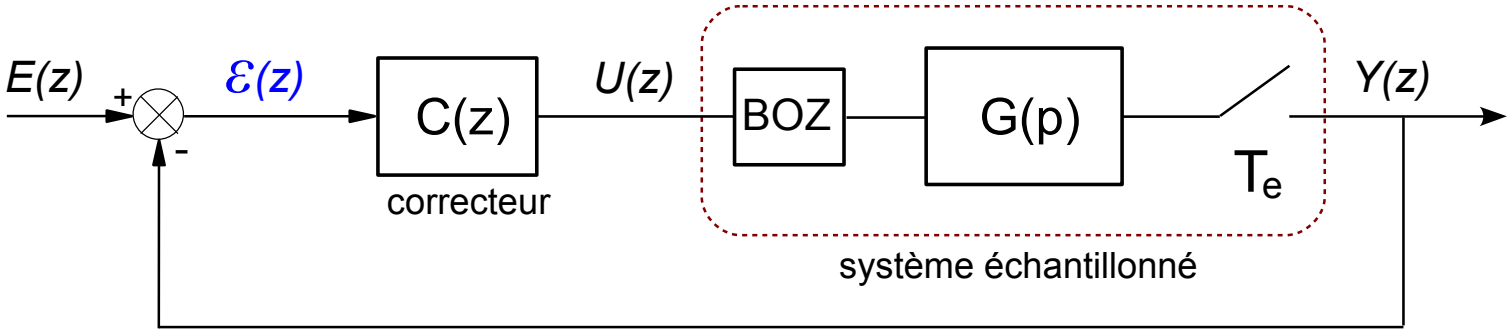


Indice de performance :

calcul de l'écart $\varepsilon(kT_e) = y(kT_e) - e(kT_e)$ en régime permanent.

Précision d'un système asservi

Capacité de la sortie du système à suivre l'entrée de consigne



Indice de performance :

calcul de l'écart $\varepsilon(kT_e) = y(kT_e) - e(kT_e)$ en régime permanent.

Pour une entrée de consigne donnée, vers quelle valeur tend l'écart :

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon(kT_e) = \ ?$$

Expression de l'erreur ?

$$\begin{aligned}\varepsilon(z) &= E(z) - Y(z)\\ &= E(z) - G(z)U(z)\\ &= E(z) - G(z)C(z)\varepsilon(z)\end{aligned}$$

$$\varepsilon(z)\Big(1 + G(z)C(z)\Big) = E(z)$$

Expression de l'erreur ?

$$\begin{aligned}\varepsilon(z) &= E(z) - Y(z)\\ &= E(z) - G(z)U(z)\\ &= E(z) - G(z)C(z)\varepsilon(z)\end{aligned}$$

$$\varepsilon(z)\Big(1 + G(z)C(z)\Big) = E(z)$$

On a donc :

$$\varepsilon(z) \;=\; \frac{1}{1 + G(z)C(z)}\, E(z)$$

Expression de l'erreur ?

$$\begin{aligned}\varepsilon(z) &= E(z) - Y(z)\\ &= E(z) - G(z)U(z)\\ &= E(z) - G(z)C(z)\varepsilon(z)\end{aligned}$$

$$\varepsilon(z)\Big(1 + G(z)C(z)\Big) = E(z)$$

On a donc :

$$\varepsilon(z) \;=\; \frac{1}{1 + G(z)C(z)}\, E(z)$$

Et d'après le théorème de la valeur finale

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \varepsilon(kT_e) \;=\; \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1})\, \varepsilon(z)}$$

★ Généralement, la précision s'étudie pour des entrées de type donné ($\rightarrow e(kT_e)$).

On définit **l'erreur de position** :

erreur en régime permanent pour une entrée de type échelon

$$e(kT_e) = e_0, \quad \forall k \geq 0 \quad \text{et} \quad 0, \quad \forall k < 0 \qquad \longrightarrow \qquad E(z) = e_0 \frac{z}{z-1}$$

On définit **l'erreur de position** :

erreur en régime permanent pour une entrée de type échelon

$$e(kT_e) = e_0, \quad \forall k \geq 0 \quad \text{et} \quad 0, \quad \forall k < 0 \qquad \longrightarrow \qquad E(z) = e_0 \frac{z}{z-1}$$

Exprimer $\varepsilon(z)$, puis appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_p = \lim_{k\to\infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1}) \underbrace{\frac{1}{1 + G(z)C(z)} \frac{z}{z-1} e_0}_{\varepsilon(z)}$$

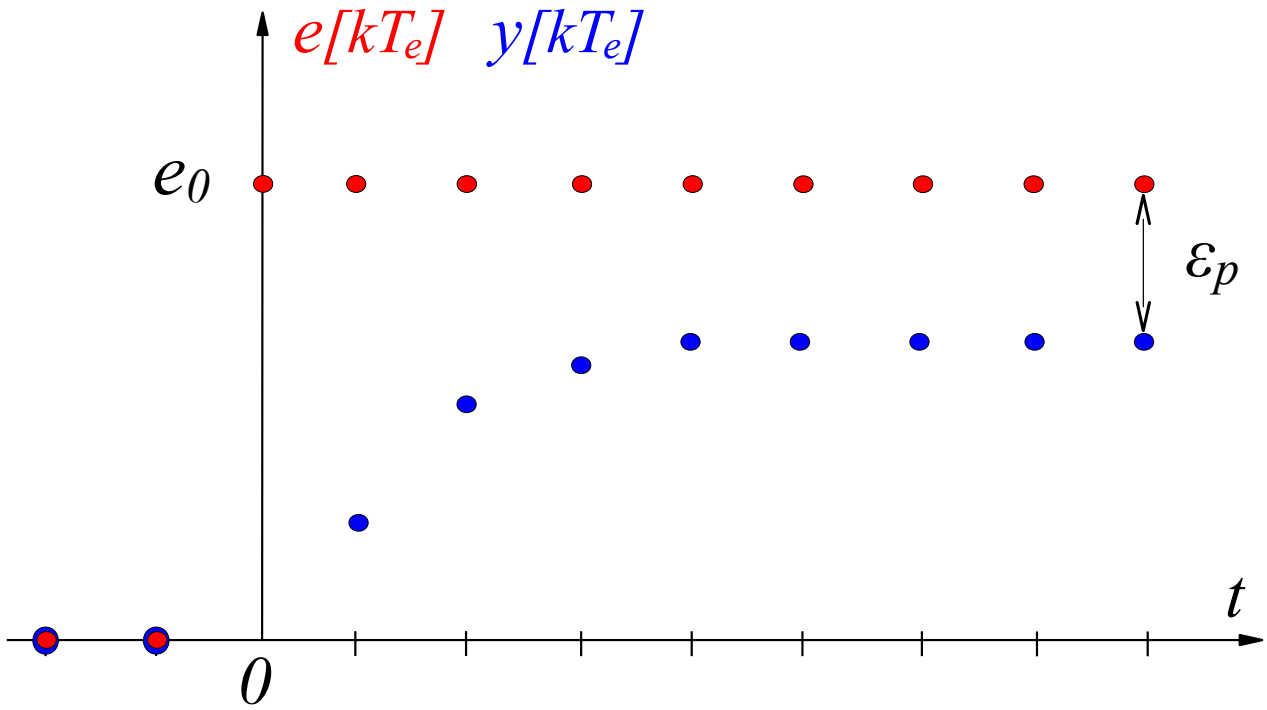
On définit **l'erreur de position** :

erreur en régime permanent pour une entrée de type échelon

$$e(kT_e) = e_0, \quad \forall k \geq 0 \quad \text{et} \quad 0, \quad \forall k < 0 \qquad \longrightarrow \qquad E(z) = e_0 \frac{z}{z-1}$$

Exprimer $\varepsilon(z)$, puis appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_p = \lim_{k\to\infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1}) \underbrace{\frac{1}{1 + G(z)C(z)} \frac{z}{z-1} e_0}_{\varepsilon(z)}$$



On définit **l'erreur de vitesse (ou de traînage)** :

erreur en régime permanent pour une entrée de type rampe

$$e(kT_e) = e_0\, kT_e, \quad \forall k \geq 0 \quad \text{et} \quad 0, \quad \forall k < 0 \qquad \longrightarrow \qquad E(z) = e_0 T_e \frac{z}{(z-1)^2}$$

On définit **l'erreur de vitesse (ou de traînage)** :

erreur en régime permanent pour une entrée de type rampe

$$e(kT_e) = e_0\, kT_e, \quad \forall k \geq 0 \quad \text{et} \quad 0, \quad \forall k < 0 \qquad \longrightarrow \qquad E(z) = e_0 T_e \frac{z}{(z-1)^2}$$

Exprimer $\varepsilon(z)$, puis appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_v \quad = \quad \lim_{k\to\infty} \varepsilon(kT_e) \; = \; \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1}) \underbrace{\frac{1}{1 + G(z)C(z)} \frac{z}{(z-1)^2} T_e e_0}_{\varepsilon(z)}$$

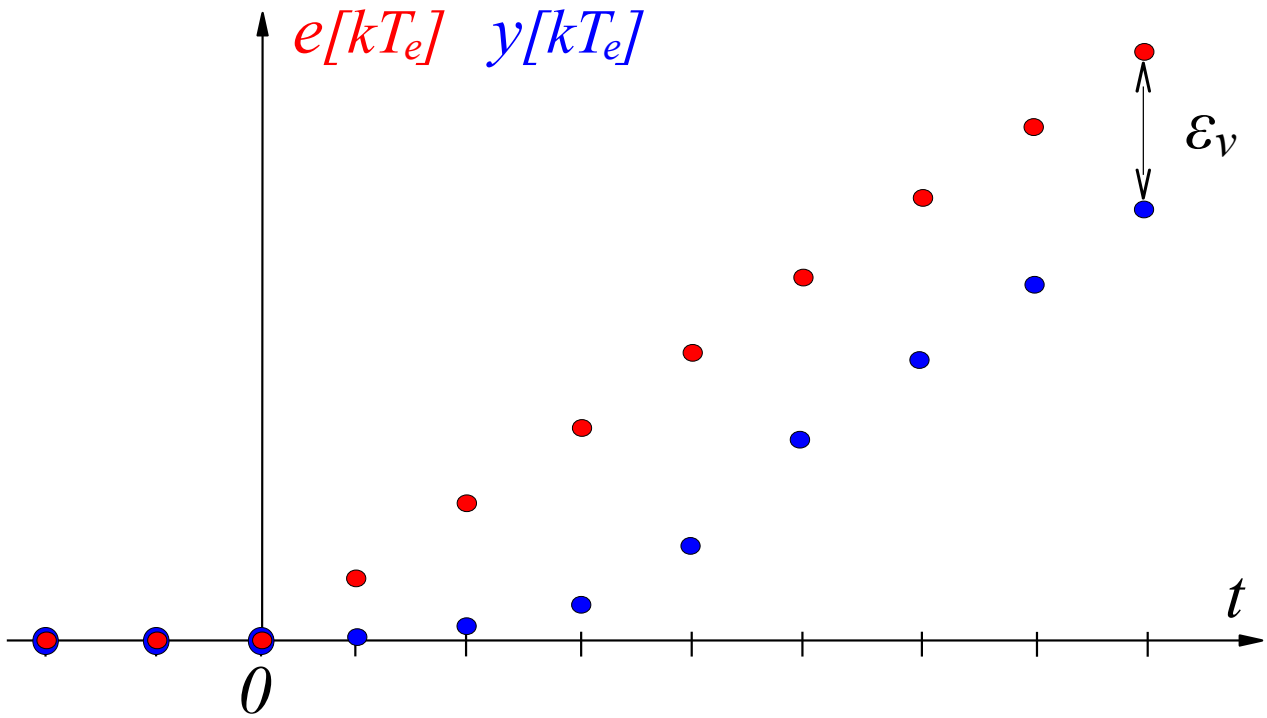
On définit **l'erreur de vitesse (ou de traînage)** :

erreur en régime permanent pour une entrée de type rampe

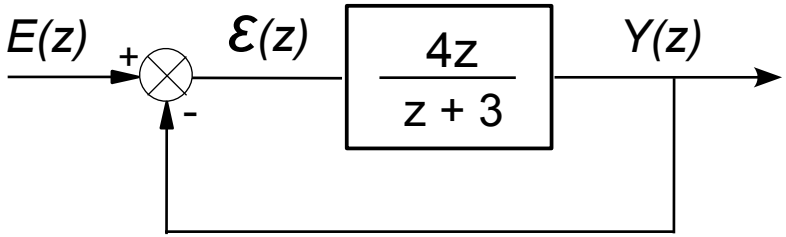
$$e(kT_e) = e_0\, kT_e, \quad \forall k \geq 0 \quad \text{et} \quad 0, \quad \forall k < 0 \qquad \longrightarrow \qquad E(z) = e_0 T_e \frac{z}{(z-1)^2}$$

Exprimer $\varepsilon(z)$, puis appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_v \quad = \quad \lim_{k\to\infty} \varepsilon(kT_e) \; = \; \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1}) \underbrace{\frac{1}{1 + G(z)C(z)} \frac{z}{(z-1)^2} T_e e_0}_{\varepsilon(z)}$$

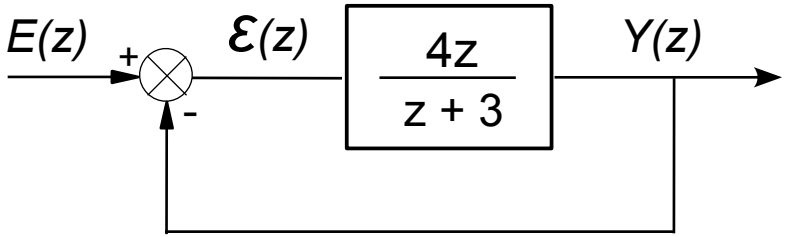


Exemple 1 :



Expression de l'erreur : $\varepsilon(z) = \dfrac{1}{1 + \frac{4z}{z+3}} E(z) = \dfrac{z+3}{5z+3} E(z)$

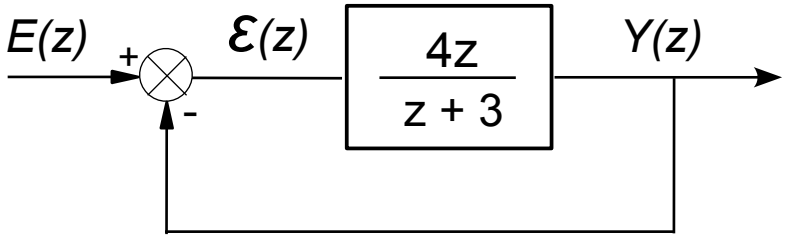
Exemple 1 :



Expression de l'erreur : $\varepsilon(z) = \dfrac{1}{1 + \frac{4z}{z+3}}\, E(z) = \dfrac{z+3}{5z+3}\, E(z)$

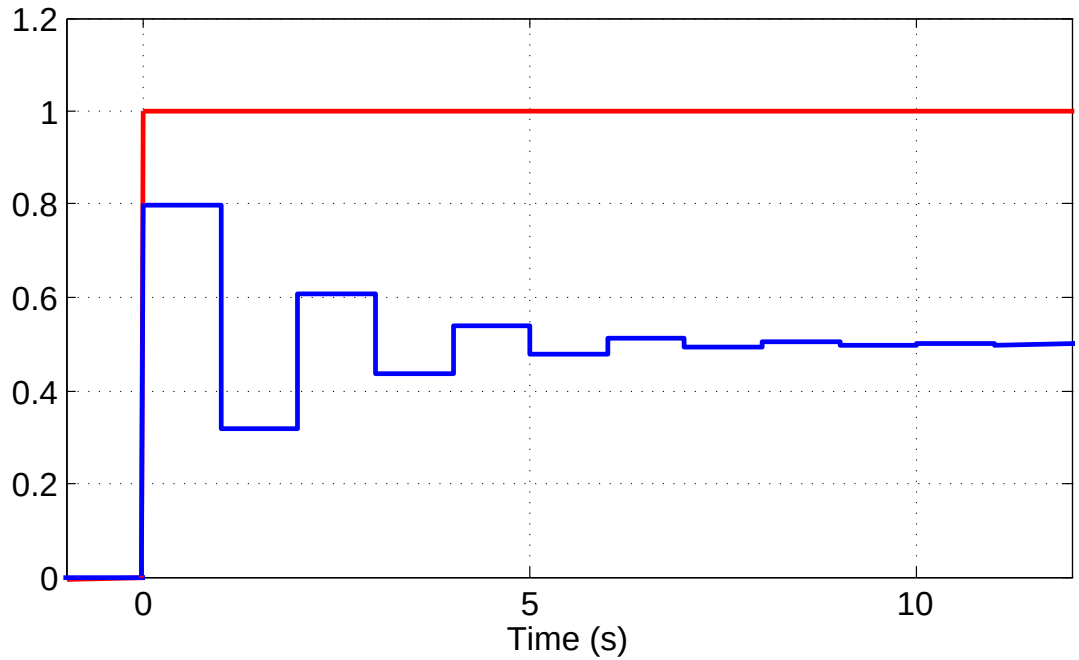
Erreur de position : $\varepsilon_p = \lim\limits_{z \to 1} (1 - z^{-1})\, \varepsilon(z) = 0.5\, e_0$

Exemple 1 :



Expression de l'erreur : $\varepsilon(z) = \dfrac{1}{1 + \frac{4z}{z+3}}\, E(z) = \dfrac{z+3}{5z+3}\, E(z)$

Erreur de position : $\varepsilon_p = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})\, \varepsilon(z) = 0.5\, e_0$

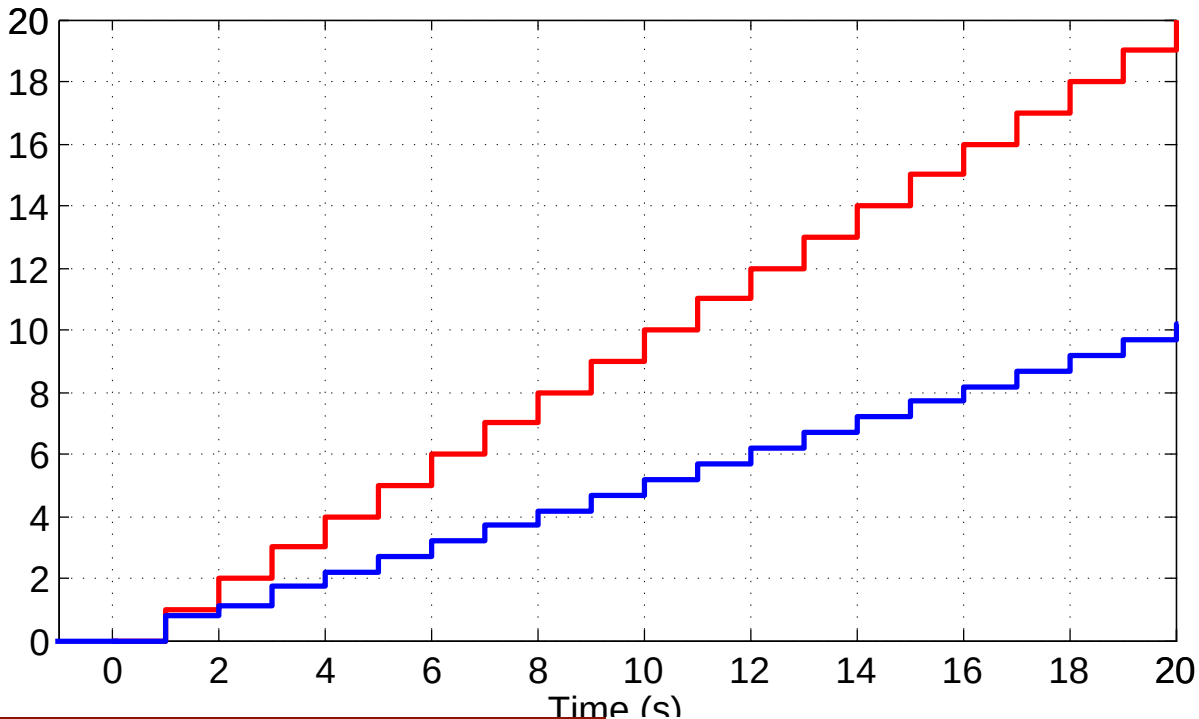


Erreur de vitesse :

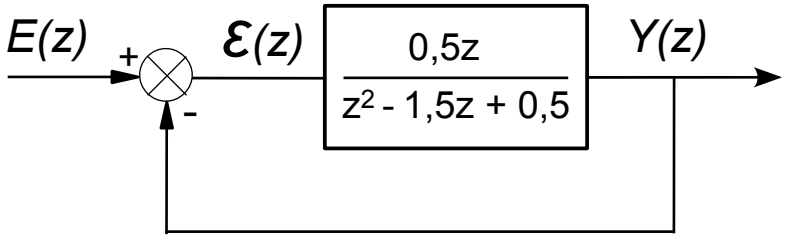
$$\begin{aligned}
\varepsilon_v &= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\,\varepsilon(z) \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\,\frac{z+3}{5z+3}\,\underbrace{\frac{z}{(z-1)^2}\,e_0}_{E(z)} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Erreur de vitesse :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_v &= \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})\,\varepsilon(z) \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\,\frac{z+3}{5z+3}\,\underbrace{\frac{z}{(z-1)^2}\,e_0}_{E(z)} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$



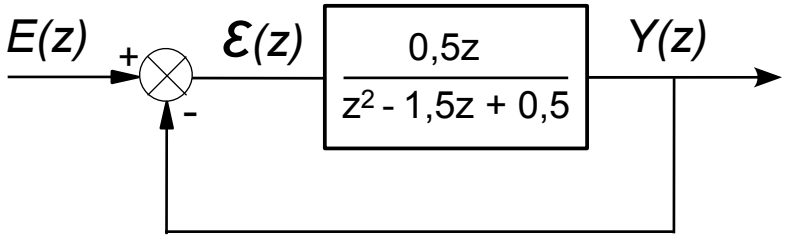
Exemple 2 :



Expression de l'erreur :

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{1 + \frac{0.5z}{z^2 - 1.5z + 0.5}} E(z) = \frac{z^2 - 1.5z + 0.5}{z^2 - z + 0.5} E(z)$$

Exemple 2 :

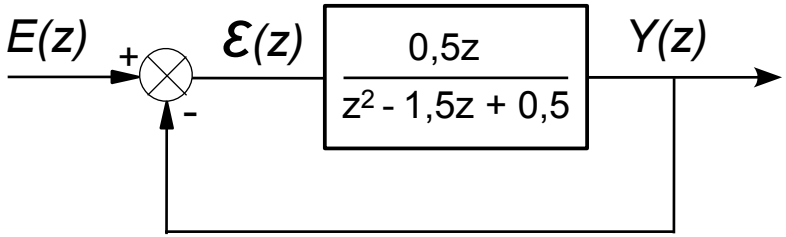


Expression de l'erreur :

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{1 + \frac{0.5z}{z^2 - 1.5z + 0.5}} E(z) = \frac{z^2 - 1.5z + 0.5}{z^2 - z + 0.5} E(z)$$

Erreur de position : $\varepsilon_p = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \varepsilon(z) = 0$

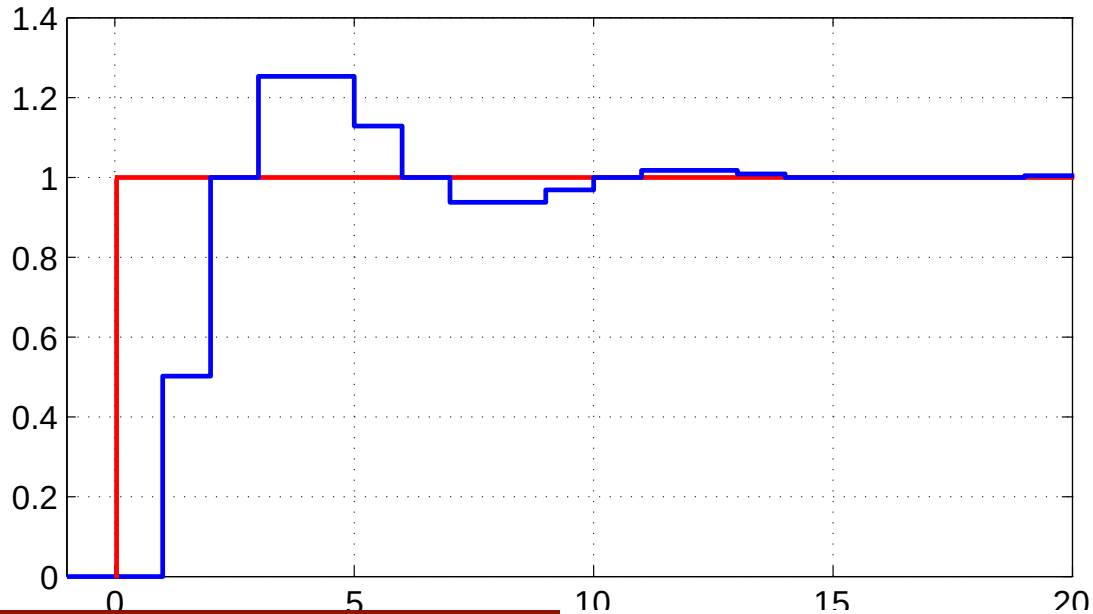
Exemple 2 :



Expression de l'erreur :

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{1 + \frac{0.5z}{z^2 - 1.5z + 0.5}} E(z) = \frac{z^2 - 1.5z + 0.5}{z^2 - z + 0.5} E(z)$$

Erreur de position : $\varepsilon_p = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \varepsilon(z) = 0$

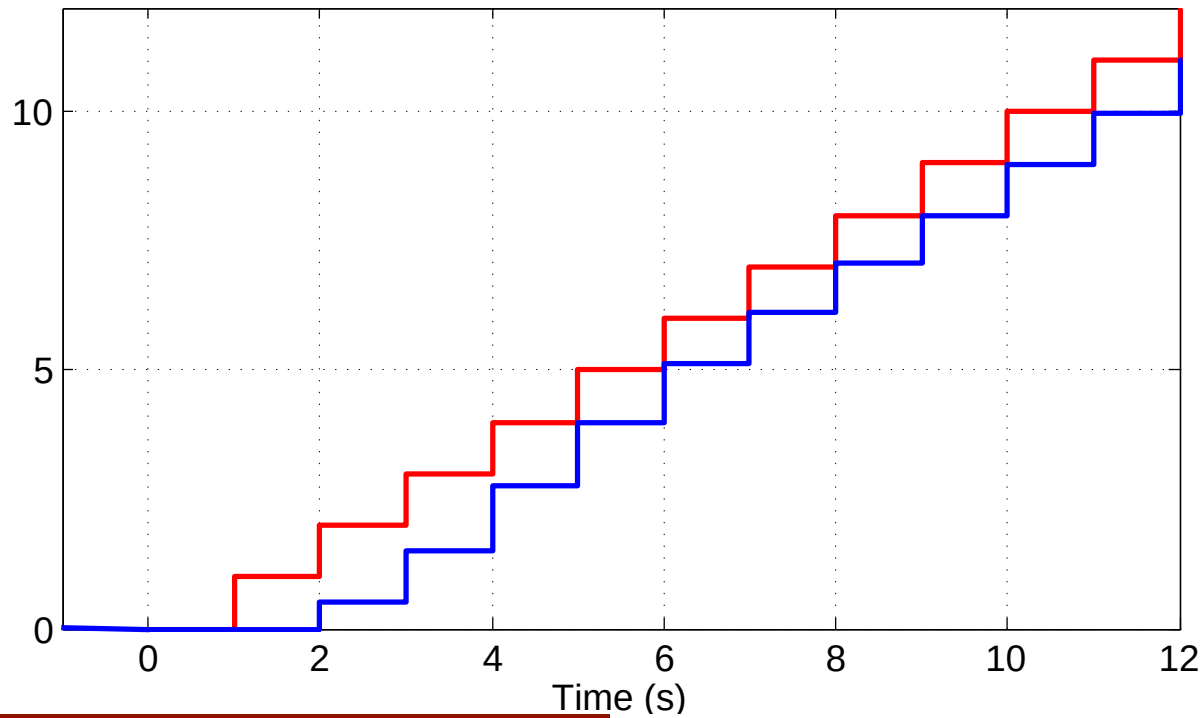


Erreur de vitesse :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_v &= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\,\varepsilon(z) \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\,\frac{z^2-1.5z+0.5}{z^2-z+0.5}\,\underbrace{\frac{z}{(z-1)^2}\,e_0}_{E(z)} \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z-0.5)}{z^2-z+0.5}\,\frac{e_0}{z-1} \;=\; e_0
\end{aligned}$$

Erreur de vitesse :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_v &= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\,\varepsilon(z) \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\,\frac{z^2-1.5z+0.5}{z^2-z+0.5}\,\underbrace{\frac{z}{(z-1)^2}\,e_0}_{E(z)} \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z-0.5)}{z^2-z+0.5}\,\frac{e_0}{z-1} = e_0
\end{aligned}$$

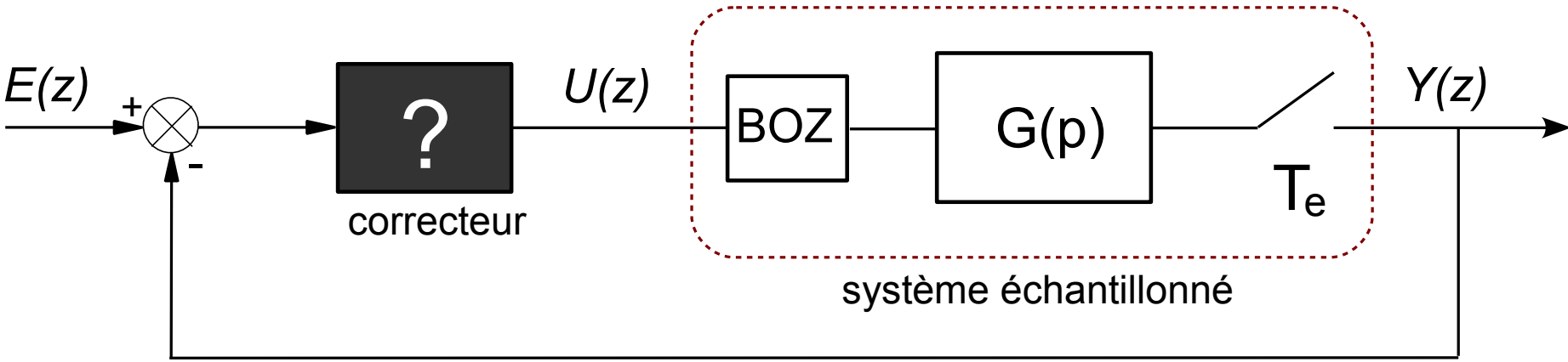


Sommaire

1. Introduction
   - Rappels
   - Généralités
   - Echantillonnage
   - Conversion numérique-analogique
2. Modélisation
   - Transformée en Z
   - Système à temps discret
   - Système échantillonné
3. Analyse d'un asservissement
   - Quelques signaux standards
   - Stabilité d'un système
   - Précision d'un système asservi
4. Synthèse de correcteurs
   - Principe
   - Méthodes de transposition
   - Implémentation

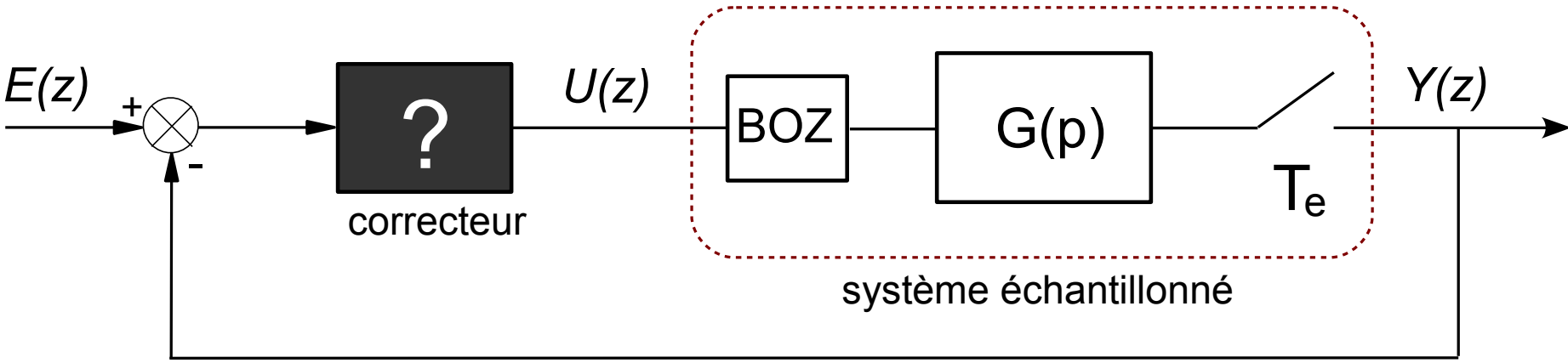
Principe

★ **Objectif :** concevoir un correcteur pour asservir la sortie d'un système à une consigne.



Principe

★ **Objectif :** concevoir un correcteur pour asservir la sortie d'un système à une consigne.



Deux approches :

- Synthèse *directe* d'un correcteur discret (par exemple : le RST).
- *Discrétisation* d'un correcteur continu.

Discrétisation d'un correcteur continu

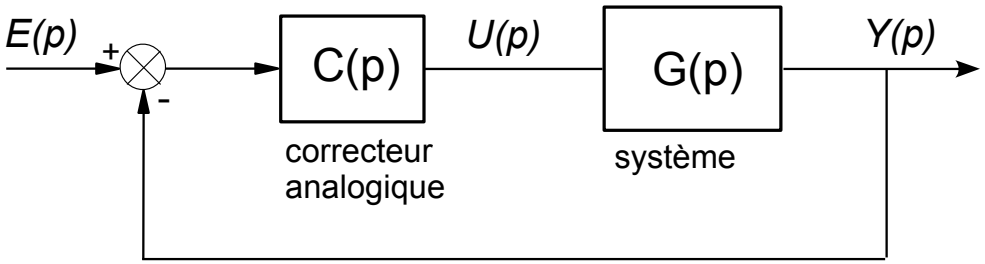
Idée : transposition d'un correcteur continu en correcteur discret.

$\Rightarrow$ un correcteur analogique doit être synthétisé au préalable.

Discrétisation d'un correcteur continu

Idée : transposition d'un correcteur continu en correcteur discret.

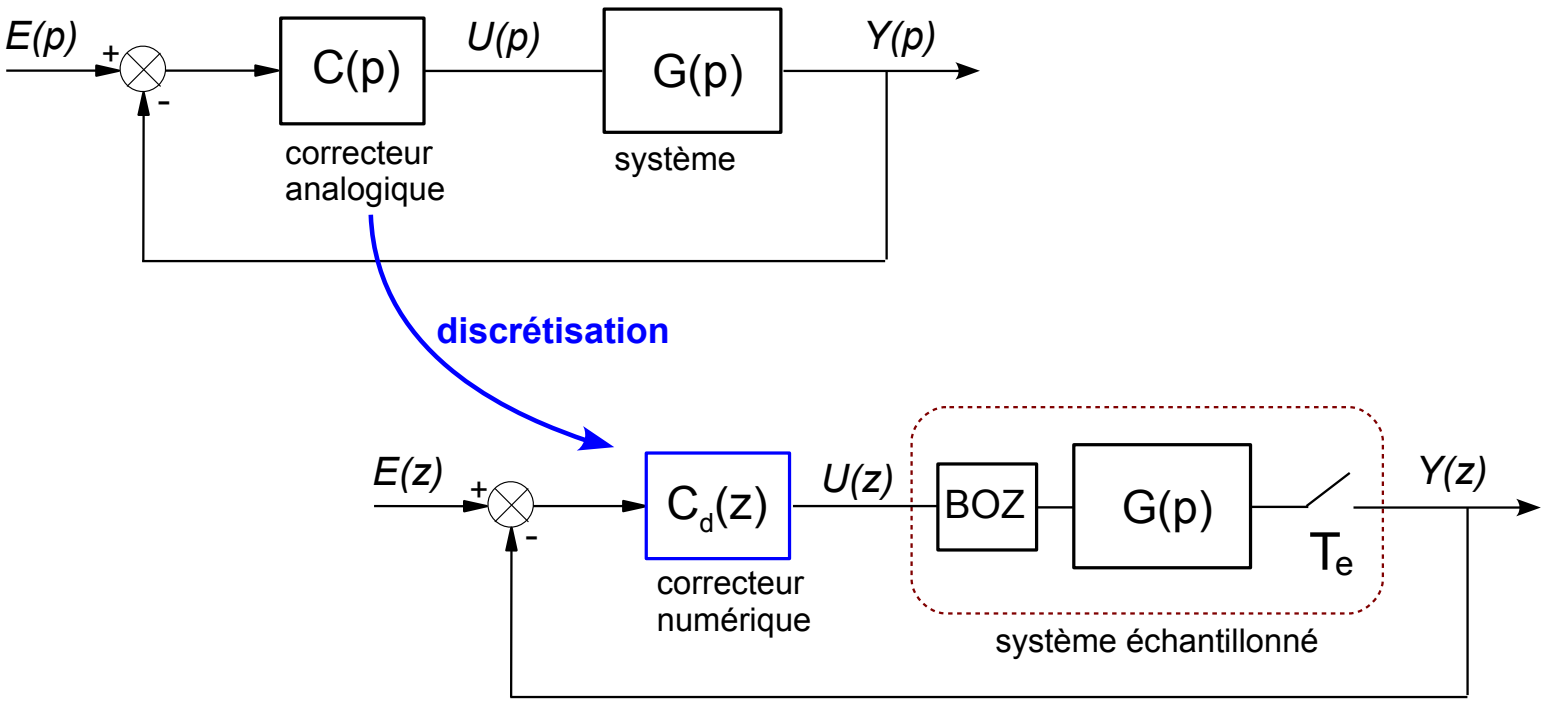
$\Rightarrow$ un correcteur analogique doit être synthétisé au préalable.



Discrétisation d'un correcteur continu

Idée : transposition d'un correcteur continu en correcteur discret.

$\Rightarrow$ un correcteur analogique doit être synthétisé au préalable.

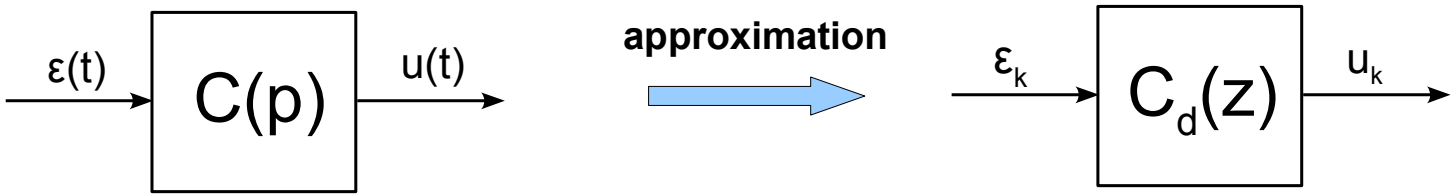


Sommaire

1. Introduction
   - Rappels
   - Généralités
   - Echantillonnage
   - Conversion numérique-analogique
2. Modélisation
   - Transformée en Z
   - Système à temps discret
   - Système échantillonné
3. Analyse d'un asservissement
   - Quelques signaux standards
   - Stabilité d'un système
   - Précision d'un système asservi
4. Synthèse de correcteurs
   - Principe
   - Méthodes de transposition
   - Implémentation

Méthodes de transposition

Comment obtenir un correcteur $C_d(z)$ par approximation du correcteur analogique $C(p)$?



- Ils existent plusieurs techniques avec leurs avantages/inconvénients.
- Seules deux méthodes sont présentées ici.
- Ces méthodes se basent sur une approximation de la variable p.

Transposition d'Euler ou méthode des rectangles arrières

La méthode est basée sur l'approximation numérique de la dérivation.

$$\frac{dx(t)}{dt} \simeq \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

Transposition d'Euler ou méthode des rectangles arrières

La méthode est basée sur l'approximation numérique de la dérivation.

$$\frac{dx(t)}{dt} \simeq \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

- Dans le domaine de Laplace, la dérivation correspond à une multiplication par p.
- La transformée en Z de l'opération du membre de droite donne : $\frac{1 - z^{-1}}{T_e} X(z)$.

Par analogie, un changement de variable est proposé :

$$p \longrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e} = \frac{z - 1}{zT_e}$$

Transposition bilinéaire ou méthode de Tustin ou méthode des trapèzes

La méthode est basée sur l'approximation numérique de l'intégration par la méthode des trapèzes.

$$y(t) = \int x(t)dt \xrightarrow{\text{approximation numérique}} y_k = y_{k-1} + \frac{x_{k-1} + x_k}{2} T_e$$

Transposition bilinéaire ou méthode de Tustin ou méthode des trapèzes

La méthode est basée sur l'approximation numérique de l'intégration par la méthode des trapèzes.

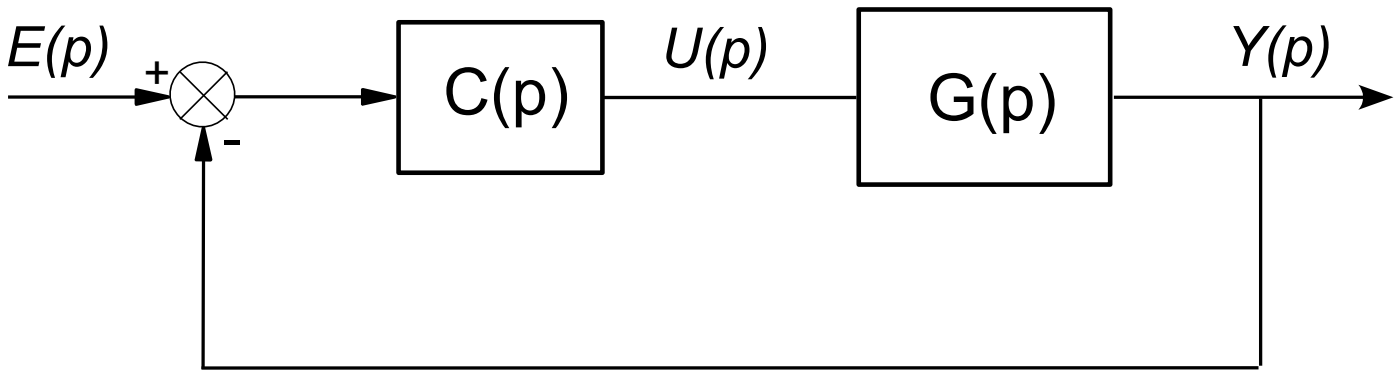
$$y(t) = \int x(t)dt \xrightarrow{\text{approximation numérique}} y_k = y_{k-1} + \frac{x_{k-1} + x_k}{2} T_e$$

- Dans le domaine de Laplace, l'intégration correspond à : $Y(p) = \frac{1}{p} X(p)$.
- La transformée en Z de l'opération de droite donne : $Y(z) = \frac{T_e}{2} \frac{z+1}{z-1} X(z)$.

Par analogie, un changement de variable est proposé :

$$p \longrightarrow \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$$

Exemple

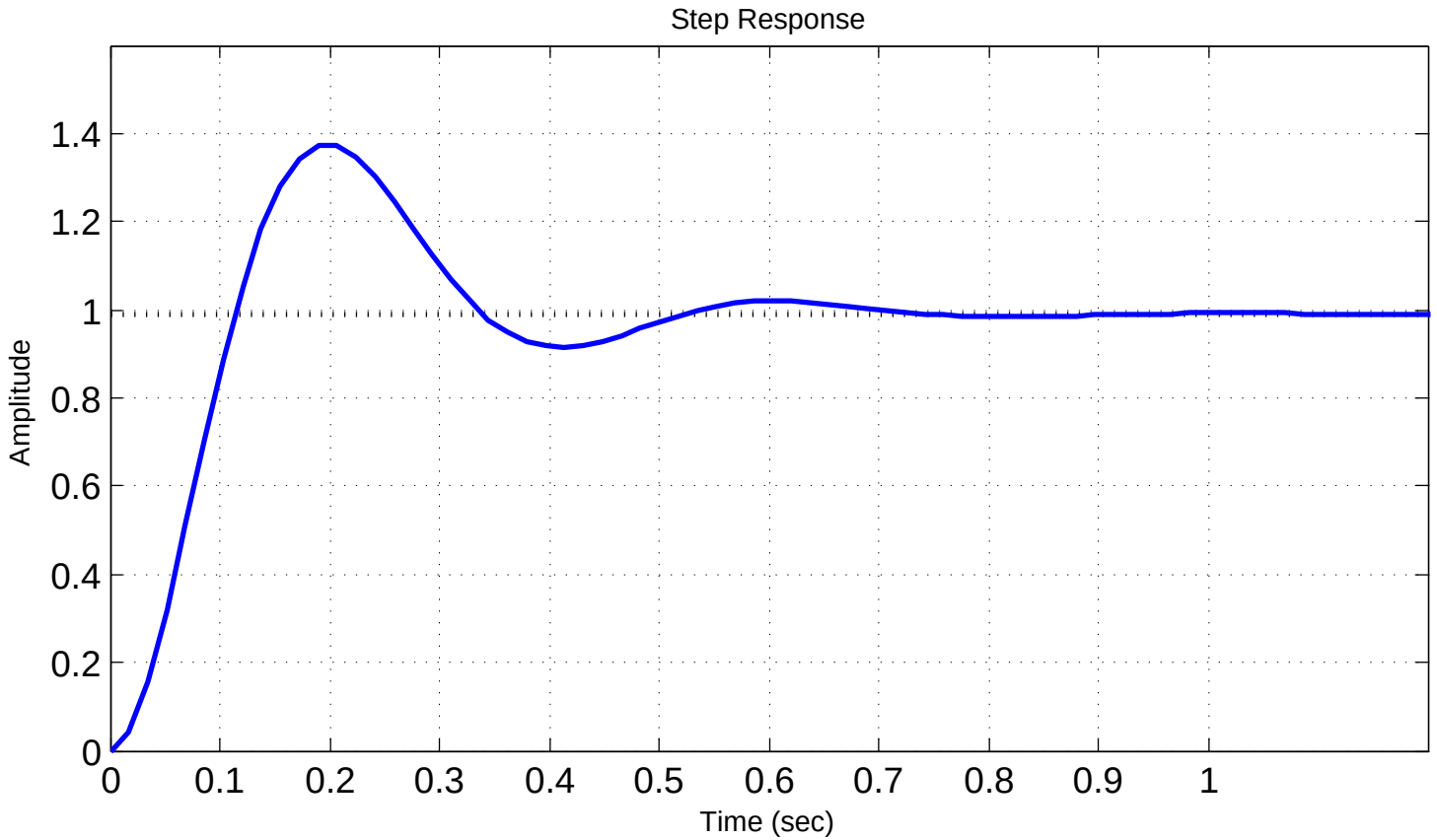


- Considérons un asservissement avec $G(p) = \dfrac{100}{(p+1)^2}$
- Un correcteur analogique a été calculé : $C(p) = \dfrac{0.19p+1}{0.06p+1}$
- Discrétisons le correcteur par la transposition bilinéaire (avec $T_e = 0.02s$) :

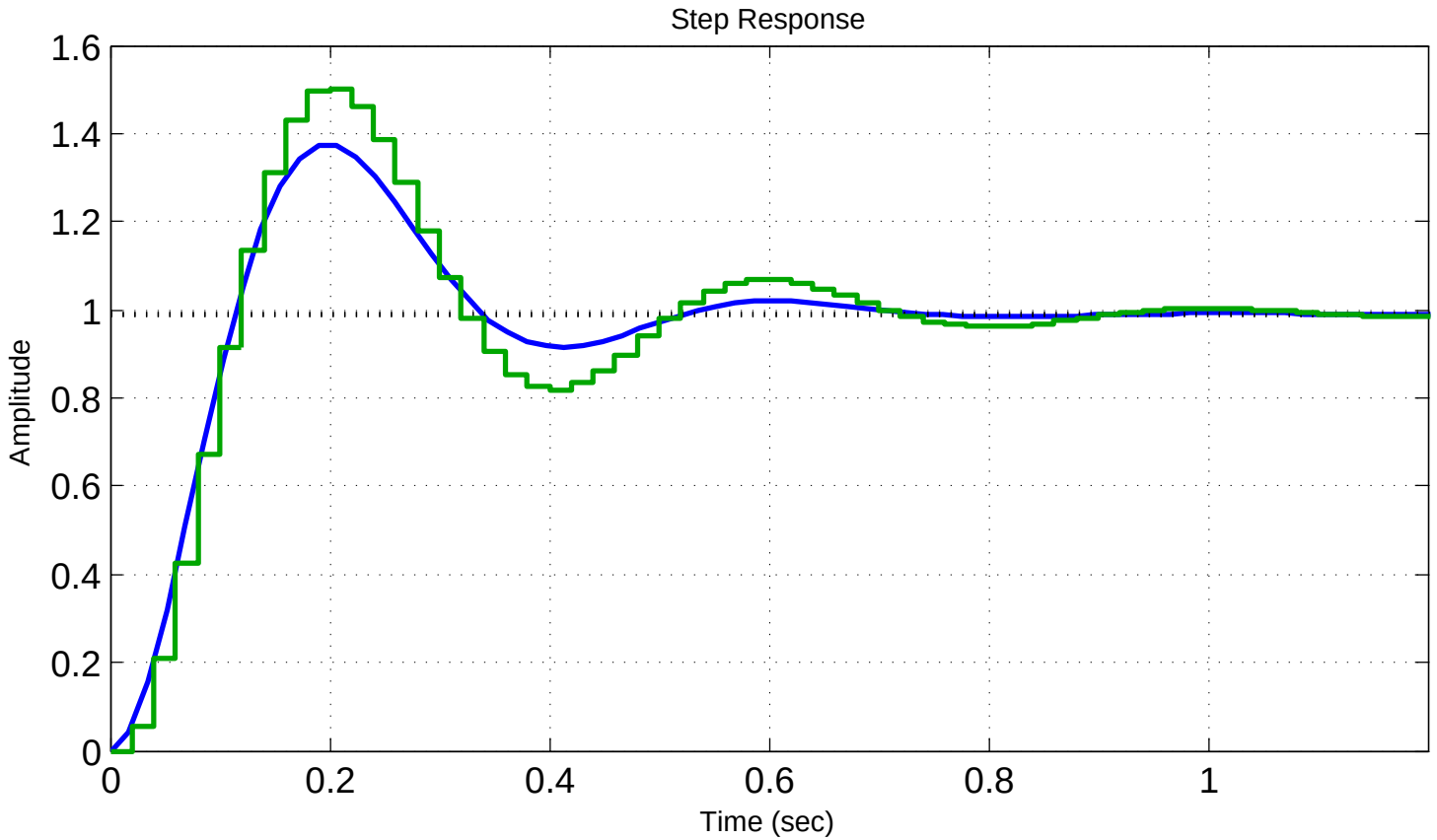
$$C_d(z) = \frac{2.8z - 2.6}{z - 0.7}$$

- Ce correcteur numérique sera utilisé pour la commande du système échantillonné $G(z)$.

Exemple : réponse de l'asservissement



Exemple : réponse de l'asservissement



La commande numérique basée sur une approximation du correcteur analogique permet d'avoir des performances d'asservissement comparables.

♦ **Remarque :** l'effet du bloqueur $B_0(p)$ n'est pas pris en compte par la discrétisation !

En toute rigueur, il faut en tenir compte

- pour que les performances de la commande numérique soit proche de l'original,
- sinon, il peut y avoir un risque d'instabilité si T_e est trop grand.
- Peut être négligé si T_e assez petit.

♦ **Remarque :** l'effet du bloqueur $B_0(p)$ n'est pas pris en compte par la discrétisation !

En toute rigueur, il faut en tenir compte

- pour que les performances de la commande numérique soit proche de l'original,
- sinon, il peut y avoir un risque d'instabilité si T_e est trop grand.
- Peut être négligé si T_e assez petit.

Prise en compte du bloqueur lors de la synthèse du correcteur analogique $C(p)$,

- en assimilant le bloqueur à un retard pur d'une demi-période $B_0(p) = e^{-\frac{T_e}{2}p}$,
- en utilisant la transformation en W du système échantillonné,
- en approchant le bloqueur par une fonction de transfert rationnelle :

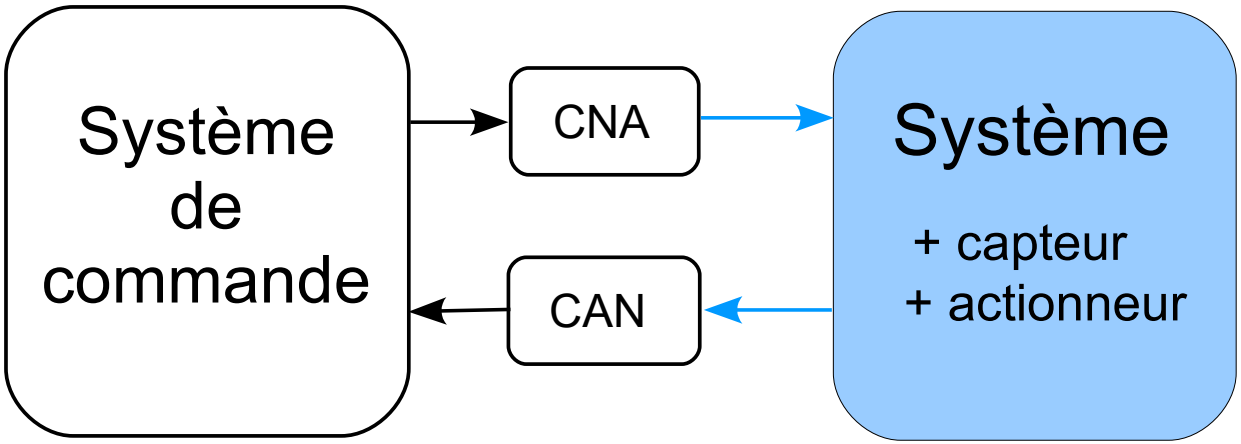
$$B_0(p) \simeq \frac{1}{1+p\frac{T_e}{2}} \quad \text{(dév. en série)} \qquad \text{ou} \qquad B_0(p) \simeq \frac{1-p\frac{T_e}{4}}{1+p\frac{T_e}{4}} \quad \text{(approx. de Padé)}$$

Sommaire

1. Introduction
   - Rappels
   - Généralités
   - Echantillonnage
   - Conversion numérique-analogique
2. Modélisation
   - Transformée en Z
   - Système à temps discret
   - Système échantillonné
3. Analyse d'un asservissement
   - Quelques signaux standards
   - Stabilité d'un système
   - Précision d'un système asservi
4. Synthèse de correcteurs
   - Principe
   - Méthodes de transposition
   - Implémentation

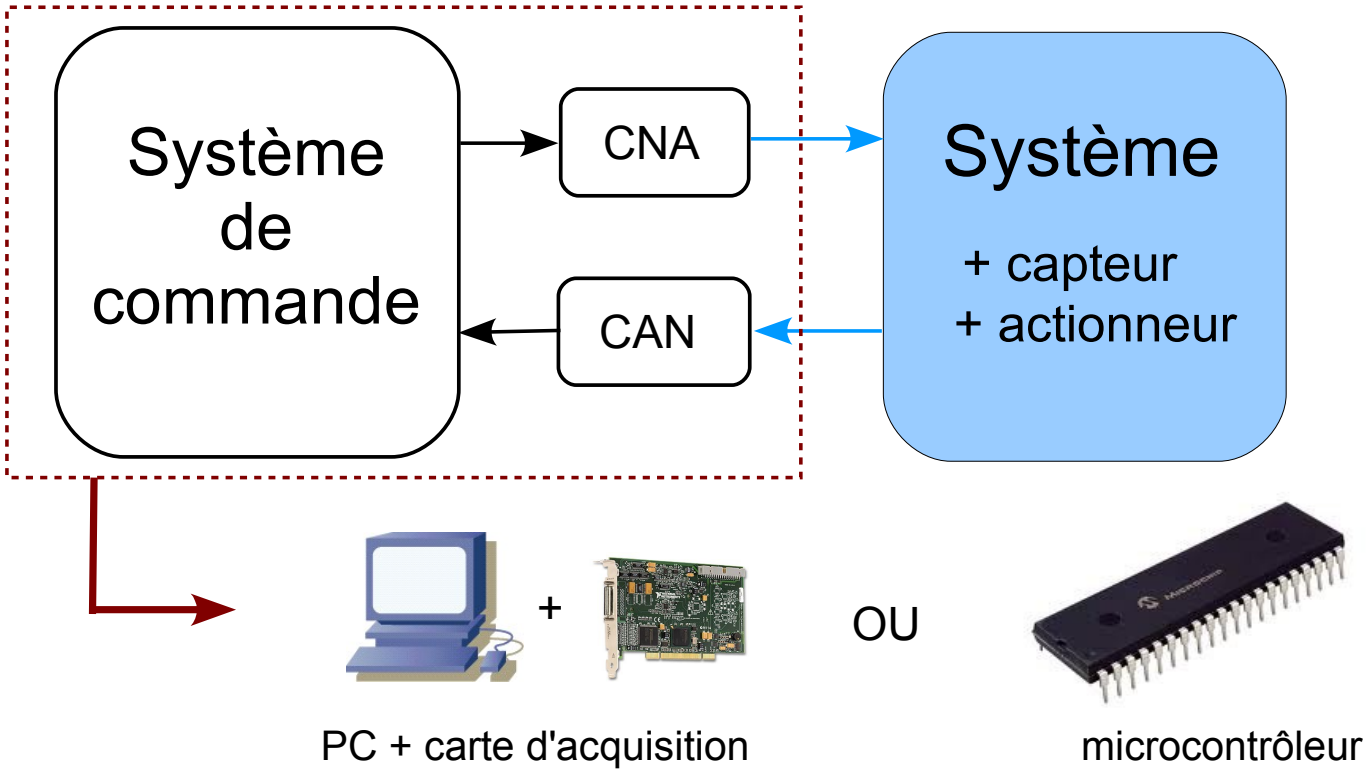
Implémentation

Schéma général de la commande numérique d'un système



Implémentation

Schéma général de la commande numérique d'un système



- Les convertisseurs CAN et CNA sont l'interface système numérique-système physique.
- Ils sont réalisés via une carte d'acquisition ou une carte électronique accompagnant le μC.

L'étape de synthèse permet d'obtenir un correcteur sous forme de *fonction de transfert* $C_d(z)$.

$\Rightarrow$ comment implémenter une fonction de transfert ?

L'étape de synthèse permet d'obtenir un correcteur sous forme de *fonction de transfert* $C_d(z)$.

$\Rightarrow$ comment implémenter une fonction de transfert ?

$\Rightarrow$ Il faut revenir dans le domaine temporelle.

Exprimer la relation temporelle entre l'entrée du correcteur et sa sortie :
(écart - commande numérique)

L'étape de synthèse permet d'obtenir un correcteur sous forme de *fonction de transfert* $C_d(z)$.

$\Rightarrow$ comment implémenter une fonction de transfert ?

$\Rightarrow$ Il faut revenir dans le domaine temporelle.

Exprimer la relation temporelle entre l'entrée du correcteur et sa sortie :
(écart - commande numérique)

$\Rightarrow$ **équations récurrentes**

L'étape de synthèse permet d'obtenir un correcteur sous forme de *fonction de transfert* $C_d(z)$.

$\Rightarrow$ comment implémenter une fonction de transfert ?

$\Rightarrow$ Il faut revenir dans le domaine temporelle.

Exprimer la relation temporelle entre l'entrée du correcteur et sa sortie :
(écart - commande numérique)

$\Rightarrow$ **équations récurrentes**

Exemple :

$$C_d(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{3z+2}{z-0.5} \qquad \Longleftrightarrow \qquad u[k] = 0.5u[k-1] + 3\varepsilon[k] + 2\varepsilon[k-1]$$

Programmation de la loi de commande en langage C. (exemple)

```
2  float commande(float consigne, float mesure)
3    {
4      float sortie;
5      float ecart;
6      static float sortie_previous = 0.0;
7      static float entree_previous = 0.0;

9      // calcul de l'erreur (comparateur)
10     ecart = consigne - mesure;

12     // equation du correcteur
13     sortie = 0.5*sortie_previous + 3*ecart + 2*
           ecart_previous;

15     // mise à jour des valeurs "precedentes"
16     sortie_previous = sortie;
17     ecart_previous = ecart;

19     return sortie;
20   }
```

Cette fonction doit être exécutée à chaque période d'échantillonnage T_e.