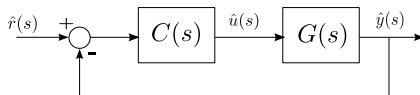


Chapitre 5 : Synthèse de correcteurs

Yassine ARIBA



Sommaire

- ① Introduction
- ② Actions élémentaires
- ③ Combinaisons d'actions
- ④ Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Sommaire

① Introduction

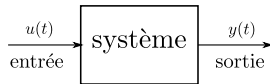
② Actions élémentaires

③ Combinaisons d'actions

④ Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Introduction

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif?

⇒ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs?

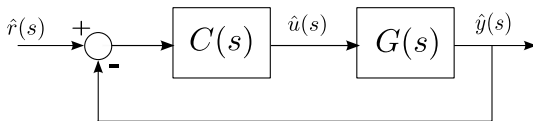
Vu au chapitre 3

⇒ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

Vu au chapitre 2

⇒ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

⇒ $u(t)$ donné *automatiquement* par la loi de commande en boucle fermée

Principe de commande en **boucle fermée**

Question : comment déterminer la loi de commande ?

... on verra au dernier chapitre... avant ça → on y est donc

↪ il s'agit de déterminer un correcteur $C(s)$

Question : pour une loi donnée, qu'est-ce que ça change ? qu'est-ce qui se passe ?

Vu au chapitre 4

⇒ il faudrait analyser le système en BF avec ce qu'on a déjà vu

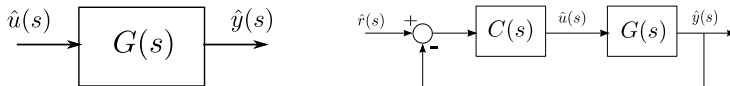
Récapitulons

Phase de modélisation :

Chercher un modèle représentant le comportement du système.

- ▶ relation entrée-sortie ?
- ▶ équation différentielle, fonction de transfert, schéma-bloc...

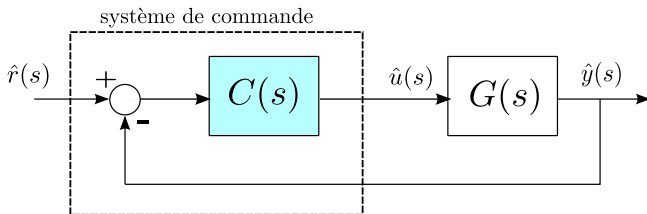
Phase d'analyse :



Analyse des propriétés du modèle et ses performances (en bo ou bf).

- ▶ réponses temporelles et fréquentielles
- ▶ stabilité
- ▶ analyse d'un asservissement pour un correcteur $C(s)$ donné

⇒ Ce que vous avez vu jusqu'à maintenant.

Phase de synthèse :

Conception d'un système de commande.

- ▶ rechercher un correcteur
- ▶ stabilisation
- ▶ amélioration des performances

⇒ Le système en boucle fermée doit satisfaire un certain cdc.

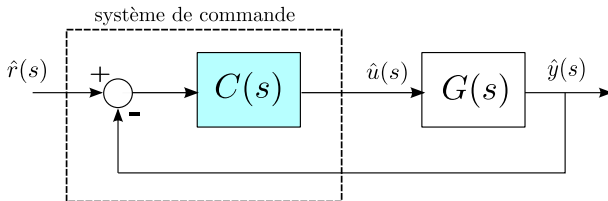
Un système de commande a pour objectif de doter le système asservi de certaines propriétés telles que

- ▶ la stabilité du système asservi,
- ▶ la rapidité de la réponse temporelle (régime transitoire),
- ▶ la précision en régime permanent,
- ▶ la robustesse (marges de stabilité, rejet de perturbation).

Dans ce cours, seule la synthèse par méthodes fréquentielles classiques est considérée. Elles sont très utilisées en entreprises du fait de

- ▶ leur aspect pratique,
- ▶ l'existence de techniques de synthèse simples ou empiriques,
- ▶ la possibilité de régler les gains intuitivement.

Pour la suite de l'exposé, nous garderons les notations suivantes :



- ▶ $C(s)$ représente le correcteur.
- ▶ $G(s)$ représente le système à commander.
- ▶ $\hat{u}(s)$ est le signal de commande.
- ▶ $F(s)$ représente la fonction de transfert en boucle fermée.
- ▶ Dans cette configuration la FTBO correspond à la chaîne directe : $C(s)G(s)$.
- ▶ L'erreur d'asservissement est notée $\hat{e}(s) = \hat{e}(s) - \hat{y}(s)$.

Sommaire

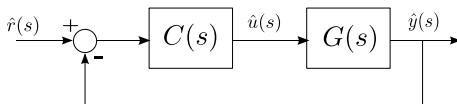
① Introduction

② Actions élémentaires

③ Combinaisons d'actions

④ Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Retour sur l'erreur d'asservissement



Exprimons l'erreur d'asservissement $\varepsilon(t) = r(t) - y(t)$

$$\hat{\varepsilon}(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)} \hat{r}(s)$$

Un gain important implique un bon suivi de la consigne :

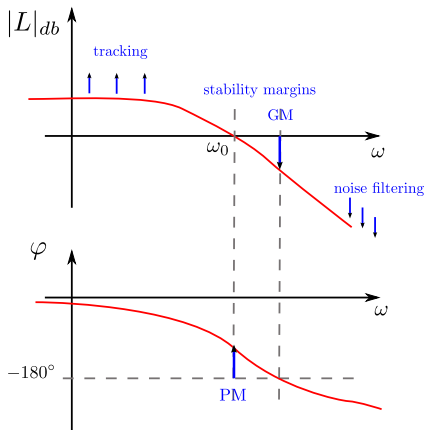
(tendance générale)

- ▶ meilleure précision et réponse plus rapide
- ▶ mais résulte en une commande u plus agressive
- ▶ mais réduit les marges de stabilité

Analyse avec le diagramme de Bode

Des indices de performances peuvent être déduits du diagramme de Bode de la FTBO :

$$L(s) = G(s)C(s)$$



Principe des méthodes fréquentielles classiques

★ principe : déterminer un correcteur $C(s)$ pour “modeler” l’allure de $L(s)$

► Allure spécifiée par un certain CDC

► Rappelons que

$$\text{bode}[L] = \text{bode}[G \times C] = \text{bode}[G] + \text{bode}[C]$$

► G étant le modèle du système physique, son diagramme est imposé

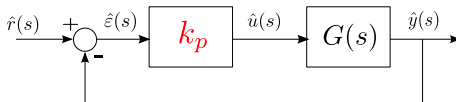
► On peut jouer sur celui de C

Action élémentaires

- ▶ La méthode de la section précédente présente plusieurs limitations
- ▶ Présentation maintenant des méthodes classiques
 - ↔ méthodes fréquentielles
 - ↔ basées sur l'analyse du diagramme de Bode
- ▶ Il existe 3 types de corrections élémentaires :
 - ▶ action proportionnelle
 - ▶ action intégrale
 - ▶ action dérivée

Action proportionnelle

Ce correcteur est un simple amplificateur de gain réglable



Correcteur :

$$C(s) = k_p \quad \text{avec } k_p > 0$$

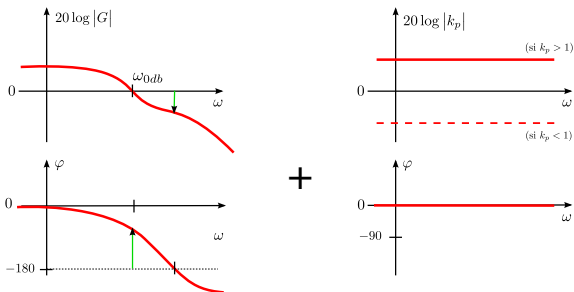
Loi de commande :

$$\hat{u}(s) = k_p \hat{\varepsilon}(s) \quad \Rightarrow \quad u(t) = k_p \varepsilon(t).$$

Action proportionnelle

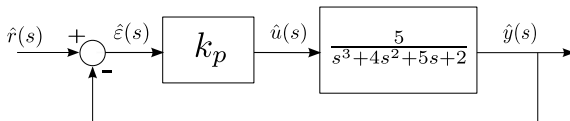
Analyse de l'effet sur le diagramme de Bode en FTBO

(exemple arbitraire pour le bode de G)



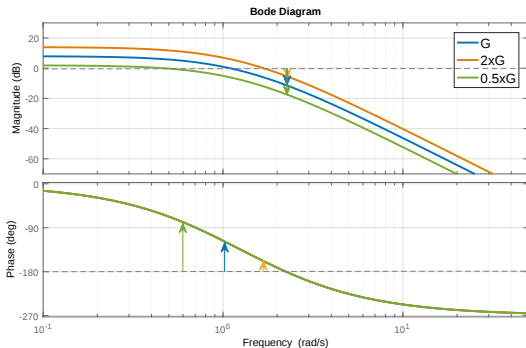
- ▶ amplification ($k_p > 1$) ou atténuation ($k_p < 1$)
- ▶ pas de déphasage
- ▶ résulte en une translation verticale de la courbe de gain de G

Illustration sur un exemple



La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

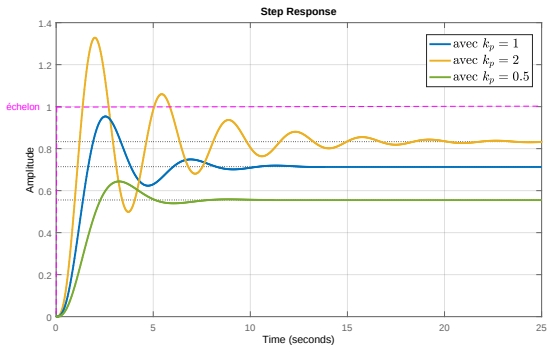
$$L(s) = \frac{5k_p}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

Influence de k_p sur le diagramme de Bode de la FTBO

Mesure des marges de stabilité :

- (en bleu) système $G(s)$ seul, marges : $\Delta G = 11 \text{ dB}$ et $\Delta \varphi = 56 \text{ deg}$
- (en orange) avec $k_p = 2$, marges : $\Delta G = 5 \text{ dB}$ et $\Delta \varphi = 21 \text{ deg}$
- (en vert) avec $k_p = 0.5$, marges : $\Delta G = 17 \text{ dB}$ et $\Delta \varphi = 117 \text{ deg}$

Observation sur la réponse indicielle de la FTBF



Avantages et Inconvénients du correcteur :

- ▶ Si $k_p \nearrow$, le système répond plus rapidement, l'erreur de position diminue.
- ▶ Si $k_p \searrow$, les marges de stabilité augmentent.
- ▶ Si $k_p \nearrow$, peut entraîner des oscillations et un dépassement préjudiciable.

Autre exemple : avec $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$, soit un système en boucle fermée

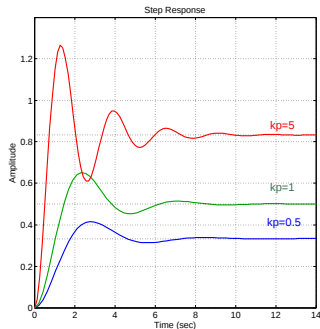
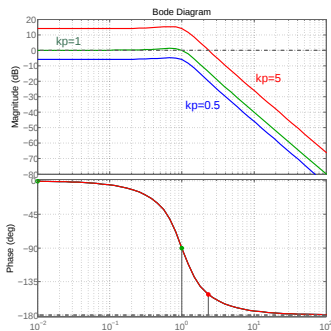
$$F(s) = \frac{k_p}{s^2 + s + 1 + k_p}.$$

► Analyse à partir de la forme canonique :

$$K_{statique} = \frac{k_p}{k_p + 1}, \quad \omega_n = \sqrt{1 + k_p}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{1 + k_p}}.$$

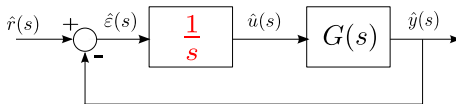
$\Rightarrow$ si $k_p \nearrow$ alors $\zeta \searrow$, oscillations $\nearrow$ et erreur statique $\varepsilon_s = \frac{1}{1+k_p} \searrow$.

► Analyse par Bode :



Action intégrale

Ce correcteur intègre l'erreur d'asservissement



Correcteur :

$$C(s) = \frac{1}{s}$$

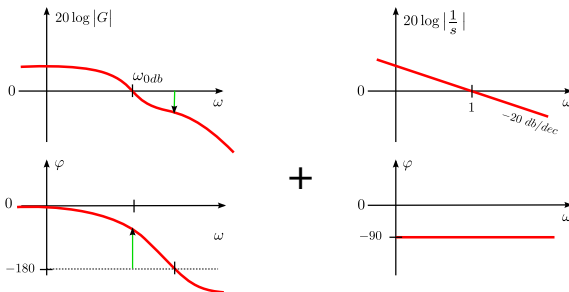
Loi de commande :

$$\hat{u}(s) = \frac{1}{s} \hat{\varepsilon}(s) \quad \Rightarrow \quad u(t) = \int_0^t \varepsilon(\theta) d\theta.$$

Action intégrale

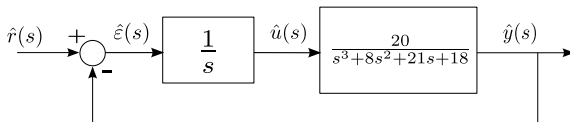
Analyse de l'effet sur le diagramme de Bode en FTBO

(exemple arbitraire pour le bode de G)



- gain décroissant, pente à -20 dB/dec , coupe 0 dB à $\omega = 1 \text{ rad/sec}$
- déphasage de 90 deg quelque soit la fréquence
- résulte en une translation vers le bas de la courbe de phase de G et une accentuation de la pente du gain

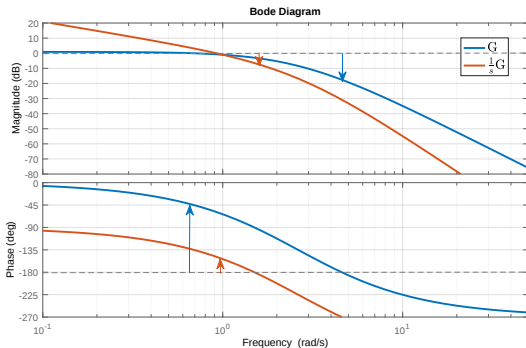
Illustration sur un exemple



La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

$$L(s) = \frac{20}{s(s^3 + 8s^2 + 21s + 18)}$$

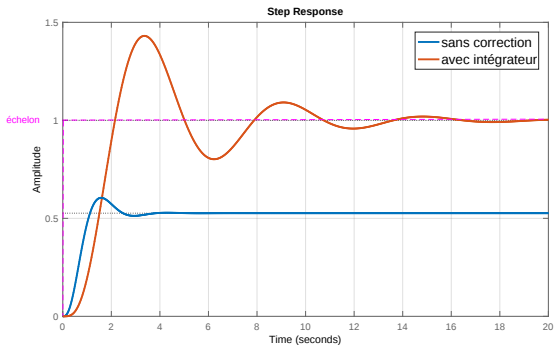
Influence de l'intégrateur sur le diagramme de Bode de la FTBO



Mesure des marges de stabilité :

- ▶ (en bleu) système $G(s)$ seul, marges : $\Delta G = 17 \text{ dB}$ et $\Delta\varphi = 136 \text{ deg}$
- ▶ (en orange) avec $\frac{1}{s}$, marges : $\Delta G = 6 \text{ dB}$ et $\Delta\varphi = 31 \text{ deg}$

Observation sur la réponse indicielle de la FTBF



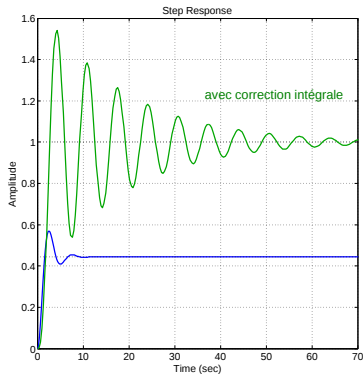
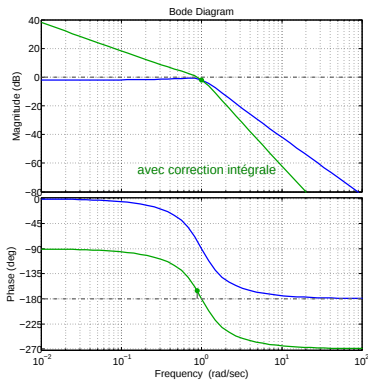
Avantages et Inconvénients du correcteur :

- ▶ Erreur statique nulle.
- ▶ Diminution des marges de stabilité, augmentation des oscillations.

Autre exemple : avec $G(s) = \frac{0.8}{s^2 + s + 1}$, soit un système en boucle fermée

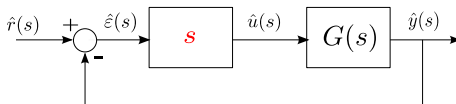
$$F(s) = \frac{0.8}{s^3 + s^2 + s + 0.8}.$$

Courbe plus proche du point critique : marges dégradées, oscillations et dépassement
Pas d'erreur statique



Action dérivée

Ce correcteur dérive l'erreur d'asservissement



Correcteur :

$$C(s) = s$$

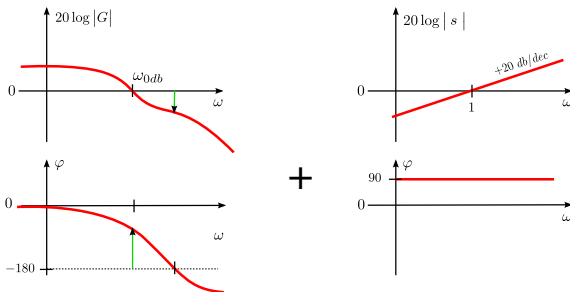
Loi de commande :

$$\hat{u}(s) = s \hat{\varepsilon}(s) \quad \Rightarrow \quad u(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t).$$

Action dérivée

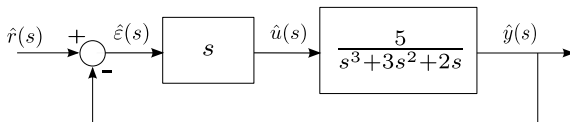
Analyse de l'effet sur le diagramme de Bode en FTBO

(exemple arbitraire pour le bode de G)



- gain croissant, pente à $+20 \text{ dB/dec}$, coupe 0 dB à $\omega = 1 \text{ rad/sec}$
- ajout de phase de 90 deg quelque soit la fréquence
- résulte en une translation vers le haut de la courbe de phase de G et un redressement de la pente du gain

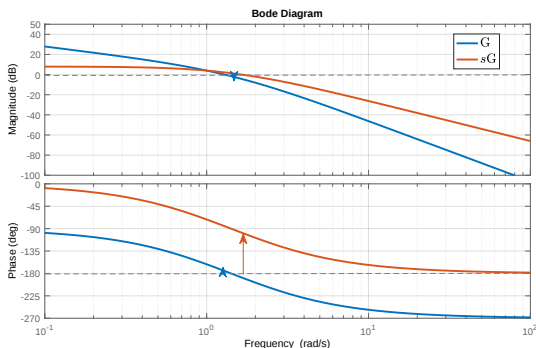
Illustration sur un exemple



La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

$$L(s) = \frac{5s}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

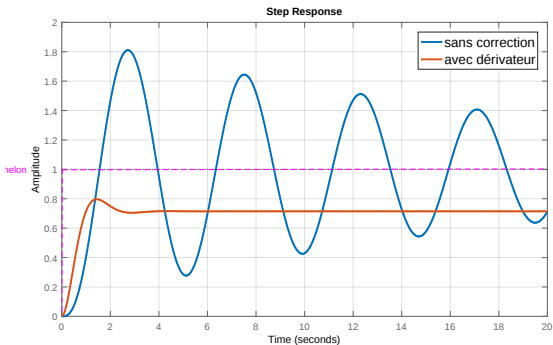
Influence du dérivateur sur le diagramme de Bode de la FTBO



Mesure des marges de stabilité :

- ▶ (en bleu) système $G(s)$ seul, marges : $\Delta G = 1.5 \text{ dB}$ et $\Delta\varphi = 5 \text{ deg}$
- ▶ (en orange) avec s , marges : $\Delta G = +\infty \text{ dB}$ et $\Delta\varphi = 81 \text{ deg}$

Observation sur la réponse indicielle de la FTBF



Avantages et Inconvénients du correcteur :

- ▶ Augmentation des marges de stabilité, réduction des oscillations/dépassement
- ▶ Dégradation de la précision.

Sommaire

① Introduction

② Actions élémentaires

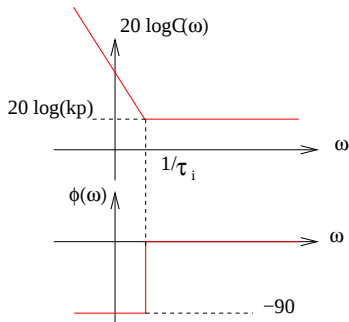
③ Combinaisons d'actions

④ Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Correcteur Proportionnel-Intégral (PI)

Ce correcteur a pour objectif de tirer profit des avantages de l'effet de I sans ses inconvénients :

$$C(s) = k_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s}.$$

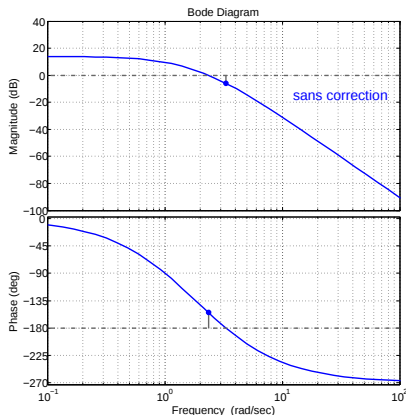


Idée du correcteur :

- ▶ Utiliser l'avantage de l'intégrateur en basses fréquences : précision infinie,
- ▶ L'action intégrale ne doit plus avoir d'effet dans les fréquences élevées, en particulier dans la région du point critique,

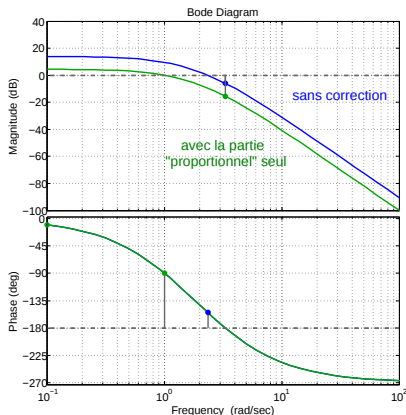
Réglage intuitif du correcteur :

- ▶ Ajuster le gain proportionnel en fonction de l'objectif et des caractéristiques du système avant correction :
 - ▶ le diminuer pour augmenter les marges de stabilité,
 - ▶ l'augmenter pour améliorer la rapidité du système.
- ▶ Ensuite, la partie I est ajoutée en réglant le zero $1/\tau_i$ de façon à ce que la correction ne se fasse qu'en basses fréquences.



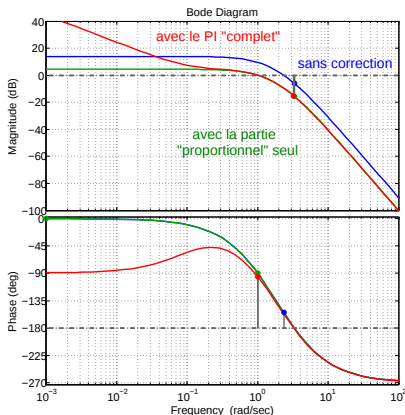
Réglage intuitif du correcteur :

- ▶ Ajuster le gain proportionnel en fonction de l'objectif et des caractéristiques du système avant correction :
 - ▶ le diminuer pour augmenter les marges de stabilité,
 - ▶ l'augmenter pour améliorer la rapidité du système.
- ▶ Ensuite, la partie I est ajoutée en réglant le zero $1/\tau_i$ de façon à ce que la correction ne se fasse qu'en basses fréquences.



Réglage intuitif du correcteur :

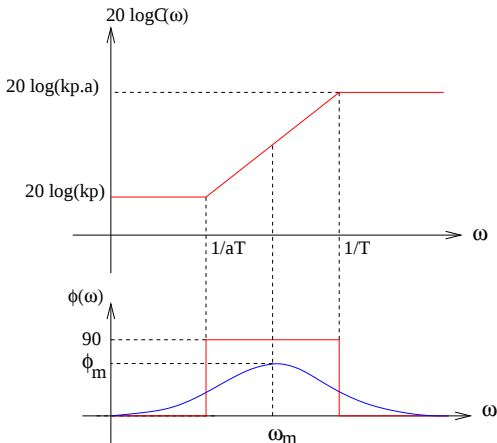
- ▶ Ajuster le gain proportionnel en fonction de l'objectif et des caractéristiques du système avant correction :
 - ▶ le diminuer pour augmenter les marges de stabilité,
 - ▶ l'augmenter pour améliorer la rapidité du système.
- ▶ Ensuite, la partie I est ajoutée en réglant le zero $1/\tau_i$ de façon à ce que la correction ne se fasse qu'en basses fréquences.



Correcteur à Avance de Phase

Ce correcteur a pour objectif d'apporter de la phase autour du point critique afin d'augmenter les marges de stabilité

$$C(s) = k_p \frac{1 + aTs}{1 + Ts}, \quad a > 1.$$



Le principe repose sur le réglage de a et T tels que le correcteur apporte de la phase (plage $[\frac{1}{aT}, \frac{1}{T})$) autour du point critique.

Méthode de réglage du correcteur :

- ▶ Régler le gain k_p pour ajuster la précision ou la rapidité ou les marges.
- ▶ Mesurer la marge de phase (après la correction prop. k_p) et en déduire la quantité de phase nécessaire

$$\phi_m = \Delta\phi_{\text{désirée}} - \Delta\phi.$$

- ▶ A partir de ϕ_m , a peut être calculé

$$a = \frac{1 + \sin\phi_m}{1 - \sin\phi_m}$$

- ▶ Enfin, nous avons la relation

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}},$$

il s'agit alors de calculer T tel que ω_m coïncide avec ω_{0db} (après correction prop.) :

$$T = \frac{1}{\omega_{0db}\sqrt{a}}.$$

Exemple :

Soit la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermée ait une marge de phase $M\phi = 45^\circ$:

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+\omega_{0db}^2)} = 1 \Rightarrow \omega_{0db} = 9.95 \text{ rad/s}$$

$$M\phi = \pi - 2\arctan \omega_{0db} = 11^\circ$$

- La marge est insuffisante, il faut donc remonter la phase de $\phi_m = 34^\circ$ à la pulsation ω_{0db}

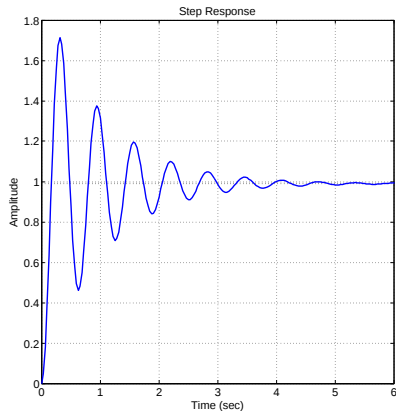
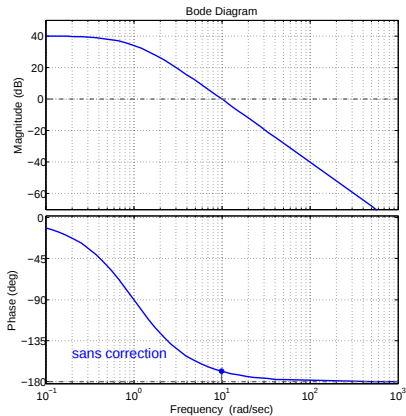
$$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} = \frac{1 + \sin 34^\circ}{1 - \sin 34^\circ} = 3.54$$

- Puis, on règle T afin d'ajouter la quantité ϕ_m au bon endroit

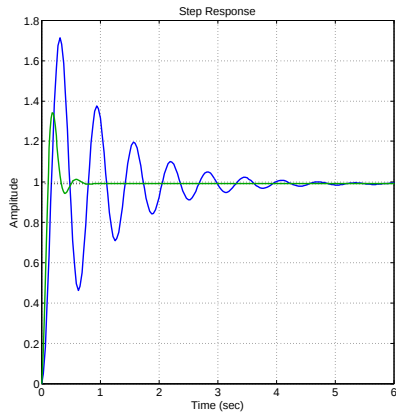
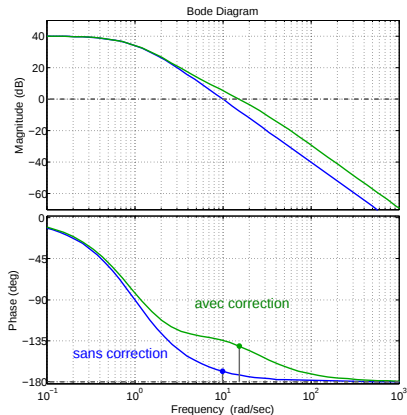
$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{0db} \Rightarrow T = 0.053$$

- Souvent, on choisit $\phi_m = 1.2\phi_{\text{nécessaire}}$ pour compenser le décalage de ω_{0db} après correction.

Schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF



Schema de gauche : bode de la BO ; schema de droite : réponse indicielle de la BF



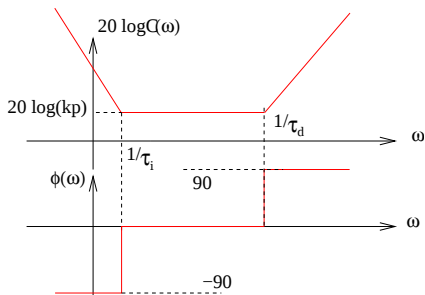
Sommaire

- ① Introduction
- ② Actions élémentaires
- ③ Combinaisons d'actions
- ④ Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Ce correcteur PID est une combinaison des actions PI et PD

$$C(s) = k_p \left(\frac{1 + T_i s}{T_i s} \right) (1 + T_d s).$$



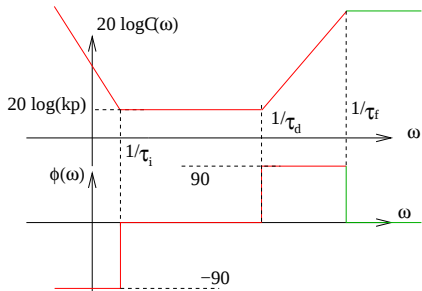
Idée du correcteur :

- ▶ Ajouter du gain en bf (précision ↗),
- ▶ Ajouter de la phase près du point critique ($M\phi$ ↗).

Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Ce correcteur PID est une combinaison des actions PI et PD + un filtre

$$C(s) = k_p \left(\frac{1 + T_i s}{T_i s} \right) (1 + T_d s) \frac{1}{(1 + T_f s)}.$$



Idée du correcteur :

- ▶ Ajouter du gain en bf (précision ↗),
- ▶ Ajouter de la phase près du point critique ($M\phi$ ↗).
- ▶ Le correcteur est propre,
- ▶ Atténuer l'effet du bruit (moins de gain en hf).

Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Méthode de réglage du correcteur :

- ▶ Etudier le système en BO et ses caractéristiques
(marges, précision, rapidité...).
- ▶ Régler le gain proportionnel k_p afin d'obtenir un premier asservissement satisfaisant
(en termes de marges, dépassement, oscillations, rapidité).
- ▶ Régler la constante de temps de l'action intégrale de sorte qu'elle n'agisse qu'en bf
(pour ne pas pénaliser les marges).
- ▶ Régler la constante de temps de l'action dérivée de sorte qu'elle n'agisse qu'autour du point critique
(pour ne pas pénaliser la précision).

Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)

Méthode de réglage du correcteur :

- ▶ Etudier le système en BO et ses caractéristiques
(marges, précision, rapidité...).
- ▶ Régler le gain proportionnel k_p afin d'obtenir un premier asservissement satisfaisant
(en termes de marges, dépassement, oscillations, rapidité).
- ▶ Régler la constante de temps de l'action intégrale de sorte qu'elle n'agisse qu'en bf
(pour ne pas pénaliser les marges).
- ▶ Régler la constante de temps de l'action dérivée de sorte qu'elle n'agisse qu'autour du point critique
(pour ne pas pénaliser la précision).
- ▶ Régler la constante de temps du filtre de sorte qu'il n'enlève pas de phase près du point critique,
- ▶ L'ordre du filtre peut être augmenté afin de mieux atténuer le bruit en hf.

Exemple : Soit le système $G(s) = \frac{5}{s^2 + s + 1}$.

- ▶ Une étude de ce système nous montre qu'il est stable en BF avec une erreur de position $\epsilon_s = 16.7\%$, un dépassement de 51% et une marge de phase $M_\phi = 27.8^\circ$ à $\omega_{0db} = 2.33rad/s$.
- ▶ On choisit un premier correcteur proportionnel afin de baisser l'erreur et accélérer le système : on prend $k_p = 2$ pour avoir une erreur de 9%. Il en résulte une nouvelle marge de phase $M_\phi = 18.9^\circ$ à $\omega_{0db} = 3.23rad/s$ et un dépassement de 61.9%.
- ▶ On place la constante de temps du I avant le point critique $T_i = 3 \gg 1/3.23$. Le correcteur devient $C(s) = 2 \frac{1 + 3s}{3s}$.
- ▶ L'erreur en régime permanent est maintenant nul mais la nouvelle marge de phase est de $M_\phi = 12.9^\circ$ à $\omega_{0db} = 3.24rad/s$. Il s'agit ensuite de placer la constante de temps de la partie D avant le point critique de façon à laisser le temps au correcteur de remonter la phase jusqu'à obtenir une marge satisfaisante : $T_i \gg T_d = 0.4 > 1/3.24$. On obtient $M_\phi = 70.4^\circ$.
- ▶ Pour finir, afin de synthétiser un correcteur réalisable et pour mieux filtrer le bruit, on ajoute un filtre avec une constante de temps relativement faible $T_f = 0.1 < 1/3.24$. Il en résulte $M_\phi = 45.9^\circ$, ce qui reste satisfaisant.

Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ($C(s)G(s)$)

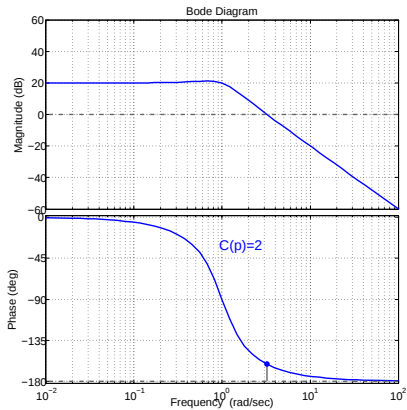


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ($C(s)G(s)$)

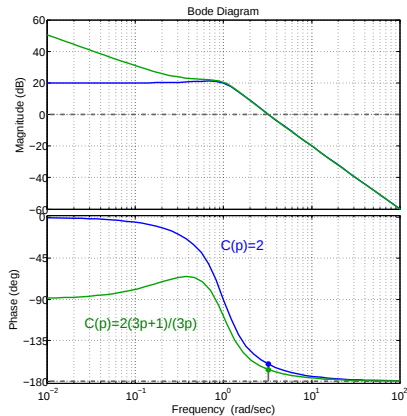


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ($C(s)G(s)$)

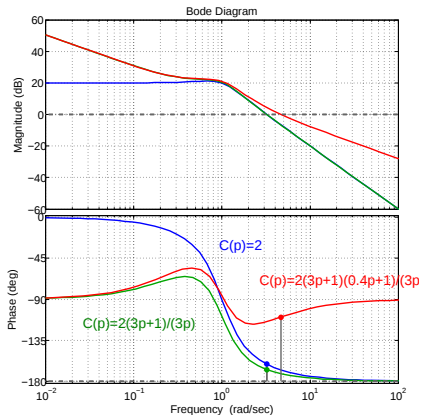
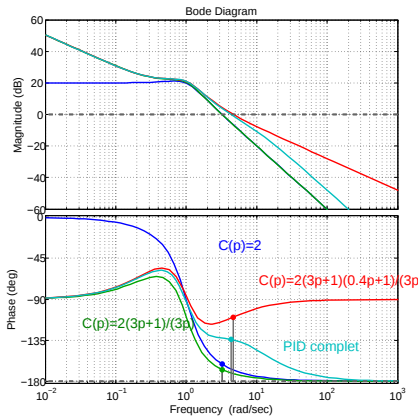


Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ($C(s)G(s)$)



Réponses temporelles de la BF à un échelon unité

