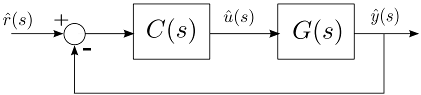
# Chapitre 4 : Stabilité et performances d'un asservissement

Yassine ARIBA



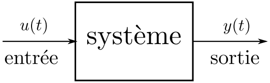

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE
LAAS CNRS

version : 6-2023

# Sommaire

# Sommaire

Soit un système à commander :




Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif ?

$\Rightarrow$ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs ?

**Vu au chapitre 3**

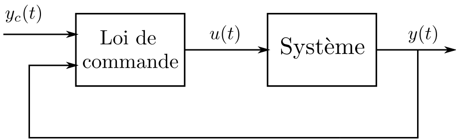
$\Rightarrow$ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

**Vu au chapitre 2**

$\Rightarrow$ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

$\Rightarrow$ $u(t)$ donné *automatiquement* par la loi de commande en boucle fermée

Principe fondamental en Automatique : la commande en **boucle fermée**




Question : comment déterminer la loi de commande ?

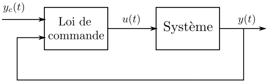
... on verra au dernier chapitre... avant ça

Question : pour une loi donnée, qu'est-ce que ça change ? qu'est-ce qui se passe ?

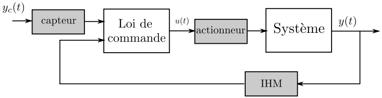
$\Rightarrow$ il faudrait analyser le système en BF avec ce qu'on a déjà vu

# QCM interactif

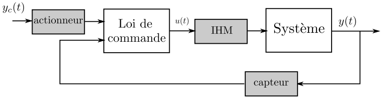
Principe théorique de la commande en boucle fermée



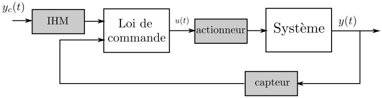

Quels sont les organes matériels nécessaires ?



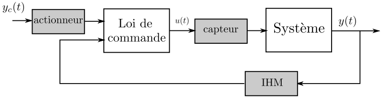

(A)




(B)



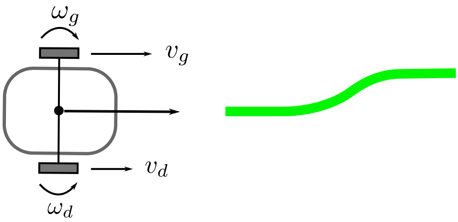

(C)



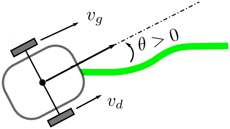

(D)

## Exemple : problème de suivi de ligne

Un robot mobile, à deux roues motrices, doit suivre une ligne de référence




- Moyen d'action : rotation des deux moteurs $\omega_d$ et $\omega_g$
- Vitesses linéaires résultantes : $v_d = r\,\omega_d$ et $v_g = r\,\omega_g$
- Mesure présence ligne : LED + photodiode ou caméra



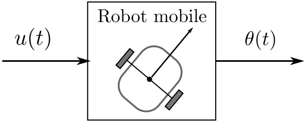

Identification des signaux entrée/sortie

Décomposition de la vitesse :

- vitesse d'avancement : $v_0$
- vitesse différentielle pour rotation : $u$

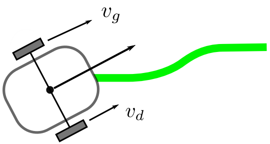
$$v_d = v_0 + u \qquad \text{et} \qquad v_g = v_0 - u$$

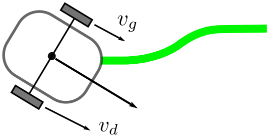
Mesure de l'angle de déviation $\theta$



# Une $1^{\text{ière}}$ stratégie simple

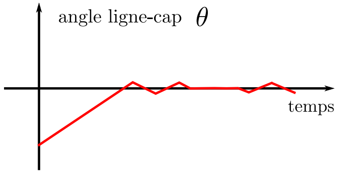
- Si cap aligné $\longrightarrow$ on impose $v_g = v_d$ donc $u = 0$
- Si cap à gauche $\longrightarrow$ on impose $v_g > v_d$ donc $u < 0$
- Si cap à droite $\longrightarrow$ on impose $v_g < v_d$ donc $u > 0$

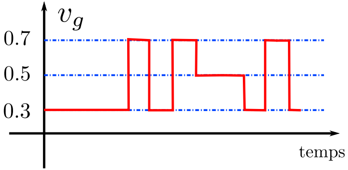


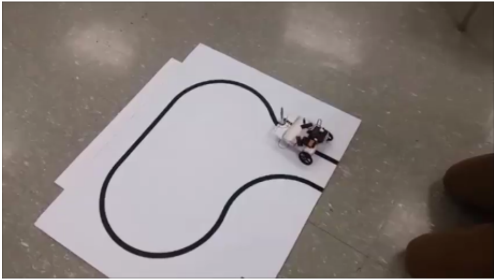
Intuitivement, quel sera le comportement ?

(par exemple pour $v_0 = 0.5\ m/s$ et $u = 0.2\ m/s$)



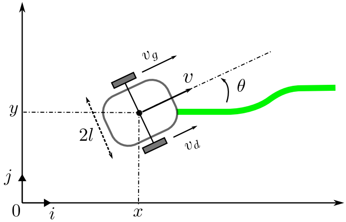

- présence d'oscillations ou chattering
- fortes sollicitations des moteurs
- quelle valeur pour $u$ ?
- avantage : stratégie très simple à mettre en oeuvre.



Miro et Frederick, Line Follower "Bang-Bang" Algorithm - YouTube

## $2^{nde}$ stratégie

Modélisons le système




vitesse longitudinale :

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_d + v_g}{2} \\ &= \frac{(v_0 + u) + (v_0 - u)}{2} \\ &= v_0 \end{aligned}$$

vitesse de rotation :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v_d - v_g}{2l} \\ &= \frac{(v_0 + u) - (v_0 - u)}{2l} \\ &= \frac{u}{l} \end{aligned}$$

Quelle relation entre $u(t)$ et $\theta(t)$ ?

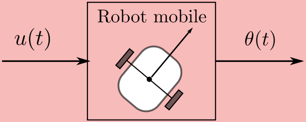
Or $\quad \omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

On obtient un modèle cinématique simple

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{l}\, u(t)$$

soit la fonction de transfert

$$\hat{\theta}(s) = \frac{1}{s\, l}\, \hat{u}(s)$$



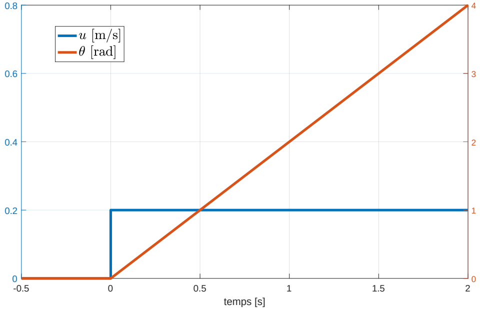

★ Quelle est la réponse indicielle de $\theta$ ? stabilité ?

★ Comment agir sur $u$ pour que $\theta$ converge vers 0 ?

Réponse à un échelon d'amplitude $u(t) = 0.2\ m/s$ pour $t \geq 0$

$$\hat{\theta}(s) = \frac{0.2}{s^2 l} \qquad \Rightarrow \qquad \theta(t) = \frac{0.2}{l} t$$

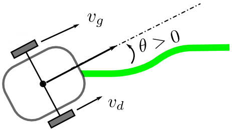
(simulation pour $l = 10$ cm)



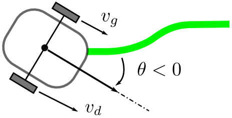

Fonction de transfert avec 1 pôle : 0 ⇒ système en BO instable (prévisible ?)

## Intuitivement

- Si cap à gauche $\longrightarrow$ il faut $v_g > v_d \Rightarrow u < 0 \Rightarrow \dot{\theta} < 0 \Rightarrow \theta \searrow$




- Si cap à droite $\longrightarrow$ il faut $v_g < v_d \Rightarrow u > 0 \Rightarrow \dot{\theta} > 0 \Rightarrow \theta \nearrow$




★ Plutôt que de fixer $u$ constant, calculons $u$ en proportion de l'écart angulaire :

$$\Rightarrow u(t) = -k\,\theta(t) \qquad (k > 0)$$

Loi de commande :

$\longrightarrow$ choix de la vitesse à imposer : $u(t) = -k\,\theta(t) \qquad (k > 0)$

Le modèle du comportement devient :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{u(t)}{I} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta}(t) = -\frac{k}{I}\theta(t)$$

Soit une équation différentielle d'ordre 1 :

$$\dot{\theta}(t) + \frac{k}{I}\theta(t) = 0$$

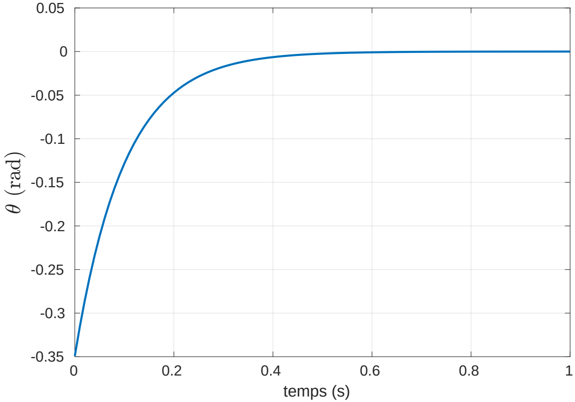
Que l'on sait résoudre facilement :

$$\theta(t) = \theta(0)\, e^{-\frac{k}{I}t}$$

Réponse temporelle :

$$\theta(t) = \theta(0)\, e^{-\frac{k}{l} t}$$

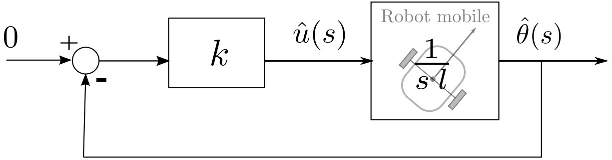
Simulation pour $l = 10$ cm, $k = 1$ et $\theta(0) = -0.35$ rad.



Loi de commande :

$\longrightarrow$ expression temporelle : $u(t) = -k\,\theta(t) \qquad (k > 0)$

$\longrightarrow$ expression domaine de Laplace : $\hat{u}(s) = -k\,\hat{\theta}(s) \qquad (k > 0)$




Commande en boucle fermée avec une correction proportionnelle

Étudions l'asservissement

- Fonction de transfert en boucle fermée :

$$F(s) = \frac{1}{\frac{I}{k}s + 1}$$

- Pôle : $p_1 = -k/I \quad \Rightarrow \quad$ asservissement stable pour $k > 0$

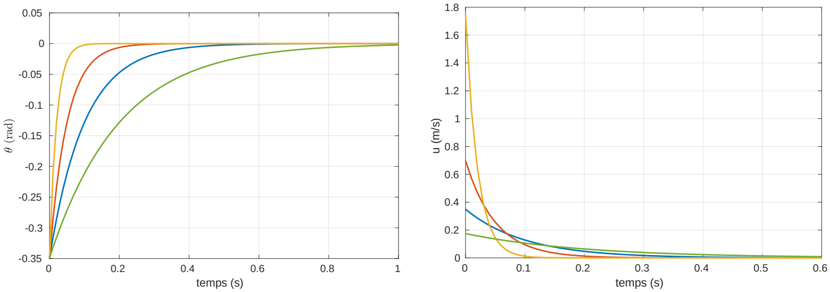
- Réponse à une condition initiale $\theta_0$ :

$$\hat{\theta}(s) = \frac{\theta_0}{\frac{I}{k}s + 1} \qquad \Rightarrow \qquad \theta(t) = \theta_0 \; e^{-\frac{k}{I}t}$$

⚠ $\neq$ **réponse échelon**

$\Rightarrow$ si $k \nearrow$ le temps de réponse $\searrow$

Simulations pour $k = \{0.5, 1, 2, 5\}$.




- la réponse converge vers 0
- il n'y a pas de commutations rapides comme avec la 1^er^ stratégie
- on peut contrôler la dynamique avec le paramètre $k$
- on observe bien que si $k \nearrow$
  - le temps de réponse $\searrow$
  - mais la vitesse à imposer $\nearrow$

Illustration résultat avec loi de commande PID

$$u(t) = -k_p\theta(t) - k_i \int_0^t \theta(\tau)\, d\tau - k_d \frac{d\theta(t)}{dt}$$

GeekTechnophiles, How To Make Line Follower Robot Using PID Controller
YouTube

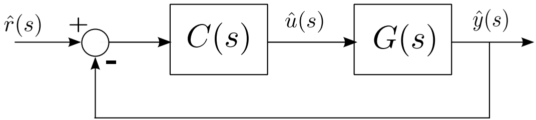
**Quelques remarques générales :**

- Attention à ne pas confondre avec l'Automatisme ou l'informatique industrielle.
- Composante Mathématiques appliquées importante.
- Pluridisciplinaire par ses applications.
- L'Automatique est une science cachée ?

# Sommaire

# Stabilité d'un asservissement

Comment analyser la stabilité d'un système asservi ?




**Méthodes :**

- Ecrire la fonction de transfert globale équivalente $F(s) = \dfrac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$,

  $\Rightarrow$ Appliquer l'une des deux méthodes vues précédemment.

- Critère du revers (critère graphique).

> Si le système en boucle ouverte est stable et à minimum de phase (pôles et zéros à partie réelle strictement négative) alors le <u>système asservi</u> est stable si et seulement si le point critique $(-1\ ,\ 0)$ est laissé à gauche quand on parcourt le lieu de transfert de la <u>boucle ouverte</u> dans le plan de Nyquist dans le sens des $\omega$ croissants.

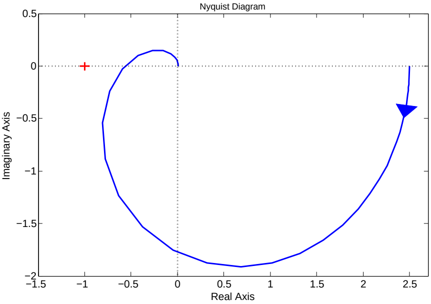
INSA TOULOUSE

## Exemple 1 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{10}{10s^2 + 18s + 8} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}.$$

Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en <u>boucle ouverte</u> $C(s)G(s)$.



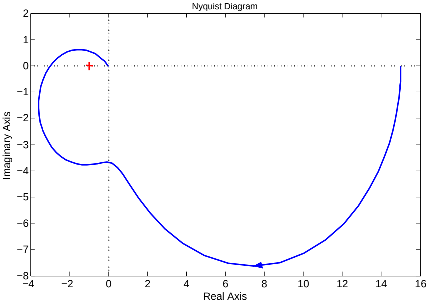

$\Rightarrow$ le système en <u>boucle fermée</u> est stable.

## Exemple 2 :

Les fonctions de transfert du procédé et du correcteur sont de la forme

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 0.4s + 1} \quad \text{et} \quad C(s) = \frac{s+3}{10s+1}.$$

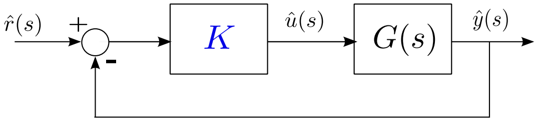
Traçons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $C(s)G(s)$.




$\Rightarrow$ le système en boucle fermée est instable.

# Lieu des racines

Le lieu des racines, ou **lieu d'Evans** est le lieu des pôles en boucle fermée quand le gain de boucle $K$ varie




- Représentation des racines de l'équ caractéristique dans le plan complexe.

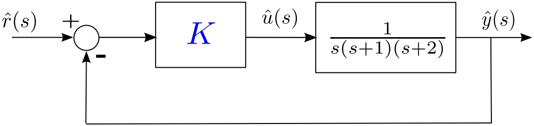
$$1 + KG(s) = 0$$

- Se traduit par 2 conditions : en angle et en amplitude

$$\arg\left[KG(s)\right] = \pm\pi \mod 2\pi \qquad \text{et} \qquad |KG(s)| = 1$$

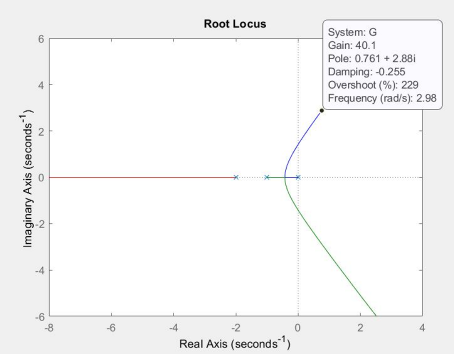
- Il existe des règles de construction mais nous utiliserons Matlab dans ce cours (`rlocus`)
- Stabilité de la BF pour la partie du lieu dans le demi-plan gauche.

## Exemple



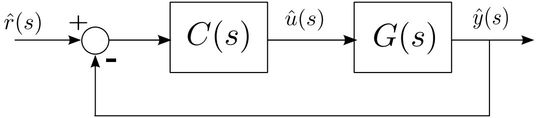

Outil Matlab :

```
» G = tf(1,[1 3 2 0]);
» rlocus(G);
```



# Performance d'un asservissement

Il existe différents critères pour caractériser un asservissement.




En plus de la stabilité, d'autres propriétés peuvent être intéressantes :

- **la précision**.
- **la rapidité**.
- **la marge de stabilité**.

# Sommaire

# Précision

La précision est determinée par l'**erreur d'asservissement** en régime permanent :

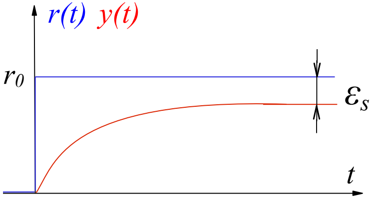
$$\varepsilon(t) = r(t) - y(t) \text{ lorsque } t \to \infty$$

On définit :

- **erreur statique** $\varepsilon_s$

Lorsque l'entrée est un échelon

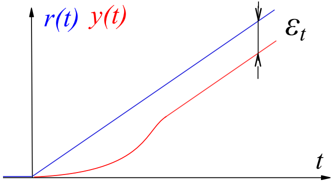
$$r(t) = r_0, \quad \forall t \geq 0$$



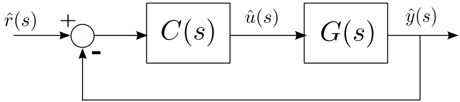

- **erreur de trainage** $\epsilon_t$

Lorsque l'entrée est une rampe

$$r(t) = r_0 t, \quad \forall t \geq 0$$



L'erreur en régime permanent s'exprime par $\lim_{t\to\infty} r(t) - y(t)$.




Selon le théorème de la valeur finale $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\,\hat{\varepsilon}(s)$.

En pratique, on utilise la transformée de Laplace :

$$\hat{\varepsilon}(s) \;=\; \hat{r}(s) - \hat{y}(s) \;=\; \Big(1 - F(s)\Big)\hat{r}(s)$$

où $F(s) = \dfrac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$ est la fonction de transfert en boucle fermée.

**Exemple 1 :** $G(s) = \dfrac{10}{s+20}$

Quelques calculs donnent : $F(s) = \dfrac{10}{s+30}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \dfrac{s+20}{s+30}\hat{r}(s)$.

On en déduit :

$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s\to 0} s\,\frac{s+20}{s+30}\,\frac{r_0}{s} = \frac{2}{3}r_0,$$

$$\text{erreur de trainage } \epsilon_t = \lim_{s\to 0} s\,\frac{s+20}{s+30}\,\frac{r_0}{s^2} = +\infty.$$

**Exemple 2 :** $G(s) = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

Quelques calculs donnent :

$F(s) = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2(K+1)}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \dfrac{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2(K+1)}\hat{r}(s)$.

On en déduit :

$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s\to 0} s\left(1-F(s)\right)\frac{r_0}{s} = \frac{1}{K+1}r_0,$$

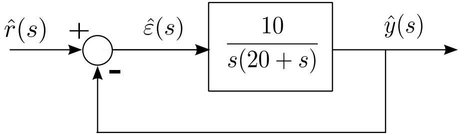
$$\text{erreur de trainage } \varepsilon_t = \lim_{s\to 0} s\left(1-F(s)\right)\frac{r_0}{s^2} = +\infty.$$

**Régles générales :**

- Un gain statique élevé en boucle ouverte permet d'obtenir une erreur de position (en asservissement) plus faible.
- Loi des intégrateurs : l'erreur en régime permanent, pour une entrée $\hat{r}(s)$, est nulle si la boucle ouverte comprend au moins autant d'intégrateurs que le signal $\hat{r}(s)$.

- S'il n'y a pas d'intégrateur pur dans la FTBO, l'erreur de position est finie et l'erreur de trainage est infinie.
- S'il y a un intégrateur pur dans la FTBO, l'erreur de position est nulle et l'erreur de trainage est finie.
- S'il y a deux intégrateur pur dans la FTBO, l'erreur de position est nulle et l'erreur de trainage est nulle.

**Exemple 3 :**




Quelques calculs donnent : $F(s) = \dfrac{10}{10 + s(20+s)}$ et $\hat{\varepsilon}(s) = \dfrac{s(20+s)}{10+s(20+s)}\hat{r}(s)$.

$$\text{erreur statique } \varepsilon_s = \lim_{s\to 0} s \frac{s(20+s)}{10+s(20+s)} \frac{r_0}{s} = 0,$$

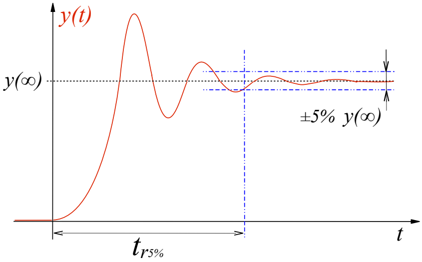
$$\text{erreur de trainage } \varepsilon_t = \lim_{s\to 0} s \frac{s(20+s)}{10+s(20+s)} \frac{r_0}{s^2} = 2r_0.$$

# Sommaire

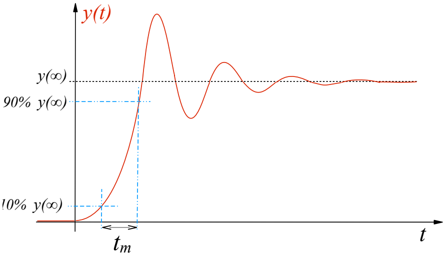
# Rapidité

La performance en rapidité d'un asservissement est caractérisée par le temps de réponse et le temps de monté.

**Le temps de réponse** est le temps mis par le signal de sortie pour atteindre sa valeur finale à $n$% prés (souvent 5%) sans ressortir de cet intervalle.




**Le temps de montée** correspond à l'intervalle de temps dans lequel la sortie passe de 10% à 90% de la valeur finale.



# Sommaire

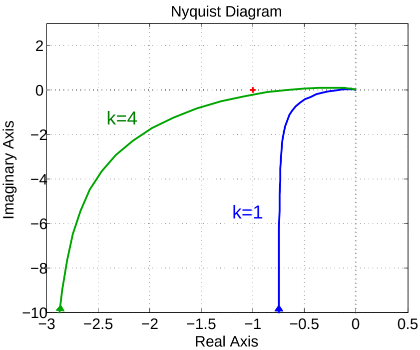
# Marges de stabilité

Soit le système à commander : $G(s) = \dfrac{k}{s(s+1)(s+2)}$.

Stabilité du système asservi $F(s) = \dfrac{k}{s(s+1)(s+2)+k}$ ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 2 | 0 |
| $s^2$ | 3 | $k$ | 0 |
| $s^1$ | $\dfrac{6-k}{3}$ | 0 | |
| $s^0$ | $k$ | | |

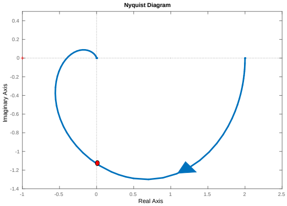
$\Rightarrow$ système stable si $0 < k < 6$.



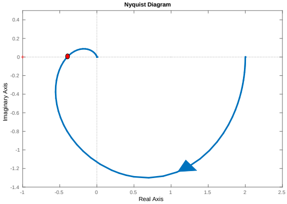

★ Notion de **marges de stabilité** : quantifient "l'éloignement"par rapport au seuil critique d'instabilité.

# QCM interactif

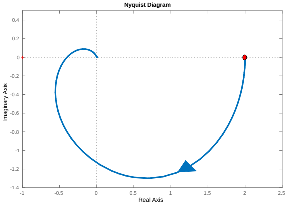
Dans la représentation de Nyquist, quel est le point du lieu pour lequel la fonction de transfert $G(j\omega)$ déphase de $-180°$ ?



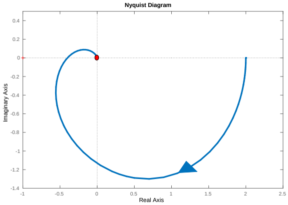

(A)




(B)



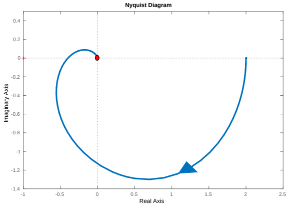

(C)



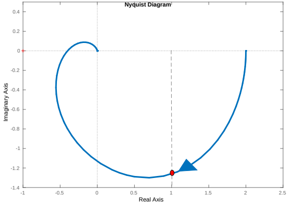

(D)

# QCM interactif

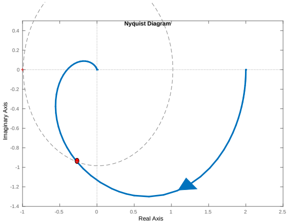
Dans la représentation de Nyquist, quel est le point du lieu pour lequel la fonction de transfert $G(j\omega)$ a un gain de 0dB ?



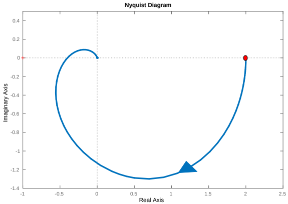

(A)




(B)




(C)




(D)

# Marge de gain

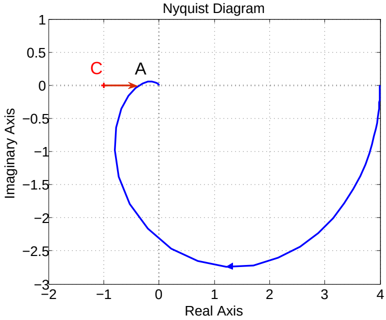
La marge de gain se définit comme le gain qu'il faut apporter au système en boucle ouverte pour déstabiliser le système asservi (en boucle fermée).

**Mesure :**

La marge de gain d'un système asservi est donnée par la formule :

$$\Delta G \;=\; -20\log|G(j\omega_{-\pi})|$$

où $\omega_{-\pi}$ est la pulsation pour laquelle la FTBO $G(j\omega)$ est déphasé de $-180^\circ$.



# Marge de phase

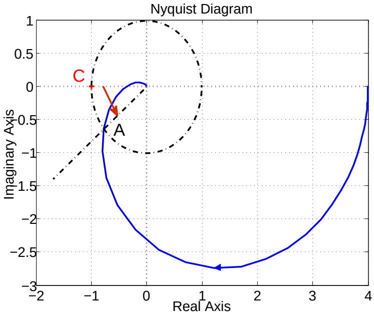
La marge de phase se définit comme le déphasage qu'il faut apporter au système en boucle ouverte pour déstabiliser le système asservi (en boucle fermée).

**Mesure :**

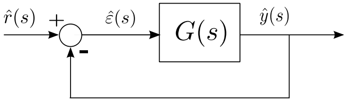
La marge de phase d'un système asservi est donnée par la formule :

$$\Delta\phi \;=\; \pi + argG(j\omega_{\mathbf{0}dB})$$

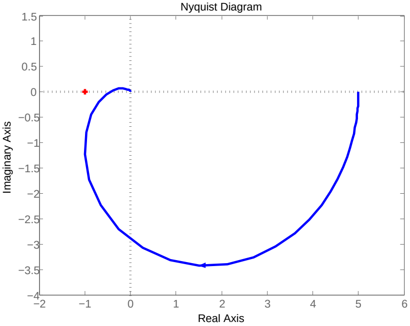
où $\omega_{\mathbf{0}dB}$ est la pulsation pour laquelle la FTBO $G(j\omega)$ a un gain unitaire (0 en décibel).



**Exemple 1 :** Soit l'asservissement suivant




avec $G(s) = \dfrac{5}{s^3 + 3.5s^2 + 3.5s + 1}$. L'asservissement est-il stable ?




$\Rightarrow$ Par application du critère du revers : stable

Quelle est sa marge de stabilité ?

Des mesures sur le lieu de $G(s)$ dans Bode ou Nyquist donnent

- $|G(j\omega)| = 1$ pour la pulsation $\omega = 1.24\ rad/s$,
- $\arg\Big(G(j\omega)\Big) = -180°$ pour la pulsation $\omega = 1.87\ rad/s$.

Calculs des marges

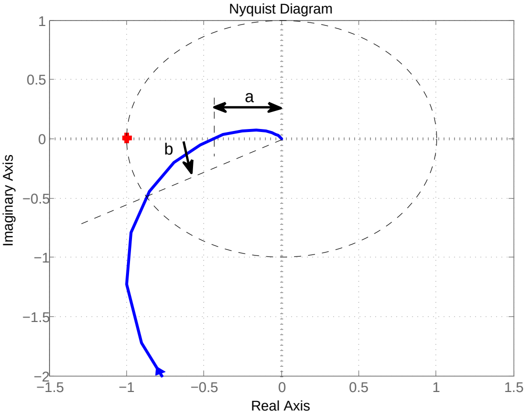
- marge de gain :

$$\begin{aligned}\Delta G &= -20\log\frac{5}{|(jw)^3 + 3.5(jw)^2 + 3.5(jw) + 1|}, \text{ avec } \omega = 1.87 \\ &= 7.04\ dB\end{aligned}$$

- marge de phase :

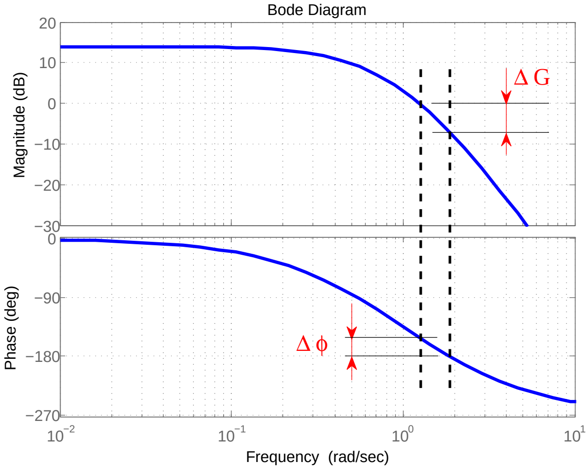
$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \pi + \arg\frac{5}{(jw)^3 + 3.5(jw)^2 + 3.5(jw) + 1}, \text{ avec } \omega = 1.24 \\ &= 0.51\ rad\ \ (29.2\ deg)\end{aligned}$$

Celles-ci peuvent aussi être directement mesurées sur le lieu de Nyquist de $G(s)$

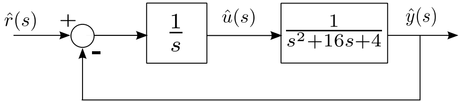



- distance $a \simeq 0.44$ : marge de gain $\Delta G = 20\log(a) \simeq 7.05\ dB$.
- angle $b \simeq 29$ : marge de gain $\Delta\phi = b \simeq 29\ deg$.

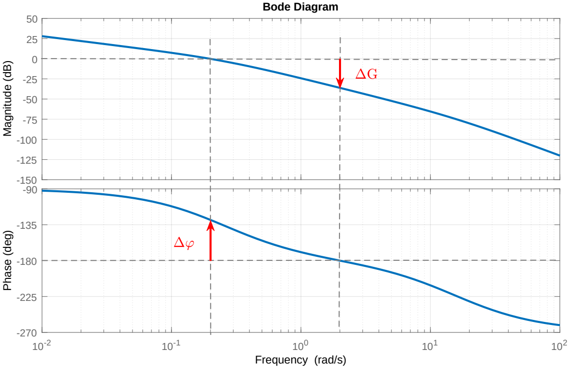
Ou encore, sur le diagramme de Bode de $G(s)$



**Exemple 2 :**




Le système est stable en BF. Quelles sont les marges ?




$\Rightarrow$ marge de gain $\Delta G = 36\ dB$ et marge de phase $\Delta\varphi = 51$ deg