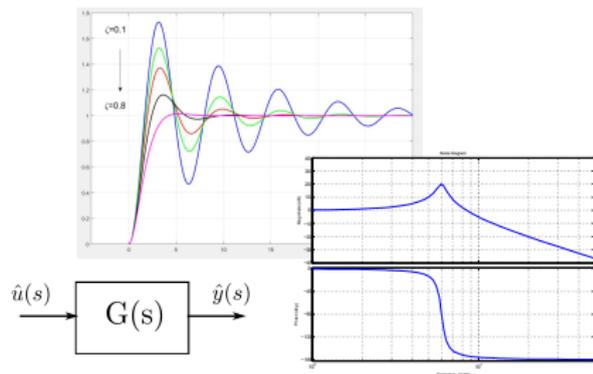


# Chapitre 3 : Réponse d'un système

Yassine ARIBA



# Sommaire

---

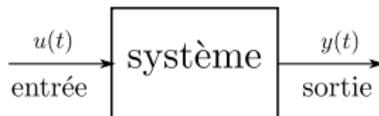
- ➊ Réponse temporelle
- ➋ Notion de stabilité
- ➌ Réponse fréquentielle
- ➍ Résumé

# Sommaire

---

- ① Réponse temporelle
- ② Notion de stabilité
- ③ Réponse fréquentielle
- ④ Résumé

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour atteindre cet objectif ?

⇒ il faut donner des valeurs précises à  $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs ?

⇒ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à  $u(t)$

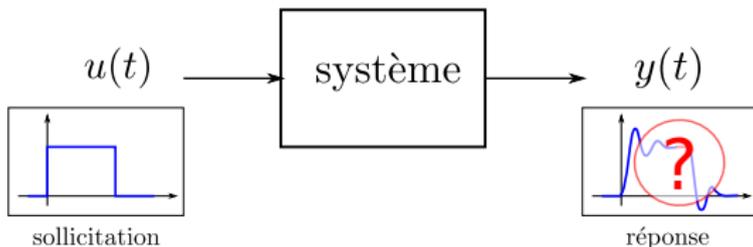
↔ pour un  $u(t)$  donné, peut-on calculer  $y(t)$  ?

**Vu au précédent chapitre**

⇒ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

## Réponse temporelle

Calcul explicite de la sortie  $y(t)$  à une entrée  $u(t)$  donnée.



⇒ revient à résoudre l'équation différentielle du modèle

### Résolution avec les fonctions de transfert :

1. Exprimer la sortie  $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$
2. Effectuer une décomposition en éléments simples de  $\hat{y}(s)$
3. Appliquer la transformée de Laplace inverse (à l'aide de la table)

$$\hat{y}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) \quad \text{pour obtenir le signal dans le domaine temporel}$$

## Décomposition en éléments simples

### Objectif :

transformer une fraction rationnelle en une somme de fractions simples =  $\frac{\text{constante}}{(s - \alpha)^m}$

### Théorème

Soit un polynôme  $P$  a  $n$  racines  $\alpha_i$  de multiplicité  $m_i$  de la forme

$$P = \lambda(s - \alpha_1)^{m_1} (s - \alpha_2)^{m_2} \cdots (s - \alpha_n)^{m_n} \quad \alpha_i \in \mathbb{C} \quad m_i \in \mathbb{N}^*$$

Soit un polynôme  $Q$  de degré  $< \deg(P)$ . Il existe une unique décomposition telle que

$$F = \frac{Q}{P} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{ik}}{(s - \alpha_i)^k}$$

Les coefficients  $A_{ik}$  sont des constantes complexes.

- ▶  $P$  et  $Q$  ne doivent pas avoir de racines communes
- ▶ Si  $\deg(Q) \geq \deg(P)$ , division euclidienne des polynômes à faire au préalable

► **Cas d'une racine simple :**

La fraction  $F$  s'écrit donc :  $F = \frac{A_{11}}{(s - \alpha_1)} + G$

$G$ , le reste de la fraction (sans pôle  $\alpha_1$ ). Coefficient  $A_{11}$  donné par

$$A_{11} = (s - \alpha_1)F(s) \Big|_{s=\alpha_1}$$

► **Cas d'une racine double :**

La fraction  $F$  s'écrit donc :  $F = \frac{A_{11}}{(s - \alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(s - \alpha_1)^2} + G$

$G$ , le reste de la fraction (sans pôle  $\alpha_1$ ). Les coefficients sont donnés par

$$A_{12} = (s - \alpha_1)^2 F(s) \Big|_{s=\alpha_1}$$

$$A_{11} = \frac{d}{ds} \left[ (s - \alpha_1)^2 F(s) \right] \Big|_{s=\alpha_1}$$

► **Cas d'une racine multiple ( $> 2$ ) :**

La fraction  $F$  s'écrit donc :

$$F = \frac{A_{11}}{(s - \alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(s - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1m}}{(s - \alpha_1)^m} + G$$

$G$ , le reste de la fraction (sans pôle  $\alpha_1$ ). Les coefficients sont donnés par

$$A_{1m} = (s - \alpha_1)^m F(s) \Big|_{s=\alpha_1}$$

$$A_{1(m-1)} = \frac{d}{ds} \left[ (s - \alpha_1)^m F(s) \right] \Big|_{s=\alpha_1}$$

$$A_{1(m-2)} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[ (s - \alpha_1)^m F(s) \right] \Big|_{s=\alpha_1}$$

⋮

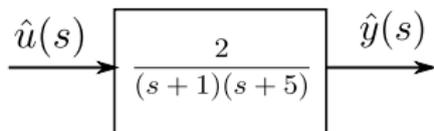
$$A_{11} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[ (s - \alpha_1)^m F(s) \right] \Big|_{s=\alpha_1}$$

## Exemple 1

Calculons la réponse du système suivant à un échelon unité  $u(t) = 1, \forall t \geq 0$  :

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 5y(t) = 2u(t)$$

► calcul de la fonction de transfert



► exprimons le signal de sortie

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{(s+1)(s+5)} \hat{u}(s) = \frac{2}{(s+1)(s+5)} \frac{1}{s}$$

## Exemple 1

- la réponse se décompose en

$$\hat{y}(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+5}$$

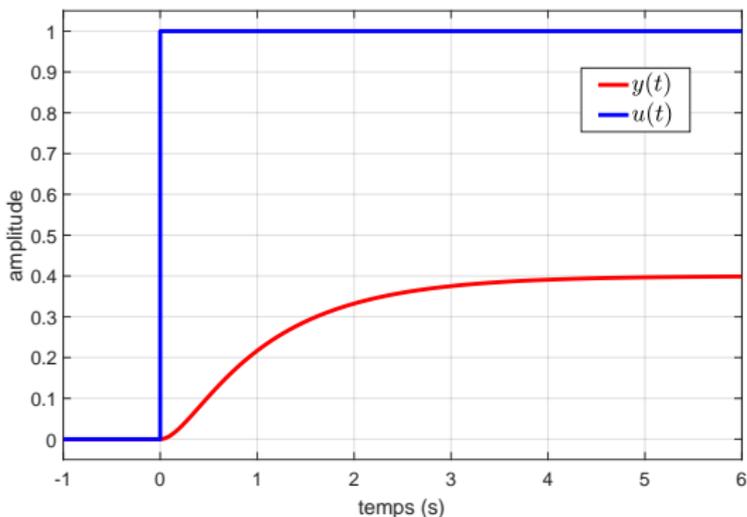
- calcul des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = s \overbrace{\frac{2}{(s+1)(s+5)}}^{\hat{y}(s)} \frac{1}{s} \Big|_{s=0} = \frac{2}{5} \\ A_2 = (s+1)\hat{y}(s) \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{2} \\ A_3 = (s+5)\hat{y}(s) \Big|_{s=-5} = \frac{1}{10} \end{array} \right.$$

## Exemple 1

► à l'aide de la table, nous obtenons la réponse temporelle

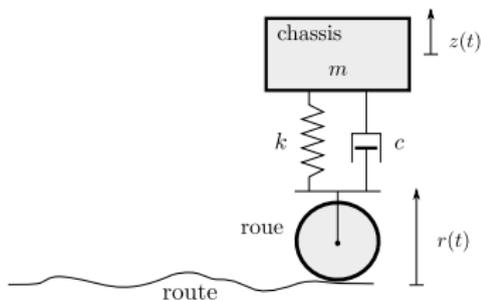
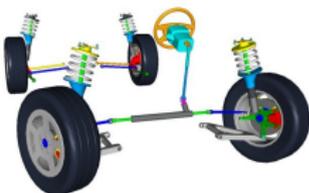
$$y(t) = \frac{2}{5} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{10}e^{-5t}$$



## Exemple 2

Suspension d'un véhicule

(modèle quart de véhicule simplifié)



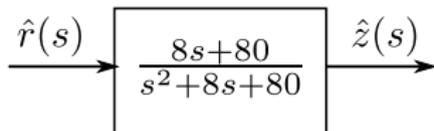
équation dynamique :

$$m\ddot{z} = k(r - z) + c(\dot{r} - \dot{z})$$

## Exemple 2

Calcul de la fonction de transfert  $\hat{z}(s) = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k} \hat{r}(s)$

avec  $m = 250 \text{ kg}$ ,  $k = 20000 \text{ N.m}^{-1}$  et  $c = 2000 \text{ N.s.m}^{-1}$



► Calculons la réponse à un échelon de 1cm

$$\hat{z}(s) = \frac{8s + 80}{s^2 + 8s + 80} \frac{0.01}{s} = \frac{0.08s + 0.8}{s(s + 4 + 8i)(s + 4 - 8i)}$$

## Exemple 2

► la réponse se décompose en

$$\hat{z}(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 4 + 8i} + \frac{A_3}{s + 4 - 8i}$$

► calcul des coefficients :

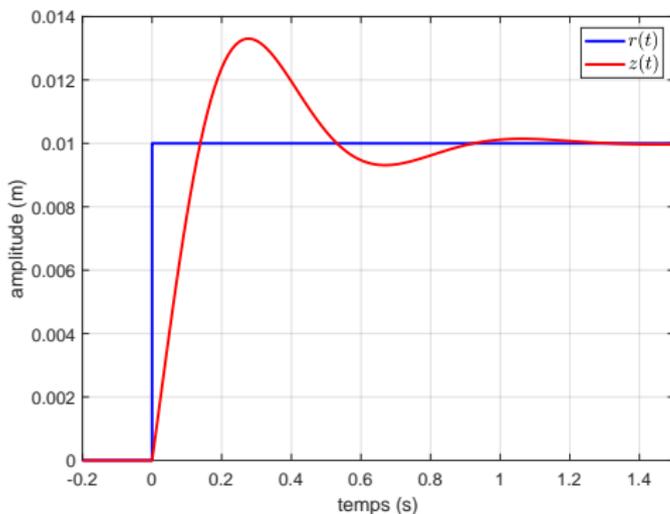
$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = s\hat{z}(s) \Big|_{s=0} = 0.01 \\ A_2 = (s + 4 + 8i)\hat{z}(s) \Big|_{s=-4-8i} = -0.005 + 0.0025i \\ A_3 = (s + 4 - 8i)\hat{z}(s) \Big|_{s=-4+8i} = -0.005 - 0.0025i \end{array} \right.$$

$$\hat{z}(s) = \frac{0.01}{s} + \frac{0.01 s}{s^2 + 8s + 80} = \frac{0.01}{s} + 0.01 \left( \frac{s + 4}{(s + 4)^2 + 8^2} - \frac{1}{2} \frac{8}{(s + 4)^2 + 8^2} \right)$$

## Exemple 2

► à l'aide de la table, nous obtenons la réponse temporelle

$$z(t) = 0.01 - 0.01e^{-4t} \left( \cos(8t) - \frac{1}{2} \sin(8t) \right)$$

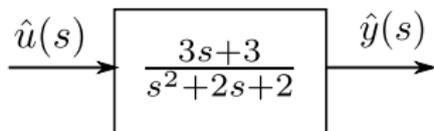


## Exemple 3

Calculons la réponse du système suivant à l'entrée  $u(t) = e^{-2t}$ ,  $\forall t \geq 0$  :

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = 3\dot{u}(t) + 3u(t)$$

► calcul de la fonction de transfert



► exprimons le signal de sortie

$$\hat{y}(s) = \frac{3s+3}{s^2+2s+2} \hat{u}(s) = \frac{3s+3}{(s+1+i)(s+1-i)} \frac{1}{s+2}$$

### Exemple 3

► la réponse se décompose en

$$\hat{y}(s) = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s+1+i} + \frac{A_3}{s+1-i}$$

► calcul des coefficients :

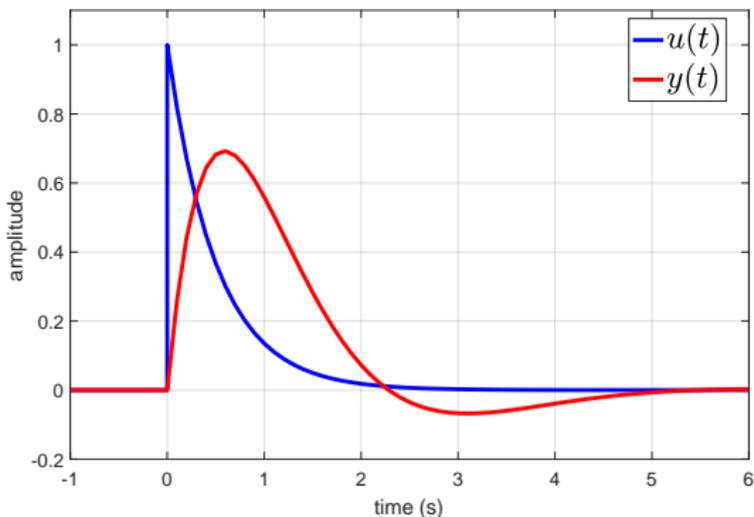
$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = (s+2)\hat{y}(s) \Big|_{s=-2} = -\frac{3}{2} \\ A_2 = (s+1+i)\hat{y}(s) \Big|_{s=-1-i} = \frac{3}{4}(1+i) \\ A_3 = (s+1-i)\hat{y}(s) \Big|_{s=-1+i} = \frac{3}{4}(1-i) \end{array} \right.$$

$$\hat{y}(s) = -\frac{3/2}{s} + \frac{3}{2} \frac{s+2}{s^2+2s+2} = -\frac{3/2}{s} + \frac{3}{2} \left( \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} \right)$$

## Exemple 3

► à l'aide de la table, nous obtenons la réponse temporelle

$$y(t) = -\frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-t}(\cos(t) + \sin(t))$$



## Exemple 4

Moteur à courant continu entraînant une hélice



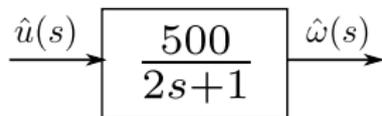
équation dynamique :

$$2\dot{\omega}(t) + \omega(t) = 500u(t)$$

## Exemple 4

Calculons la réponse du système à une rampe  $u(t) = t, \forall t \geq 0$ .

► calcul de la fonction de transfert



► exprimons le signal de sortie

$$\hat{w}(s) = \frac{500}{2s+1} \hat{u}(s) = \frac{250}{s + \frac{1}{2}} \hat{u}(s) = \frac{250}{s + \frac{1}{2}} \frac{1}{s^2}$$

## Exemple 4

- la réponse se décompose en

$$\hat{\omega}(s) = \frac{A_1}{s + \frac{1}{2}} + \frac{A_{21}}{s} + \frac{A_{22}}{s^2}$$

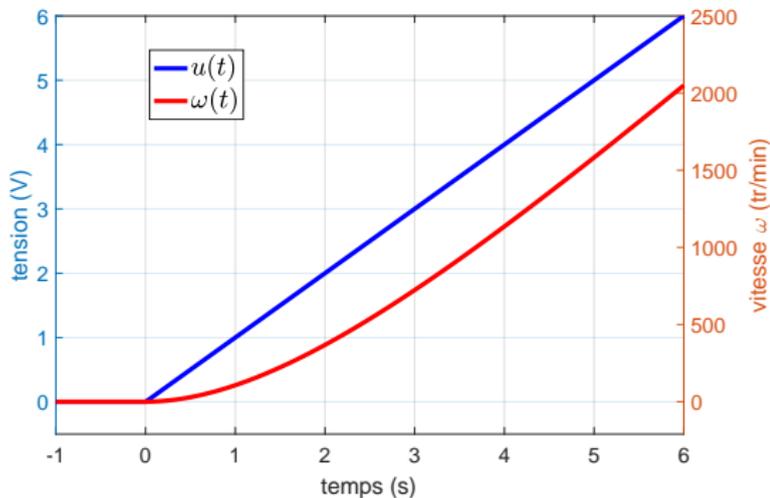
- calcul des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \left. \left( s + \frac{1}{2} \right) \hat{\omega}(s) \right|_{s = -\frac{1}{2}} = 1000 \\ A_{22} = \left. s^2 \hat{\omega}(s) \right|_{s=0} = 500 \\ A_{21} = \left. \frac{d}{ds} \left[ s^2 \hat{\omega}(s) \right] \right|_{s=0} = - \left. \frac{250}{\left( s + \frac{1}{2} \right)^2} \right|_{s=0} = -1000 \end{array} \right.$$

## Exemple 4

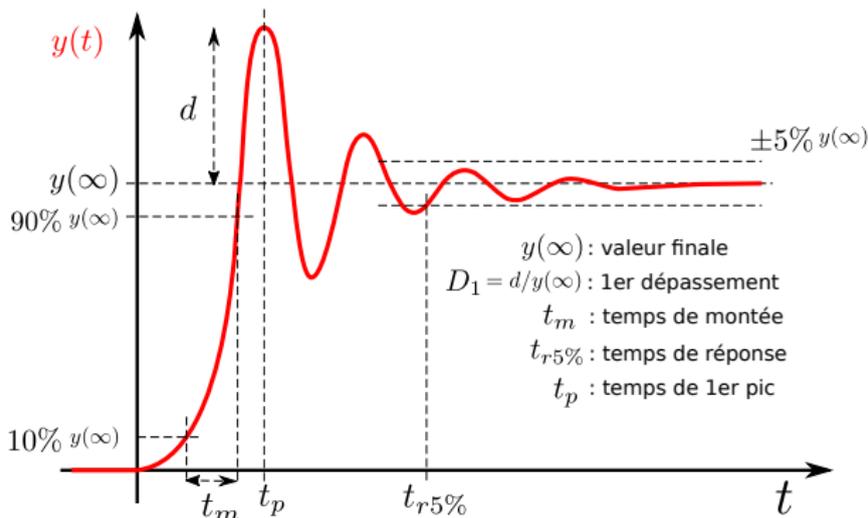
► à l'aide de la table, nous obtenons la réponse temporelle

$$\omega(t) = 1000e^{-\frac{1}{2}t} + 500t - 1000$$



## Caractéristiques temporelles

Certaines caractéristiques du système sont relevés sur la réponse indicielle.



⇒ Ces caractéristiques donnent des indices de performances.

## Cas des systèmes du 1<sup>er</sup> ordre

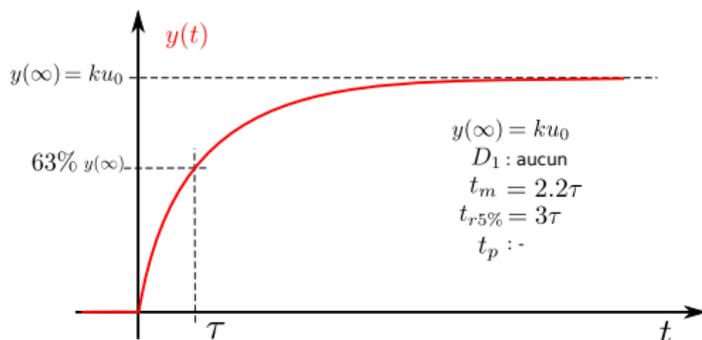
Modèle canonique :

$$\hat{y}(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \hat{u}(s)$$

- ▶  $\tau$  la *constante de temps*
- ▶  $k$  le *gain statique*

Réponse à un échelon d'amplitude  $u_0$  :

$$y(t) = u_0 k \left( 1 - e^{-\frac{1}{\tau} t} \right)$$



## Cas des systèmes du 2<sup>nd</sup> ordre

Modèle canonique :

$$\hat{y}(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \hat{u}(s)$$

- ▶  $\zeta$  le coefficient d'amortissement
- ▶  $\omega_n$  la pulsation propre
- ▶  $K$  le gain statique

3 cas pour la réponse indicielle :

- ▶ cas  $\zeta > 1$  : régime aperiodique,  $p_{1/2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ ,

$$y(t) = Ku_0 \left[ 1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right]$$

- ▶ cas  $\zeta = 1$  : régime critique,  $p_1 = -\omega_n$ ,

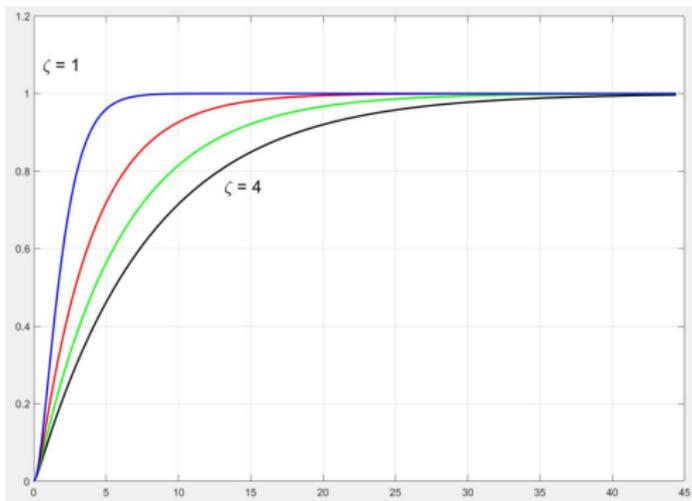
$$y(t) = Ku_0 \left[ 1 - (1 - p_1 t) e^{p_1 t} \right]$$

- ▶ cas  $0 < \zeta < 1$  : régime pseudo-périodique,  $\omega_p = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ ,

$$y(t) = Ku_0 \left[ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos(\omega_p t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_p t) \right) \right]$$

### Cas $\zeta \geq 1$

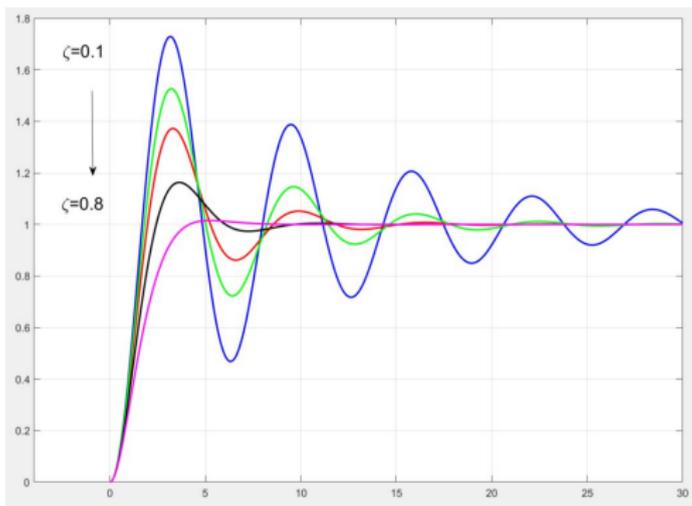
(ici, pour le tracé :  $u_0 = 1$ ,  $K = 1$  et  $\omega_n = 1$ )



- ▶ pas de dépassement
- ▶ quand  $\zeta \searrow$  ou  $\omega_n \nearrow$ , les temps de réponse et de montée  $\searrow$
- ▶ valeur finale  $y(\infty) = Ku_0$

Cas  $0 < \zeta < 1$

(ici, pour le tracé :  $u_0 = 1$ ,  $K = 1$  et  $\omega_n = 1$ )

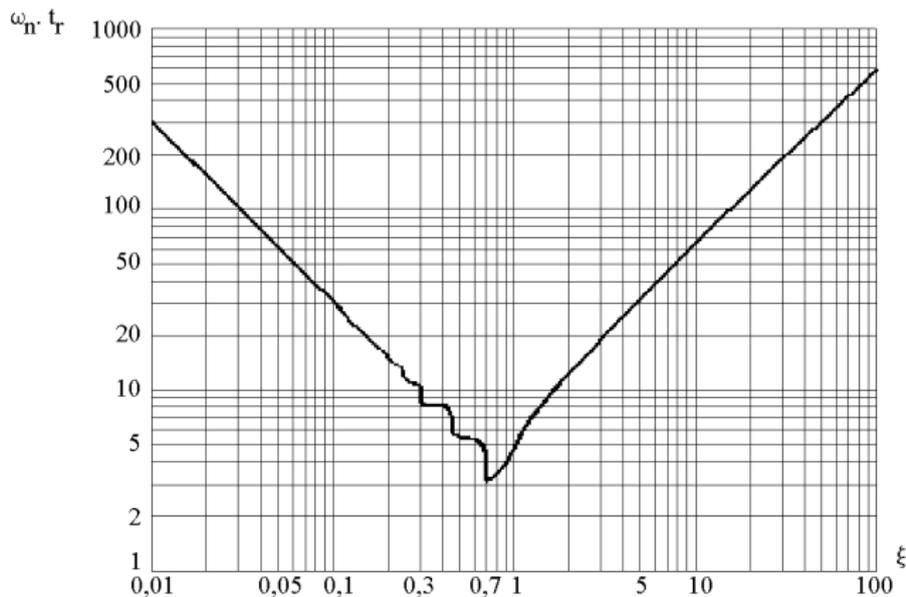


- ▶ dépassement :  $D_1 = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$  à  $t_p = \frac{\pi}{\omega_p}$
- ▶ temps de réponse :  $t_{r5\%} \simeq \frac{3}{\zeta\omega_n}$
- ▶ valeur finale :  $y(\infty) = Ku_0$

## Abaque pour le temps de réponse à 5%

abscisses : coefficient d'amortissement  $\zeta$

ordonnées : temps de réponse réduit  $t_{r5\%} \times \omega_n$



## Exemple 1

Soit le système d'ordre 2

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{s^2 + s + 4} \hat{u}(s)$$

Quelle est l'allure de sa réponse indicielle ?

Identifions ses paramètres caractéristiques :

$$\omega_n = 2$$

$$K = 0.5$$

$$\zeta = 0.25$$

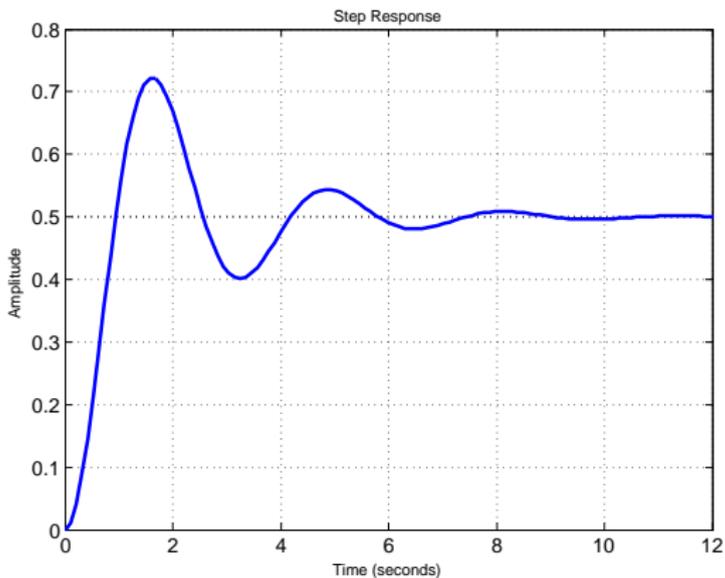
Nous pouvons donc conclure pour la réponse

- ▶ régime pseudo-périodique,
- ▶ valeur finale  $y(\infty) = 0.5$ ,
- ▶ premier dépassement de 44% à  $t = 1.62s$ ,
- ▶ temps de réponse  $t_{r5\%} \simeq 6s$ .

## Exemple 1

Réponse indicielle (par application de la formule) :

$$y(t) = 0.5 \left( 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \left( \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{15}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \right) \right)$$

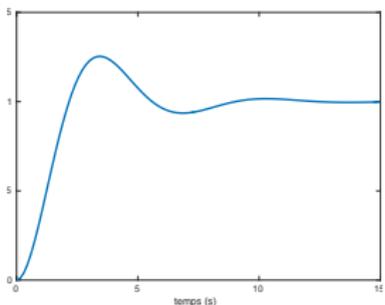


## QCM interactif

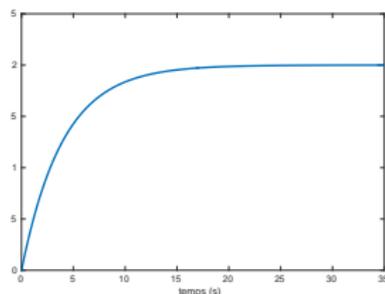
Sans calcul, quelle est la réponse indicielle de l'équation différentielle ?

(avec condition initiale nulle)

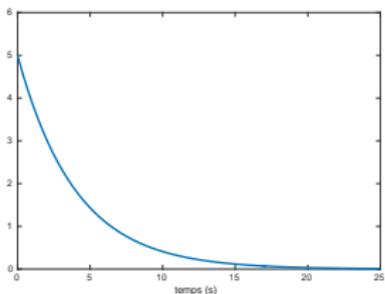
$$4 \dot{y}(t) + y(t) = 2 u(t)$$



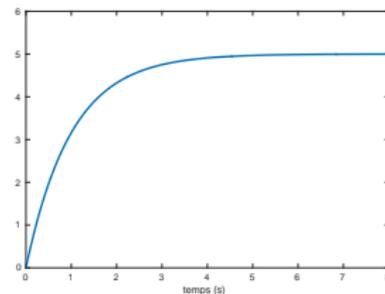
(A)



(B)



(C)



(D)

## QCM interactif

La réponse indicielle de l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

est caractérisée par

- (A) une valeur finale égale à l'amplitude de l'échelon d'excitation
- (B) une valeur finale négative
- (C) l'absence de dépassement
- (D) un régime transitoire pseudo-périodique

## Cas de certains systèmes d'ordre supérieur ( $> 2$ )

Formules et abaques vus précédemment réservés aux systèmes d'ordre 1 et 2...

mais certains systèmes sont *dominés* par une dynamique d'ordre 2 (ou 1)

Soit le système d'ordre 3 :

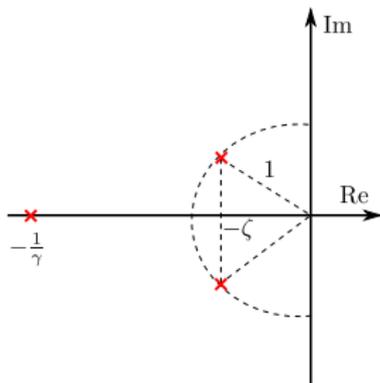
$$T(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta s + 1)(\gamma s + 1)}$$

avec  $0 < \zeta < 1$ ,  $\gamma > 0$ , trois pôles :  $-\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2}$  et  $-1/\gamma$

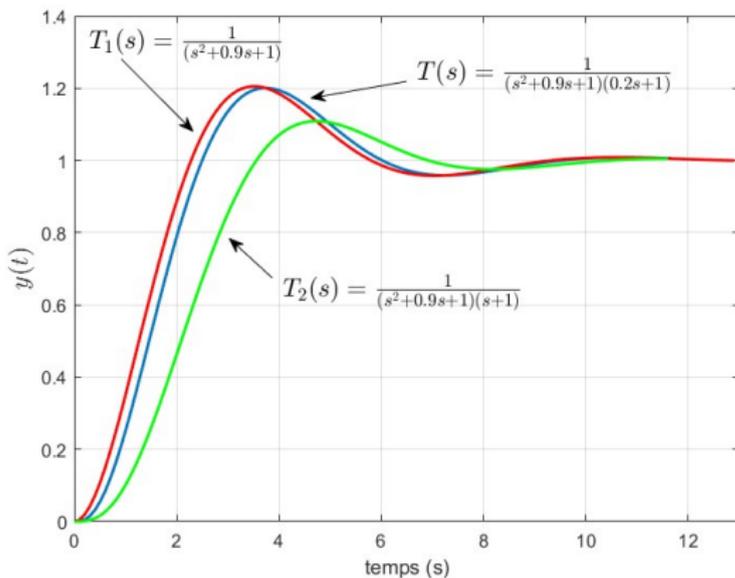
Réponse indicielle :

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{1}{\gamma}t} + c_3 e^{-\zeta t} (\cos(\omega_p t) + c_4 \sin(\omega_p t))$$

avec  $\omega_p = \sqrt{1 - \zeta^2}$



Simulation de la réponse pour  $\zeta = 0.45$  et pour  $\gamma = \{0; 0.2; 1\}$



⇒ Plus  $\gamma$  est petit (mode rapide), plus le sous-système d'ordre 2 est *dominant*

⇒ Un tel 3<sup>ième</sup> ordre est raisonnablement approché par un 2<sup>nd</sup> si

$$\frac{1}{\gamma} \geq 10\zeta\omega_n$$

# Sommaire

---

- ① Réponse temporelle
- ② Notion de stabilité
- ③ Réponse fréquentielle
- ④ Résumé

## Notion de stabilité

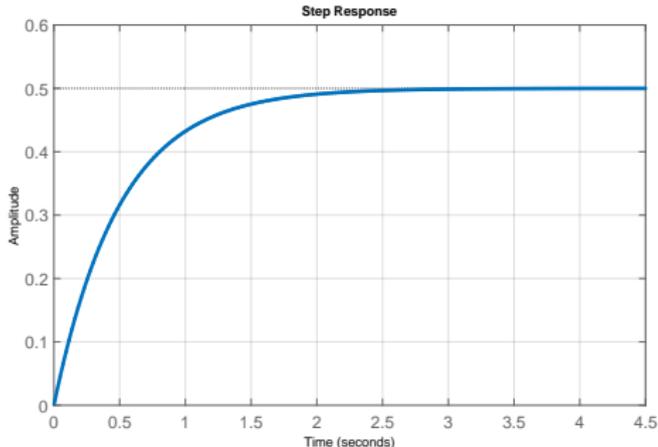
Soit la fonction de transfert

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s + a} \hat{u}(s) \quad a, \text{ un paramètre constant}$$

Réponse à un échelon unité :  $y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$

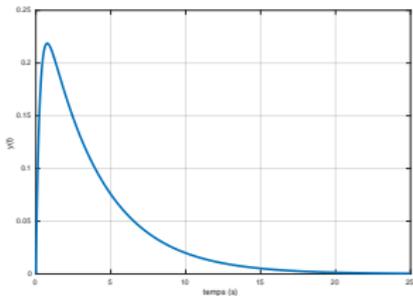
cas  $a > 0$

(ici  $a = 2$ )

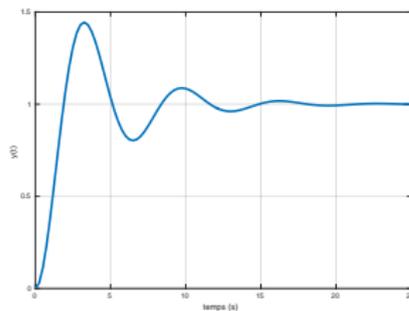


## QCM interactif

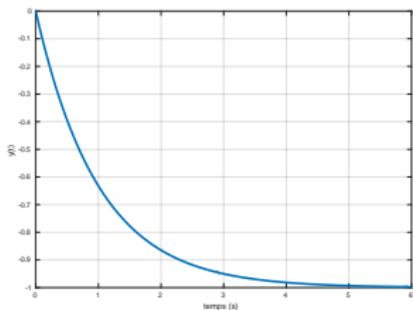
Quelle est la réponse si  $a < 0$  ?



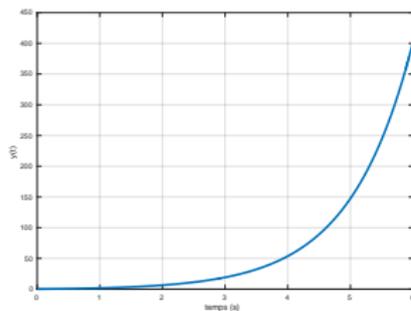
(A)



(B)



(C)



(D)

Réponse : 
$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

Observation de 2 cas :

- ▶ si  $a > 0$ , la réponse converge vers la valeur finale 0.5

$$\hookrightarrow \text{quand } t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-at} \rightarrow 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow 0.5$$

- ▶ si  $a < 0$ , la réponse diverge

$$\hookrightarrow \text{quand } t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-at} \rightarrow \infty \Rightarrow y(t) \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$  notion de **stabilité**

## Remarque

Pôle de la fonction de transfert :  $p_1 = -a$

$\hookrightarrow$  correspond au coefficient dans l'exponentiel

Autre exemple, soit la fonction de transfert

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1} \hat{u}(s) \quad \text{avec } |a| < 2.$$

Réponse à un échelon unité :

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{a}{2}t} \left( \cos \omega_0 t + \frac{a/2}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$$

## Remarque

Pôles de la fonction de transfert :

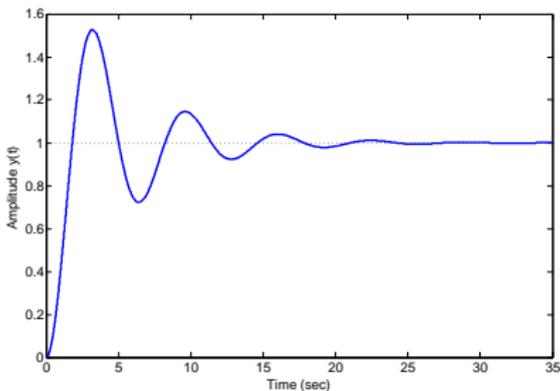
$$p_1 = -\frac{a}{2} + i\sqrt{|a^2 - 4|}/2$$

$$p_2 = -\frac{a}{2} - i\sqrt{|a^2 - 4|}/2$$

↪ le coefficient dans l'exponentiel correspond à la partie réelle

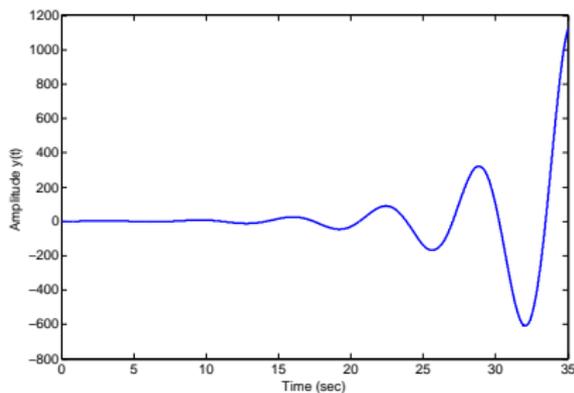
Observation de 2 cas :

cas  $0 < a < 2$



le terme  $e^{-\frac{a}{2}t}$  tend vers 0

cas  $-2 < a < 0$



le terme  $e^{-\frac{a}{2}t}$  tend vers  $+\infty$

## Notion de stabilité

### Définition

Un système est dit **stable** si pour toute entrée bornée la sortie est bornée.

### Théorème

Un système de fonction de transfert  $F(s)$  est **stable** si et seulement si tous les pôles de  $F(s)$  sont à partie réelle strictement négative, c'est-à-dire qu'ils appartiennent au demi-plan gauche du plan complexe.

### Exemples

$$\frac{1}{s-2} \Rightarrow \text{Instable}$$

$$\frac{4}{s+0.5} \Rightarrow \text{Stable}$$

$$\frac{3}{(s+1)(s+3)} \Rightarrow \text{Stable}$$

$$\frac{1}{s(5s+1)} \Rightarrow \text{Instable}$$

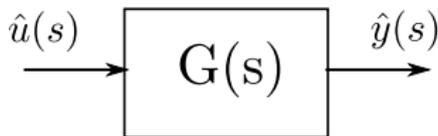
$$\frac{10}{s^2+2s+2} \Rightarrow \text{Stable}$$

$$\frac{2s-1}{(s+1)(s+2)(s-6)} \Rightarrow \text{Instable}$$

## Analyse de la stabilité entrée-sortie

Comment analyser la stabilité d'un système d'entrée  $\hat{u}(s)$  et de sortie  $\hat{y}(s)$  ?

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$



Méthodes :

- ▶ Calcul direct des pôles  $\Rightarrow$  trouver les racines de l'équation caractéristique

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0.$$

Si elles sont toutes à partie réelle négative alors le système est stable.

- ▶ Critère algébrique de Routh.

## Critère de Routh

Construction d'un tableau à partir des coefficients du polynôme caractéristique

$$D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

Procédure :

1. Condition nécessaire : tous les coeff.  $a_i$  doivent être strictement de même signe.
2. Construction du tableau

$$\begin{array}{c|cccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & \dots & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 s^0 & \alpha & & & 
 \end{array}$$

avec

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \left| \begin{array}{cc} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{array} \right| \quad b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \left| \begin{array}{cc} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{array} \right| \quad b_3 = -\frac{1}{a_{n-1}} \left| \begin{array}{cc} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{array} \right|$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \left| \begin{array}{cc} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| \quad c_2 = -\frac{1}{b_1} \left| \begin{array}{cc} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{array} \right|$$

3. Le système est stable ssi tous les coefficients de la 1<sup>ère</sup> colonne sont de même signe.

**Exemple 1 :**

Soit la fonction de transfert  $F(s) = \frac{s + 4}{s^4 + s^3 + 4s^2 + 2s + 1}$ , stable ?

$s^4$	1	4	1	0	$b_1 = -\frac{1}{1}(2 - 4) = 2$
$s^3$	1	2	0	0	$b_2 = -\frac{1}{1}(0 - 1) = 1$
$s^2$	2	1	0		$c_1 = -\frac{1}{2}(1 - 4) = \frac{3}{2}$
$s^1$	$\frac{3}{2}$	0			$c_2 = 0$
$s^0$	1				$\alpha = -\frac{2}{3}(0 - \frac{3}{2}) = 1$

⇒ Système stable.

**Exemple 2 :**

Soit la fonction de transfert  $F(s) = \frac{7}{3s^3 + s^2 + 2s + 4}$ , stable ?

$s^3$	3	2	0		$b_1 = -\frac{1}{1}(12 - 2) = -10$
$s^2$	1	4	0		
$s^1$	-10	0			$\alpha = -\frac{1}{10}(0 + 40) = 4$
$s^0$	4				

⇒ Système instable.

**Exemple 3 :**

Soit la fonction de transfert  $F(s) = \frac{s^2 + s + 4}{s^4 + 2s^3 - 2s^2 + 5s + 1}$ , stable ?

Les coefficients du polynôme du dénominateur ne sont pas de même signe

⇒ Condition nécessaire non satisfaite ⇒ Système instable.

**Exemple 4 :**

Soit la fonction de transfert  $F(s) = \frac{9K}{s(s+1)(s+2) + (s+6)K}$ , stable ?

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^3 & 1 & K+2 & 0 \\
 s^2 & 3 & 6K & 0 \\
 s^1 & 2-K & 0 & \\
 s^0 & 6K & & 
 \end{array}$$

$$b_1 = -\frac{1}{3}(6K - 3(K+2)) = 2 - K$$

$$\alpha = -\frac{1}{2-K}(0 - 6K(2 - K)) = 6K$$

⇒ Système stable ssi  $0 < K < 2$ .

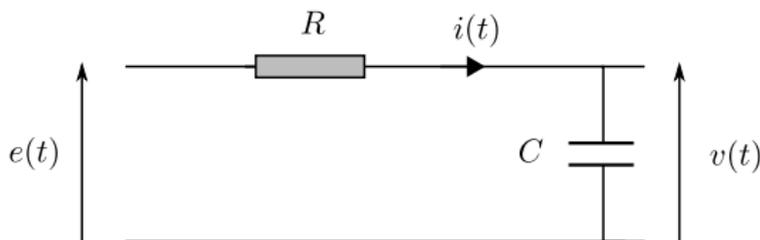
# Sommaire

---

- ① Réponse temporelle
- ② Notion de stabilité
- ③ Réponse fréquentielle
- ④ Résumé

## Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Reprenons le circuit RC



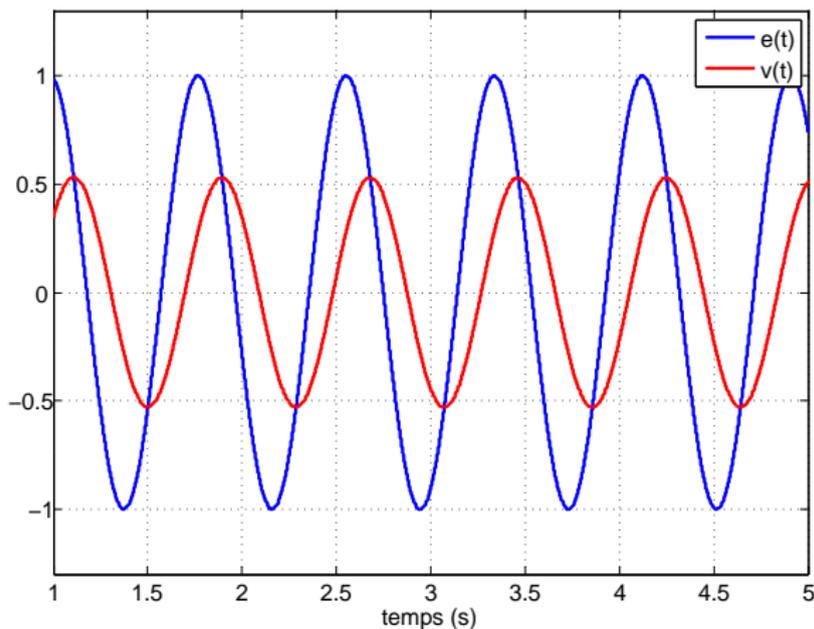
Régime sinusoïdale :

$$\begin{cases} e(t) = e_m \cos(\omega t) \\ v(t) = v_m \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

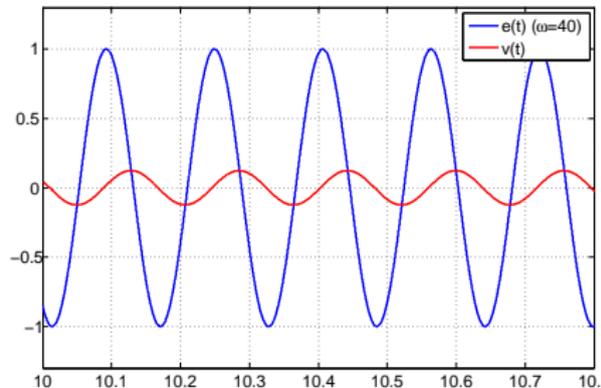
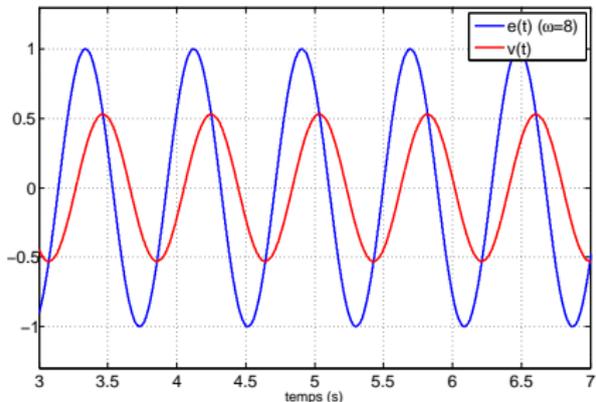
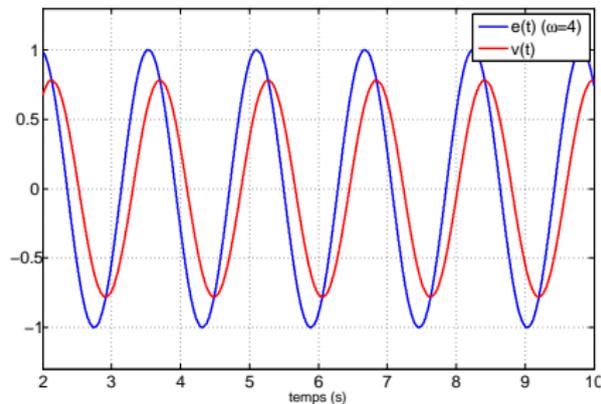
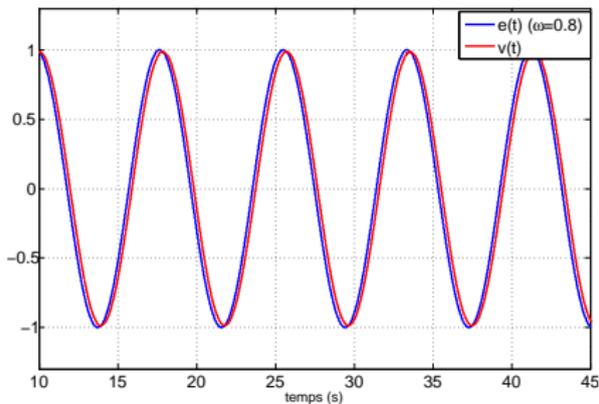
- ▶ Sinusoïde en entrée  $\Rightarrow$  sinusoïde en sortie de même fréquence  
mais d'amplitude et de phase différentes

## Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Pour  $R = 1k\Omega$  et  $C = 200\mu F$ , appliquons une tension  $e(t) = \cos(8t)$ .



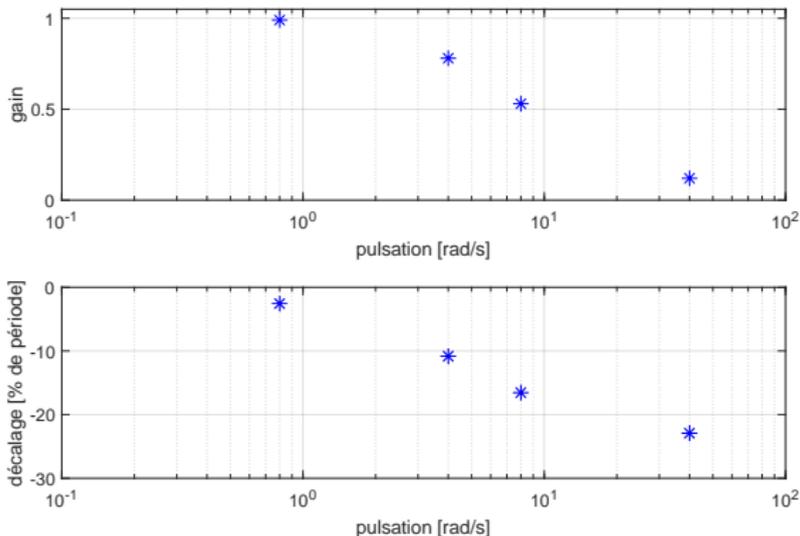
Testons les réponses du circuit pour  $\omega = \{0.8, 4, 8, 40\}$



Observation : quand la fréquence  $\omega$  augmente

- ▶ l'amplitude de la sortie diminue
- ▶ le décalage du signal de sortie augmente

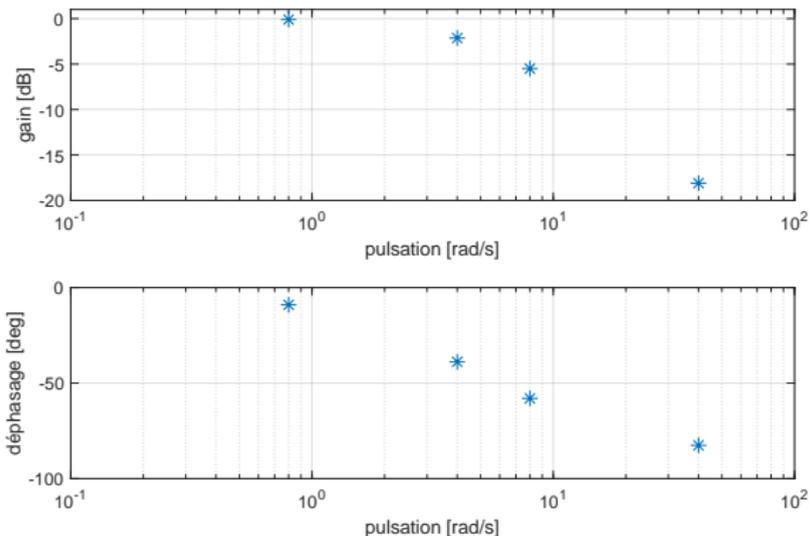
Traçons le gain  $= \left| \frac{v_m}{e_m} \right|$  et le décalage  $= \frac{d}{T}$  en fonction de la pulsation  $\omega$



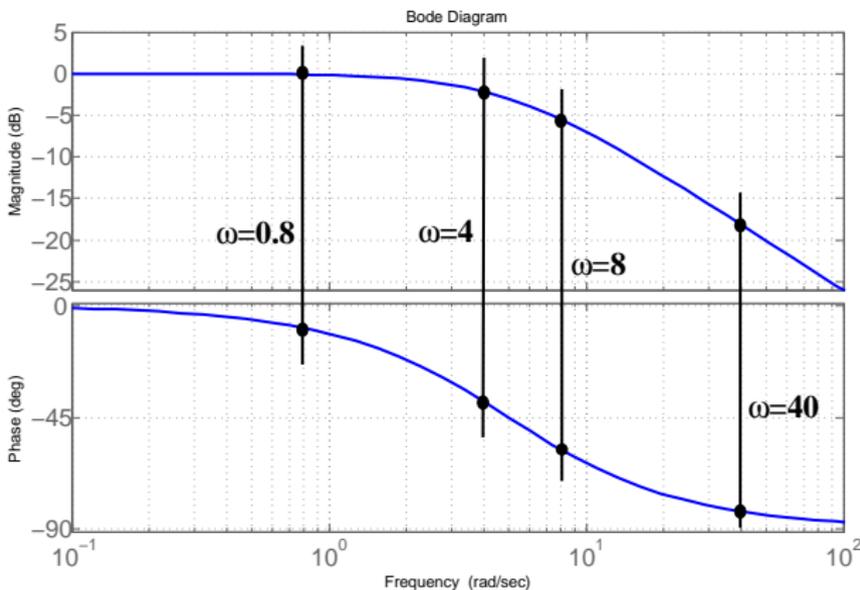
Généralement

- ▶ le gain est exprimé en dB :  $\text{gain}_{dB} = 20 \log \left| \frac{v_m}{e_m} \right|$
- ▶ on parle de déphasage en deg :  $\phi = \frac{d}{T} 360$

Traçons le gain en dB et le déphasage en deg en fonction de la pulsation  $\omega$



En répétant l'opération pour toutes les pulsations entre  $0.1 \text{ rad/s}$  et  $100 \text{ rad/s}$



⇒ Ce graphique s'appelle le diagramme de Bode

## Réponse fréquentielle : exemple introductif 1

Analysons le circuit. Loi d'Ohm :  $u = Zi$

$$Z_R = R \quad \text{et} \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Appliquons le pont diviseur de tension

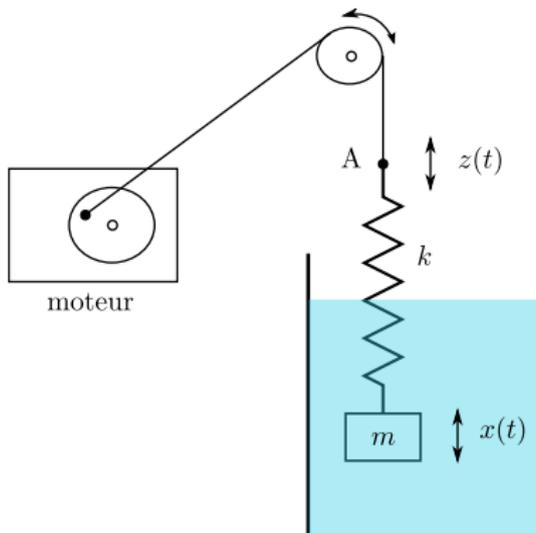
$$v = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} e$$

La transmittance du circuit s'écrit donc :

$$T = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{j\omega RC + 1}.$$

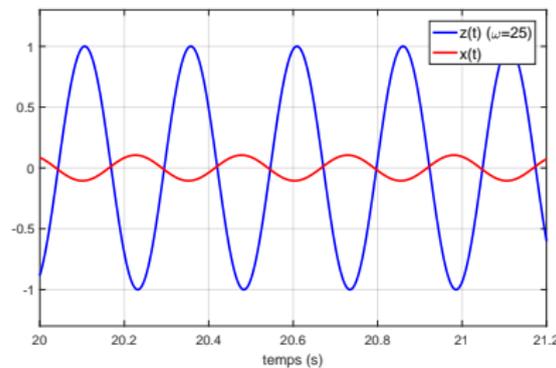
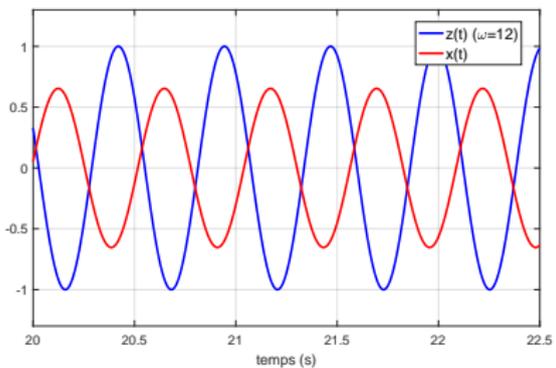
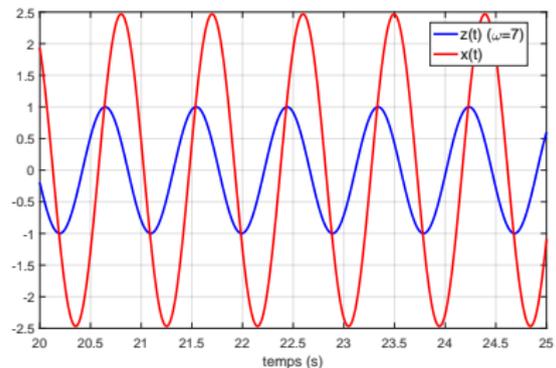
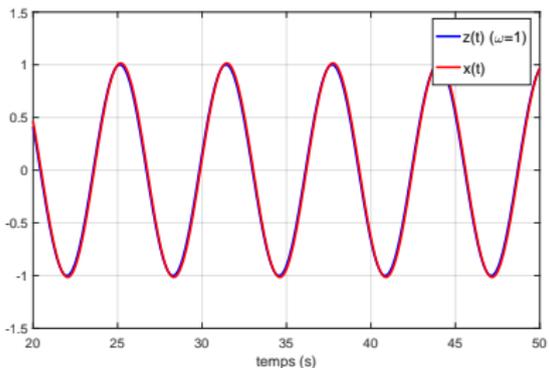
## Réponse fréquentielle : exemple introductif 2

Oscillations forcées d'un pendule

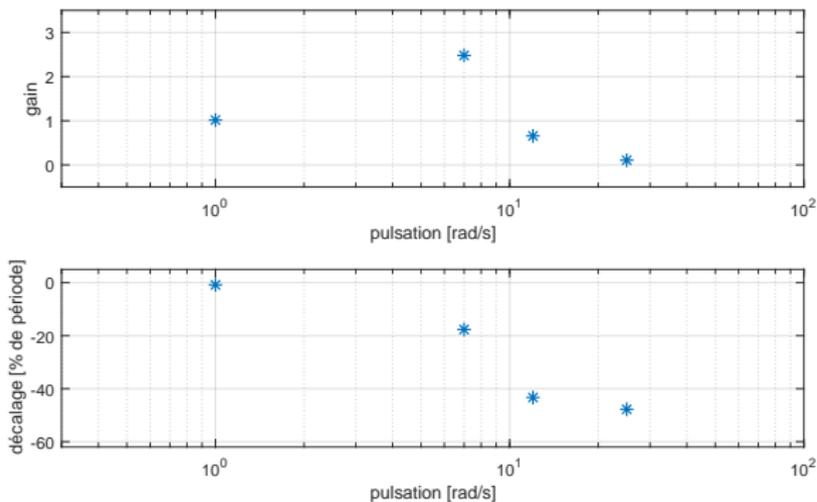


Testons les réponses de la masse pour différentes oscillations du point A

$\omega = \{1, 7, 12, 25\}$  (excitation moteur)



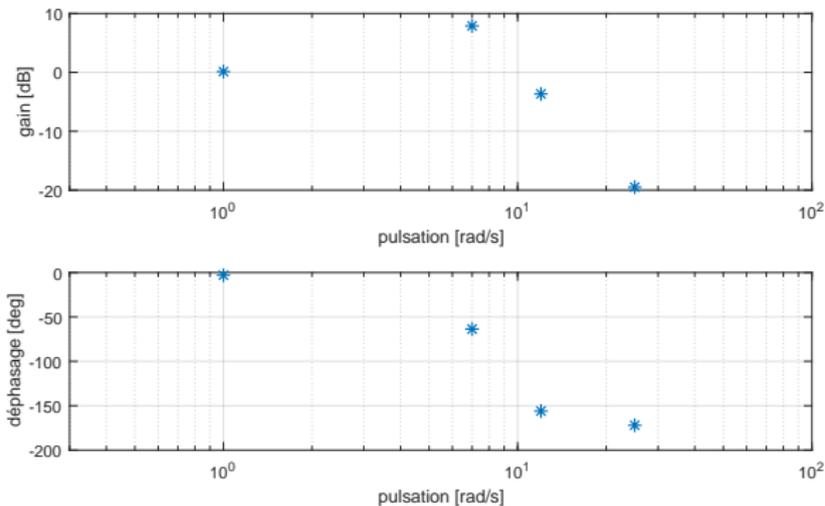
Traçons le gain  $= \left| \frac{x_m}{z_m} \right|$  et le décalage  $= \frac{d}{T}$  en fonction de la pulsation  $\omega$



Généralement

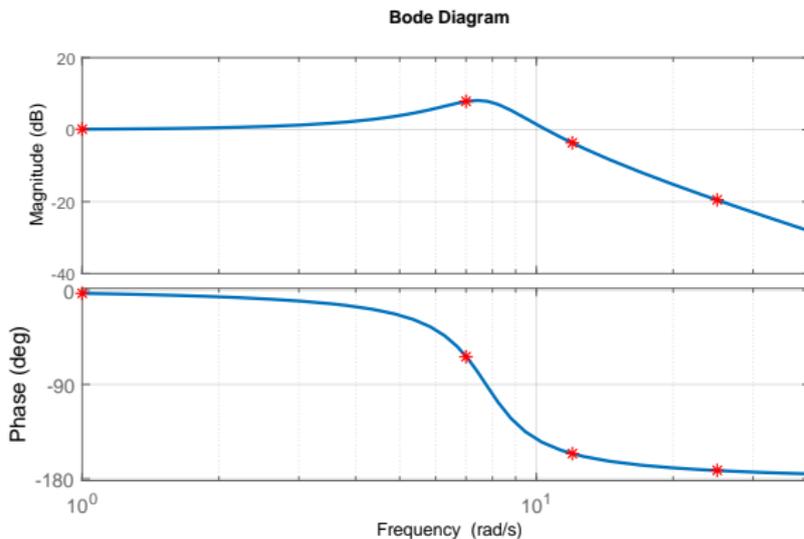
- ▶ le gain est exprimé en dB :  $\text{gain}_{dB} = 20 \log \left| \frac{X_m}{Z_m} \right|$
- ▶ on parle de déphasage en deg :  $\phi = \frac{d}{T} 360$

Traçons le gain en dB et le déphasage en deg en fonction de la pulsation  $\omega$



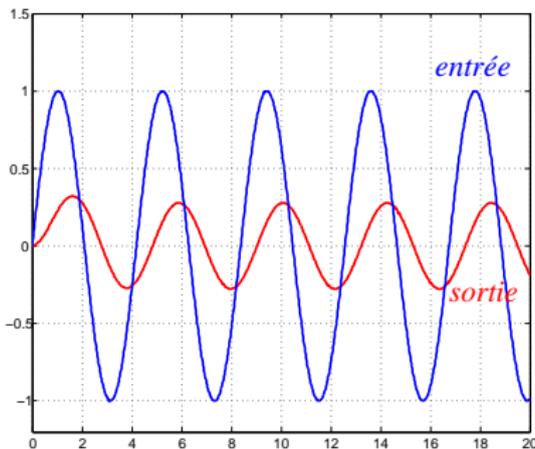
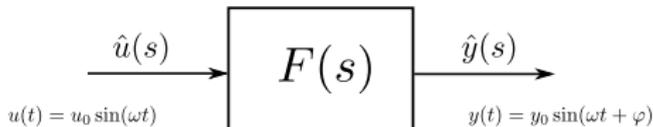
## Réponse fréquentielle : exemple introductif 2

Diagramme de Bode correspondant :

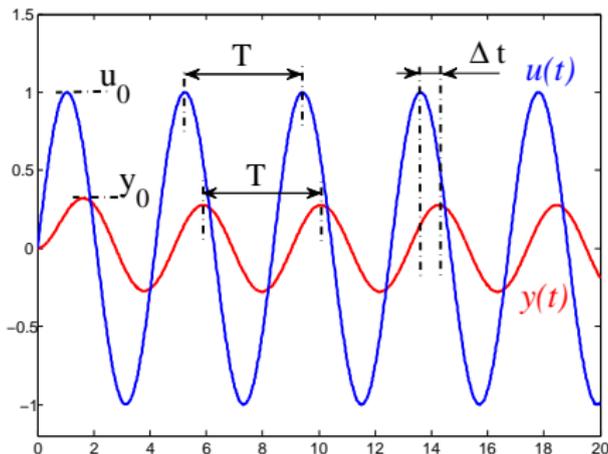


## Réponse fréquentielle

L'analyse fréquentielle consiste à étudier la réponse d'un système linéaire à des entrées sinusoïdales.



Le signal de sortie est sinusoïdale, de même pulsation, d'amplitude différente et présente un déphasage.



La réponse fréquentielle est caractérisée par

- ▶ son amplification :  $\frac{y_0}{u_0}$
- ▶ son déphasage :  $\pm 360 \frac{\Delta t}{T}$

L'amplification et le déphasage induit par le système dépendent de la pulsation  $\omega$

Exemple : considérons le système

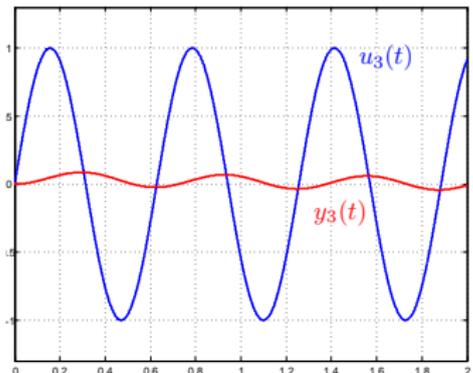
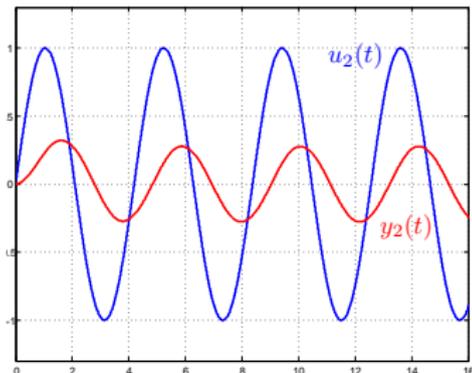
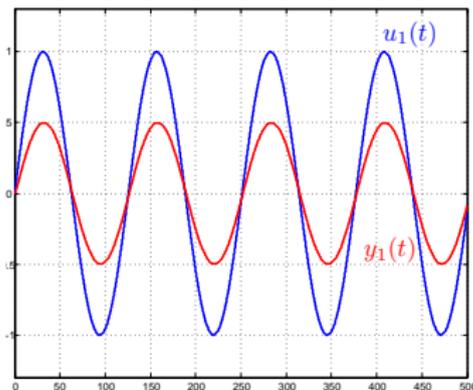
$$F(s) = \frac{1/2}{s + 1}$$

Observons sa réponse aux 3 entrées :

$$u_1 = \sin(0.05 t)$$

$$u_2 = \sin(1.5 t)$$

$$u_3 = \sin(10 t)$$



On montre que :

- ▶ l'amplification =  $|F(j\omega)|$ ,
- ▶ le déphasage =  $\arg F(j\omega)$ .

$F(j\omega)$  est obtenue en remplaçant la variable de Laplace  $s$  par  $j\omega$ .

Reprenons l'exemple précédent :  $F(j\omega) = \frac{1/2}{j\omega + 1}$

- ▶ pour  $\omega = 0.05 \text{ rad/s}$  :  $|F(j0.05)| = 0.5$  et  $\arg F(j0.05) = -2.86^\circ$ .
- ▶ pour  $\omega = 1.5 \text{ rad/s}$  :  $|F(j1.5)| = 0.277$  et  $\arg F(j1.5) = -56.3^\circ$ .
- ▶ pour  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  :  $|F(j10)| = 0.05$  et  $\arg F(j10) = -84.3^\circ$ .

## Preuve

Considérons un système stable de fonction de transfert  $\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = G(s) = \frac{N(s)}{(s + \alpha_1) \cdots (s + \alpha_n)}$

- ▶ Calculons sa réponse à une sinusoïde  $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$

$$\hat{y}(s) = \frac{N(s)}{(s + \alpha_1) \cdots (s + \alpha_n)} u_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- ▶ Après décomposition en éléments simples

$$\hat{y}(s) = \frac{k_1}{s + \alpha_1} + \cdots + \frac{k_n}{s + \alpha_n} + \frac{a}{s - i\omega} + \frac{\bar{a}}{s + i\omega}$$

- ▶ Soit dans le domaine temporel

$$y(t) = k_1 e^{-\alpha_1 t} + \cdots + k_n e^{-\alpha_n t} + a e^{i\omega t} + \bar{a} e^{-i\omega t}$$

- ▶ En régime permanent

$$y(t) = a e^{i\omega t} + \bar{a} e^{-i\omega t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = G(s) \frac{u_0 \omega}{s + i\omega} \Big|_{s=i\omega} = u_0 G(i\omega) \frac{1}{2i\omega} \\ \bar{a} = G(s) \frac{u_0 \omega}{s - i\omega} \Big|_{s=-i\omega} = -u_0 G(-i\omega) \frac{1}{2i\omega} \end{cases}$$

- ▶ Finalement (toujours en régime permanent)

$$y(t) = u_0 |G(i\omega)| \frac{e^{i\phi} e^{i\omega t} - e^{-i\phi} e^{-i\omega t}}{2i} = \underbrace{u_0 |G(i\omega)|}_{y_0} \sin(\omega t + \phi)$$

$F(j\omega)$  est une fonction complexe de la pulsation  $\omega$  (ou la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ).

On distingue trois représentations graphiques :

- ▶ les diagrammes de Bode,
- ▶ la représentation de Nyquist,
- ▶ la représentation de Black-Nichols.

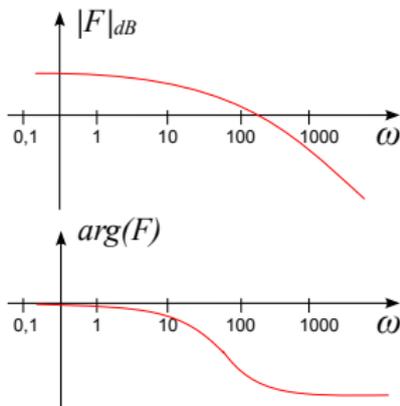
## Représentation dans le diagramme de Bode

Représentation du transfert  $F(j\omega)$  en fonction de  $\omega$  sur deux graphes :

- ▶ le **diagramme de gain** = module de  $F(j\omega)$  en décibel

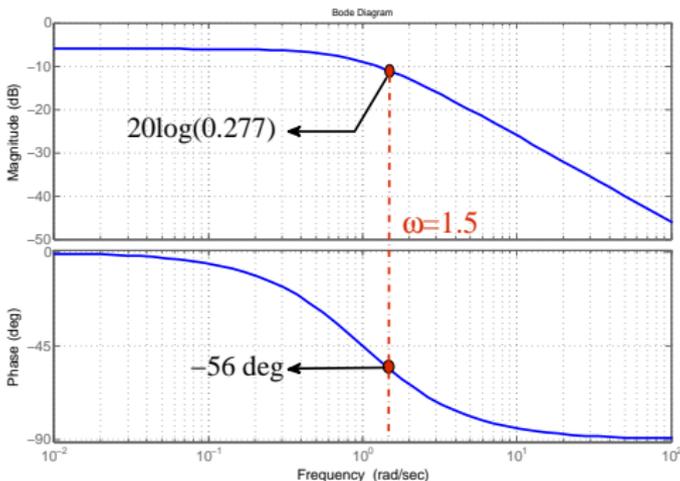
$$\Rightarrow |F|_{dB} = 20 \log |F(j\omega)|$$

- ▶ le **diagramme de phase** = argument de  $F(j\omega)$  en degré ou radian.



## Représentation dans le diagramme de Bode

Exemple : Réponse fréq. de  $F(s) = \frac{1/2}{s+1} \Rightarrow$  représentation de  $F(j\omega) = \frac{1/2}{j\omega+1}$



Pour une sollicitation sinusoïdale de pulsation  $\omega = 1.5$  :

- ▶ amplification de 0.277,
- ▶ déphasage de  $-56$  deg.

**Propriété** : le diagramme d'une fonction donnée est obtenu à partir de la somme des tracés élémentaires.

Soit  $F(s) = F_1(s) \times F_2(s)$ ,

- ▶ gain  $\rightarrow 20\log|F(j\omega)| = 20\log|F_1(j\omega)| + 20\log|F_2(j\omega)|$ ,
- ▶ phase  $\rightarrow \arg(F(j\omega)) = \arg(F_1(j\omega)) + \arg(F_2(j\omega))$ .

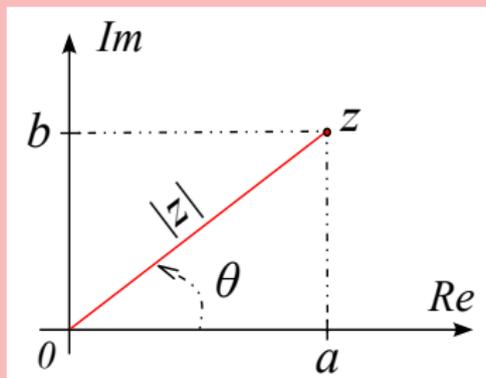
**Méthodes** :

- ▶ tracé asymptotique, analyse du transfert lorsque  $\omega \rightarrow 0$  et  $+\infty$  ainsi qu'en quelques points particuliers,
- ▶ tracé complet, à l'aide de logiciel de calcul numérique tel que Matlab<sup>®</sup>,
- ▶ tracé expérimental, solliciter le procédé avec des entrées sinusoïdales de différentes pulsations  $\omega$ . Mesurer en sortie l'amplification/atténuation et le déphasage du signal à l'oscilloscope.

## Tracés élémentaires

### Rappel

Soit un nombre complexe  $z = a + jb$ .



- $z = |z|e^{j\theta}$

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

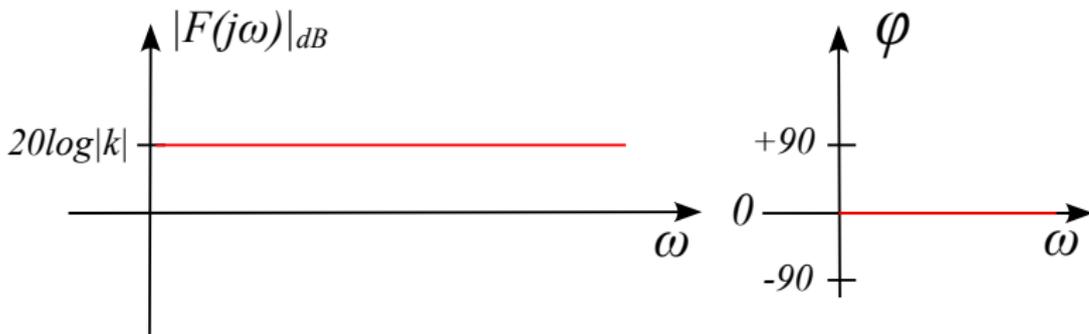
- $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$

## Tracés élémentaires

Terme constant :  $F(s) = k, (k > 0)$

Fonction de transfert complexe :  $F(j\omega) = k$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{dB} = 20\log(k) \\ \phi = 0 \end{cases}$$

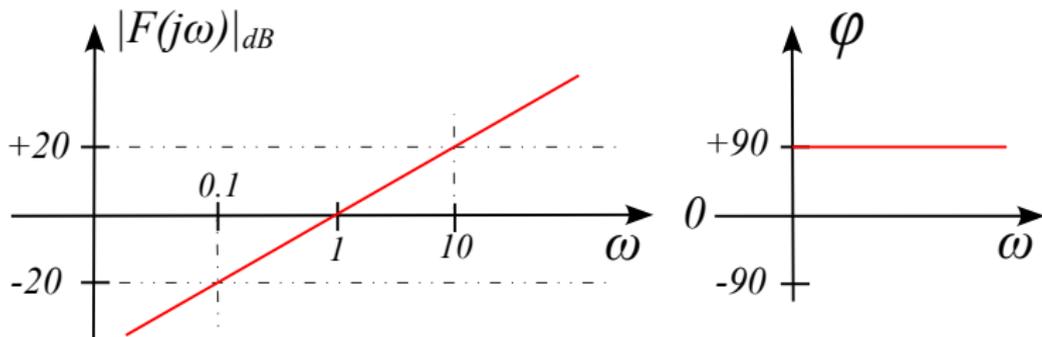


## Tracés élémentaires

Dérivateur :  $F(s) = s$

Fonction de transfert complexe :  $F(j\omega) = j\omega$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{dB} = 20\log(\omega) \\ \phi = +90^\circ \end{cases}$$

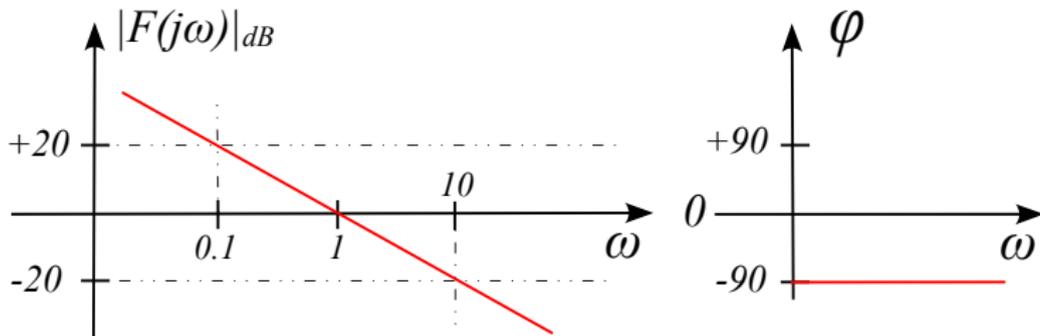


## Tracés élémentaires

Intégrateur :  $F(s) = \frac{1}{s}$

Fonction de transfert complexe :  $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{dB} = -20 \log(\omega) \\ \phi = \arg(-j\frac{1}{\omega}) = -90^\circ \end{cases}$$



## Fonction du premier ordre

$$F(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

Fonction de transfert complexe :  $F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$

- Module :

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{|1 + j\tau\omega|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$$

- Argument :

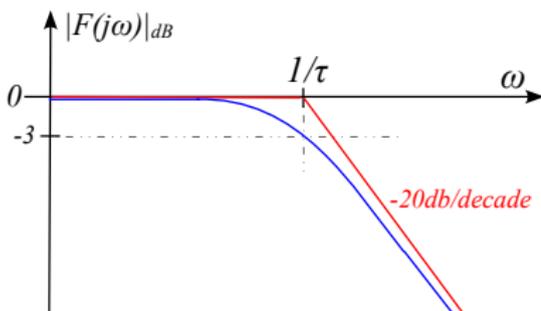
$$\arg(F(j\omega)) = \arg\left(\frac{1}{1 + j\tau\omega}\right) = \arg(1) - \arg(1 + j\tau\omega) = -\arctan\frac{\tau\omega}{1}$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{db} &= -20\log(\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}) \\ \phi &= -\arctan(\tau\omega) \end{cases}$$

## Fonction du premier ordre

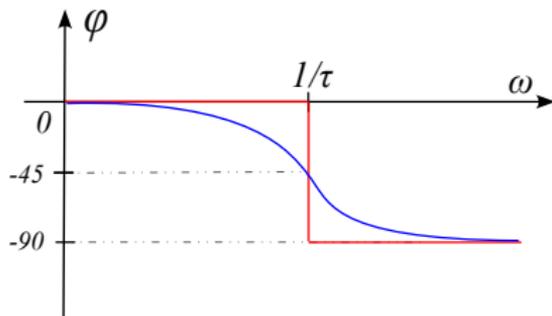
Courbe de gain :

- $\omega \ll \frac{1}{\tau}$        $|F|_{db} \rightarrow -20\log(1) = 0$
- $\omega \gg \frac{1}{\tau}$        $|F|_{db} \rightarrow -20\log(\tau\omega)$   
(pente à  $-20\text{dB/dec}$ )
- $\omega = \frac{1}{\tau}$        $|F|_{db} = -20\log(\sqrt{2}) \simeq -3\text{dB}$



Courbe de phase :

- $\omega \ll \frac{1}{\tau}$        $\phi \rightarrow 0$
- $\omega \gg \frac{1}{\tau}$        $\phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$
- $\omega = \frac{1}{\tau}$        $\phi = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$



## Fonction du second ordre

$$F(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

Fonction de transfert complexe : 
$$F(j\omega) = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j}$$

► Module :

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\left| (1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j \right|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\zeta \frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

► Argument :

$$\arg(F(j\omega)) = -\arg\left( (1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j \right) = -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\begin{cases} |F(j\omega)|_{db} &= -20 \log \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\zeta \frac{\omega}{\omega_n})^2} \\ \phi &= -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{cases}$$

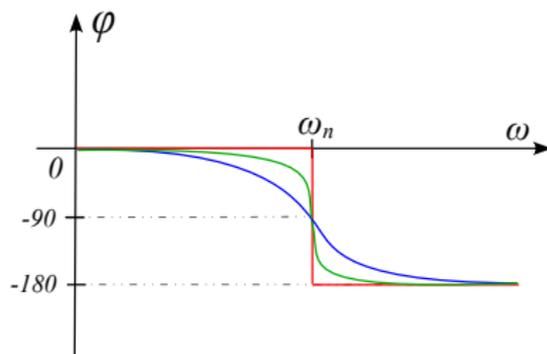
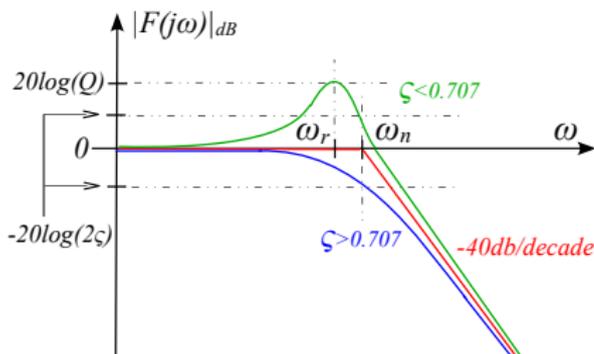
## Fonction du second ordre

Courbe de gain :

- $\omega \ll \omega_n$        $|F|_{db} \rightarrow -20\log(1) = 0$
- $\omega \gg \omega_n$        $|F|_{db} \rightarrow -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$   
(pente à  $-40\text{dB/dec}$ )
- $\omega = \omega_n$        $|F|_{db} = -20\log(2\zeta)$

Courbe de phase :

- $\omega \ll \omega_n$        $\phi \rightarrow 0$
- $\omega \gg \omega_n$        $\phi \rightarrow -\arctan \frac{2\zeta\omega_n}{-\omega} = -\pi$
- $\omega = \omega_n$        $\phi \rightarrow -\arctan \frac{2\zeta}{0} = -\frac{\pi}{2}$



- Résonance si  $\zeta < 0.707$  :       $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

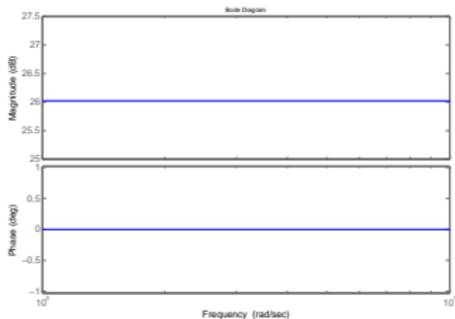
et

$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

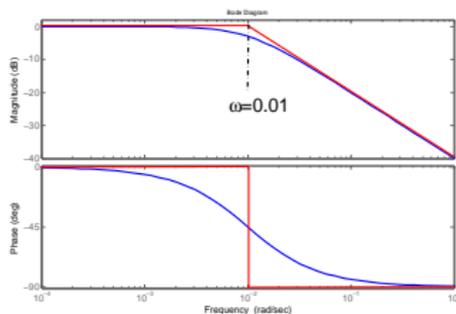
## Exemple

Diagramme de Bode de la fonction de transfert  $F(s) = \frac{20(10s+1)}{(100s+1)(s+1)}$

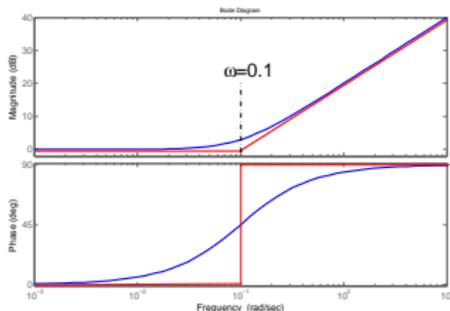
Fonction de transfert : 20



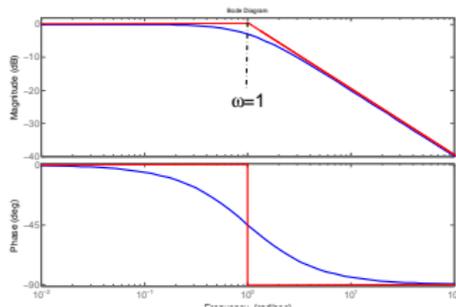
Fonction de transfert :  $\frac{1}{100s+1}$



Fonction de transfert :  $10s + 1$



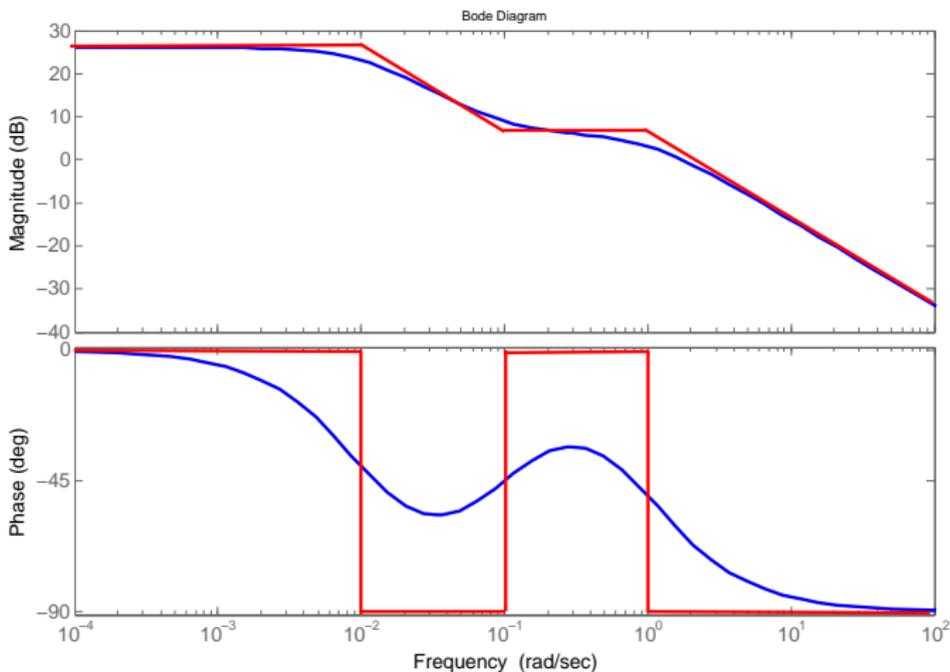
Fonction de transfert :  $\frac{1}{s+1}$



## Exemple

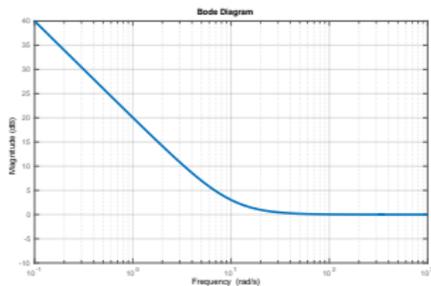
Diagramme de Bode de la fonction de transfert  $F(s) = \frac{20(10s+1)}{(100s+1)(s+1)}$

### Somme des tracés

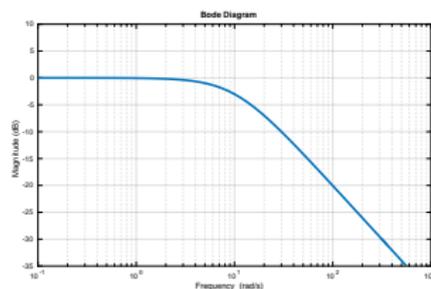


## QCM interactif

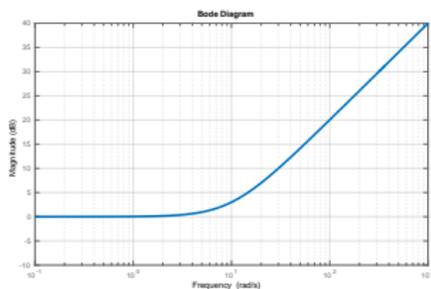
Quelle est la forme typique de la réponse fréquentielle d'un système passe-bas ?



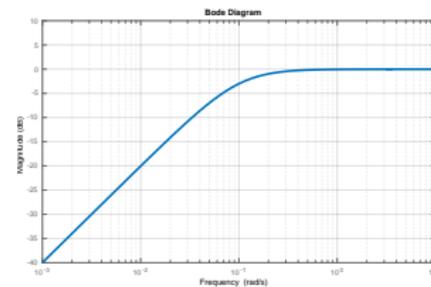
(A)



(B)



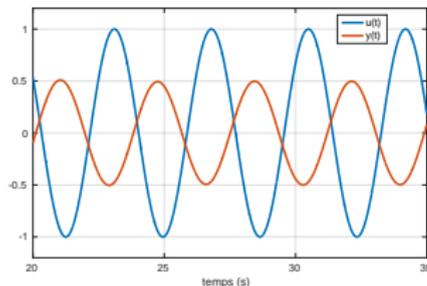
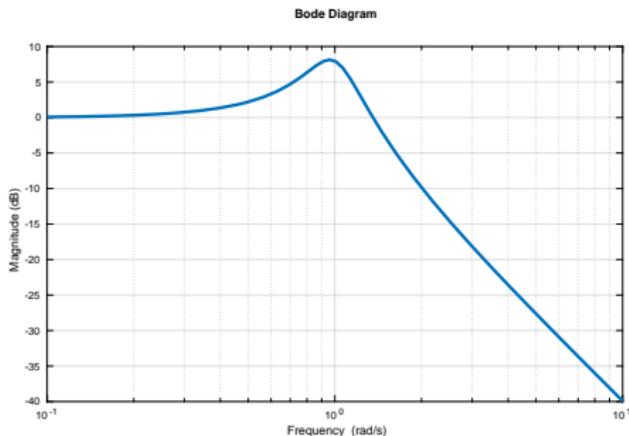
(C)



(D)

## QCM interactif

Considérons la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale  $u(t) = \sin(\omega t)$ .  
Déduisez à partir de son diagramme de Bode la pulsation d'excitation.



(A)  $\omega = 0.2$  rad/s

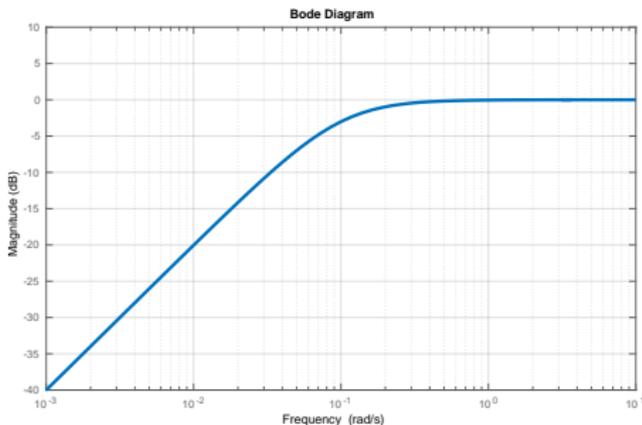
(C)  $\omega = 1.7$  rad/s

(B)  $\omega = 0.9$  rad/s

(D)  $\omega = 3.5$  rad/s

## QCM interactif

Considérons la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale  $u(t) = 10 \sin(2t)$ .  
Déduez à partir de son diagramme de Bode l'amplitude du signal de sortie  $y(t)$  résultant.



(A) amplitude nulle

(C) 0.1

(B) 10

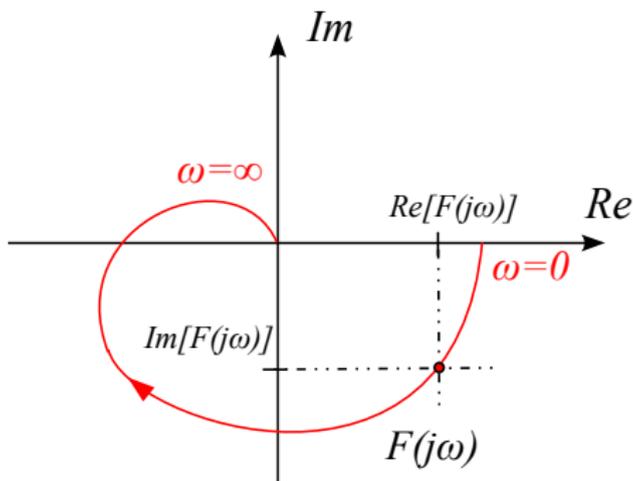
(D) 100

## Représentation de Nyquist

Représentation graphique du transfert  $F(j\omega)$  dans le plan complexe.

$$F(j\omega) = \operatorname{Re}[F(j\omega)] + j \operatorname{Im}[F(j\omega)]$$

La courbe est paramétrée par la pulsation  $\omega$  et doit être orientée suivant le sens des  $\omega$  croissants.

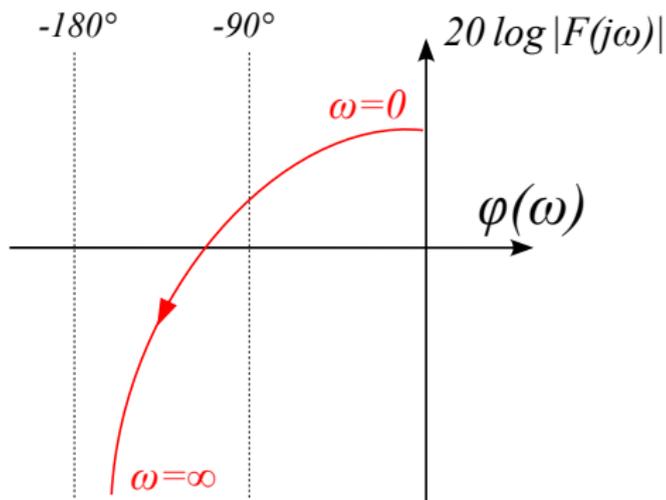


## Représentation de Black-Nichols

Représentation graphique du gain par rapport au déphasage.

- ▶ En abscisses, le déphasage en degré :  $\arg [F(j\omega)]$
- ▶ En ordonnées, le gain en dB :  $20 \log |F(j\omega)|$

La courbe est paramétrée par la pulsation  $\omega$  et doit être orientée suivant le sens des  $\omega$  croissants.



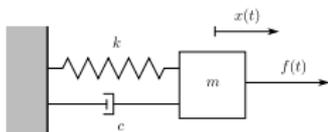
# Sommaire

---

- ① Réponse temporelle
- ② Notion de stabilité
- ③ Réponse fréquentielle
- ④ Résumé

## Résumé

Etude d'un système :



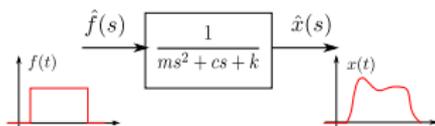
⇒

Modèles mathématiques :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \\ \hat{x}(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \hat{f}(s) \end{cases}$$

Analyse du "comportement" du système :

réponse temporelle



+

réponse fréquentielle

