Chapitre 2 : Modélisation

Yassine ARIBA

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} \, dt$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES TOULOUSE

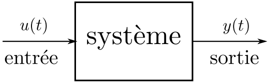
LAAS CNRS

version : 6-2023

Sommaire

Sommaire

Soit un système à commander :



Retour sur nos questions.

Question : comment agir sur le système pour contrôler la sortie ?

$\Rightarrow$ il faut donner des valeurs précises à $u(t)$

Question : comment calculer ces valeurs ?

$\Rightarrow$ il faudrait déjà savoir comment réagit le système à $u(t)$

$\Rightarrow$ il faudrait avoir un **modèle** représentatif de ce comportement

$\hookrightarrow$ déterminer une relation entre $u(t)$ et $y(t)$

Pourquoi la modélisation ?

Ce travail existe dans toutes les disciplines scientifiques

$\Rightarrow$ vise à établir un modèle de l'objet d'étude

C'est une étape nécessaire pour

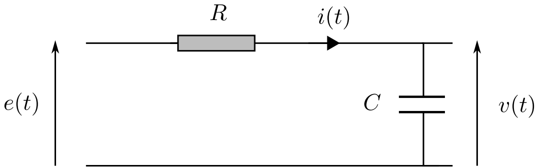
- comprendre et analyser un processus physique / dispositif / technologie...
- pouvoir prédire son comportement
- pour développer des outils de simulation

★ les modèles sont généralement des représentations mathématiques

⚠ un modèle est toujours une représentation approchée de la réalité

Exemple : le circuit RC

Considérons un circuit électronique



Appliquons la loi des mailles

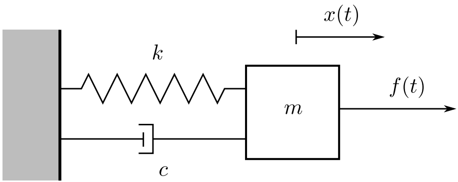
$$e(t) = Ri(t) + v(t) \qquad \text{sachant que} \qquad i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

modèle du système :

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t)$$

Exemple : structure masse-ressort

Considérons une structure mécanique



Appliquons le principe fondamental de la dynamique

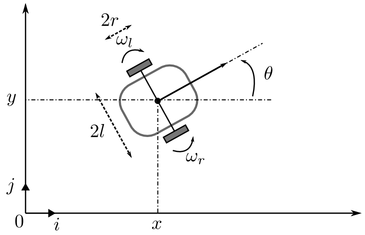
$$m\ddot{x}(t) = f(t) + f_{ressort}(t) + f_{amort}(t) \qquad \text{sachant que} \qquad \begin{cases} f_{ressort}(t) = -kx(t) \\ f_{amort}(t) = -c\dot{x}(t) \end{cases}$$

modèle du système :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Exemple : base mobile

Considérons un robot à deux roues motrices indépendantes



les vitesses de translation et rotation du mobile sont données par

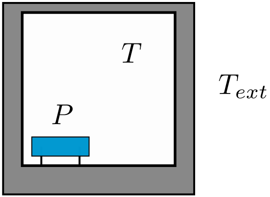
$$v = r\frac{\omega_r + \omega_l}{2} \qquad \text{et} \qquad \omega = r\frac{\omega_r - \omega_l}{2l}$$

modèle du système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= v\cos\theta \\ \dot{y} &= v\sin\theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{cases}$$

Exemple : échanges thermiques dans une enceinte

Considérons les variations de température à l'intérieur d'une enceinte



La déperdition et le bilan énergétique s'écrivent

$$P_{pertes} = k(T - T_{ext}) \qquad \text{et} \qquad P - P_{pertes} = c\frac{dT}{dt}$$

modèle du système :

$$P = k(T - T_{ext}) + c\dot{T}$$

Exemple : dynamique des populations

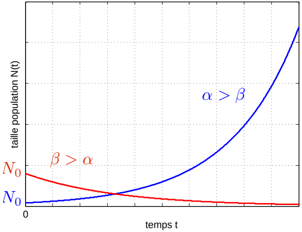
Considérons l'évolution de la taille N d'une population

Premier modèle :

$$\dot{N}(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)$$

avec

- α : taux de naissances
- β : taux de décès

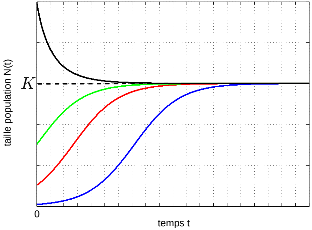


Second modèle :

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

avec

- $r = \alpha - \beta$
- K : nombre max d'individus



Modèles mathématiques

Ici, les modèles sont des *équations différentielles*

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = e(t) \qquad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \qquad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{x} & = & v\cos\theta \\ \dot{y} & = & v\sin\theta \\ \dot{\theta} & = & \omega \end{array} \right.$$

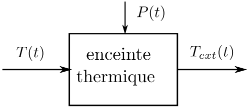
$$P = k(T - T_{ext}) + c\dot{T} \qquad \Rightarrow \quad \text{linéaire}$$

$$\dot{N}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

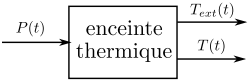
⋆ **même formalisme mathématique.**

QCM interactif

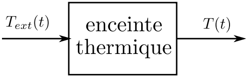
Quelle est la représentation entrée-sortie pour l'exemple de l'enceinte thermique ?



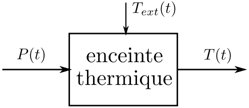
(A)



(B)



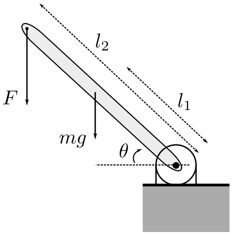
(C)



(D)

Autre exemple

Modélisation d'un bras mécanique motorisé



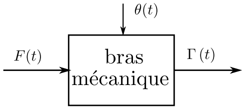
Relation entre la position angulaire θ et les forces, dont le couple moteur Γ :

$$J\ddot{\theta}(t) = -\Big(mgl_1 + l_2 F(t)\Big)\cos\theta(t) + \Gamma(t)$$

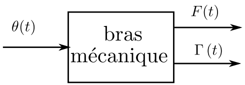
F est la force due aux masses transportées.

QCM interactif

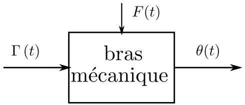
Quelle est la représentation entrée-sortie pour l'exemple du bras mécanique ?



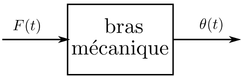
(A)



(B)



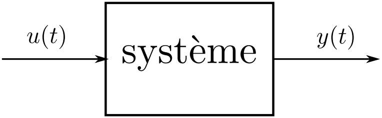
(C)



(D)

Les systèmes linaires invariants

Dans de ce cours, on s'intéresse exclusivement aux SLI



Relation entrée-sortie : $u(t) \rightarrow y(t)$

$\Rightarrow$ **équations différentielles linéaires à coefficients constants**

Exemple : $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 2y(t) = 5u(t)$

Sommaire

La transformée de Laplace

La transformée de Laplace (TL) d'une fonction $f(t)$ est la fonction du nombre complexe s :

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

On notera $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ et $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$

- opération mathématique
- transforme une fonction temporelle en une fonction "abstraite" complexe
- intérêt ? $\rightarrow$ ses propriétés
- permet un traitement plus simple de certaines opérations
- généralise la transformée de Fourier

La transformée de Laplace

soit deux fonctions $f(t) \xrightarrow{\text{TL}} \hat{f}(s)$ et $g(t) \xrightarrow{\text{TL}} \hat{g}(s)$

Propriétés :

- ▷ Linéarité : $af(t) + bg(t) \xrightarrow{\text{TL}} a\hat{f}(s) + b\hat{g}(s)$, a et b constants
- ▷ Dérivation : $\frac{d}{dt}f(t) \xrightarrow{\text{TL}} s\hat{f}(s) - f(0)$
- ▷ Intégration : $\int_0^t f(\theta)d\theta \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{s}\hat{f}(s)$
- ▷ Translation : $f(t-\tau) \xrightarrow{\text{TL}} e^{-s\tau}\hat{f}(s)$ τ constant
- ▷ Valeur finale : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\hat{f}(s)$

Table des transformées

les fonctions temporelles $f(t)$ sont définies pour $t \geq 0$ (0 pour $t < 0$)

Fonction	Dom. temporel $f(t)$	Trans. de Laplace $\hat{f}(s)$
échelon	1	$\frac{1}{s}$
rampe	t	$\frac{1}{s^2}$
puissance n-ième	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
exponentielle décroissante	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

Table des transformées

les fonctions temporelles $f(t)$ sont définies pour $t \geq 0$ (0 pour $t < 0$)

Fonction	Dom. temporel $f(t)$	Trans. de Laplace $\hat{f}(s)$
sinus	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
cosinus	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
décroissance exponentielle d'un sinus	$e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$
décroissance exponentielle d'un cosinus	$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$
décroissance exponentielle d'une puissance n-ième	$\frac{t^n}{n!} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$

QCM interactif

Sachant que

$$f(t) = 2t^3 - t^2 \quad \xrightarrow{TL} \quad \hat{f}(s) = \frac{12}{s^4} - \frac{2}{s^3}$$

sans faire de calcul, quelle est l'expression de la TL de la fonction dérivée $g(t) = \dot{f}(t)$?

(A) $\hat{g}(s) = \dfrac{12}{s^3} - \dfrac{2}{s^2}$

(B) $\hat{g}(s) = 12s^3 - 2s$

(C) $\hat{g}(s) = \dfrac{3}{s^5} - \dfrac{1}{s^4}$

(D) $\hat{g}(s) = \dfrac{3}{s^3} - \dfrac{1}{s^2}$

QCM interactif

Quelle est la fonction temporelle correspondant à la fonction en s ?

$$\hat{f}(s) = \frac{4}{2s+1}$$

(A) $f(t) = 4e^{-2t}$

(B) $f(t) = 2e^{-0.5t}$

(C) $f(t) = 4e^{t}$

(D) $f(t) = e^{4t}$

Fonctions de transfert

Appliquons la transformée de Laplace à une équation différentielle

$$5y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 4y(t) \; = \; \dot{u}(t) + 2u(t)$$

$$\Big\downarrow \; \mathcal{L}$$

$$5s^3\hat{y}(s) + 2s^2\hat{y}(s) + s\hat{y}(s) + 4\hat{y}(s) = s\hat{u}(s) + 2\hat{u}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

$$\hat{y}(s)\Big(5s^3 + 2s^2 + s + 4\Big) = \Big(s + 2\Big)\hat{u}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

$$\hat{y}(s) = \frac{s+2}{5s^3 + 2s^2 + s + 4}\hat{u}(s)$$

Nouvelle relation entrée-sortie : **la fonction de transfert**

$$\boxed{\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)}$$

Fonctions de transfert

Cas général :

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$\Big\downarrow \; \mathcal{L}$$

$$a_n s^n \hat{y}(s) + \cdots + a_1 s \hat{y}(s) + a_0 \hat{y}(s) = b_m s^m \hat{u}(s) + \cdots + b_1 s \hat{u}(s) + b_0 \hat{u}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

Fonction de transfert : $$\boxed{G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}}$$

- se définie comme le rapport : TL sortie sur TL entrée, avec CI nulles
- Pour les SLI, la fonction de transfert est toujours une fraction rationnelle

Fonctions de transfert

Autre exemple :

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) - 2y(t) \; = \; 6u(t)$$

$$\Big\downarrow \; \mathcal{L}$$

$$s^2\hat{y}(s) + 4s\hat{y}(s) - 2\hat{y}(s) = 6\hat{u}(s)$$

$$\Big\downarrow$$

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{6}{s^2 + 4s - 2}$$

QCM interactif

Quelle est la fonction de transfert de l'équation différentielle ?

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) \;=\; \dot{u}(t) + 2u(t)$$

(A) $G(s) = \dfrac{s+2}{s+3}$

(B) $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2+3s}$

(C) $G(s) = \dfrac{2(s+1)}{3s+1}$

(D) $G(s) = \dfrac{2s+1}{3s}$

Quelques définitions :

- L'**ordre** d'un système est le degré du polynôme du dénominateur (n).
- Le système est dit **strictement propre** (**propre**), si $n > m$ ($n = m$).
- Les **pôles** sont les racines du dénominateur.
- Les **zéros** sont les racines du numérateur.

Exemple du système masse-ressort :

La relation force - position est décrite par

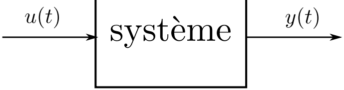
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t).$$

sa fonction de transfert s'écrit $$\frac{\hat{x}(s)}{\hat{f}(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

$\Rightarrow$ système d'ordre 2 ; sans zéro ; les 2 pôles sont solutions de $ms^2 + cs + k = 0$.

Deux représentations

Pour un système linéaire invariant



Deux modèles :

dans le domaine temporel

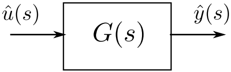
$\Rightarrow$ équation différentielle

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = 6u(t)$$

dans le domaine de Laplace

$\Rightarrow$ fonction de transfert

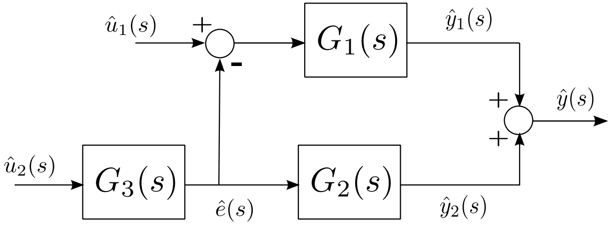
$$\hat{y}(s) = \frac{6}{s+2}\hat{u}(s)$$



Sommaire

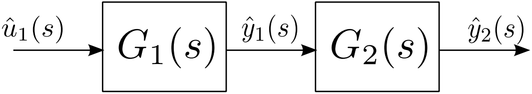
Schéma fonctionnel

Représentation graphique des systèmes complexes



Le formalisme des fonctions de transfert est très pratique pour ce type de représentation.

Mise en série de deux systèmes

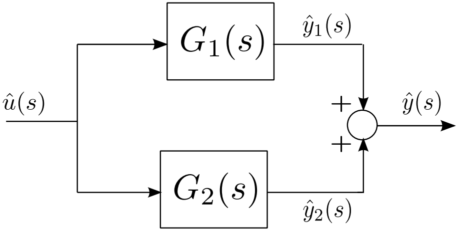


$$\begin{aligned}\hat{y}_2(s) &= G_2(s)\hat{y}_1(s)\\ &= G_2(s)G_1(s)\hat{u}_1(s)\end{aligned}$$

Transfert équivalent :

$$F(s) = G_2(s) \times G_1(s)$$

Mise en parallèle de deux systèmes

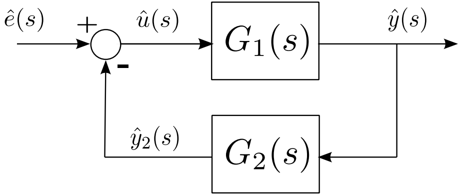


$$
\begin{aligned}
\hat{y}(s) &= \hat{y}_1(s) + \hat{y}_2(s) \\
&= \Big(G_1(s) + G_2(s)\Big)\,\hat{u}(s)
\end{aligned}
$$

Transfert équivalent :

$$F(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

Interconnexion feedback

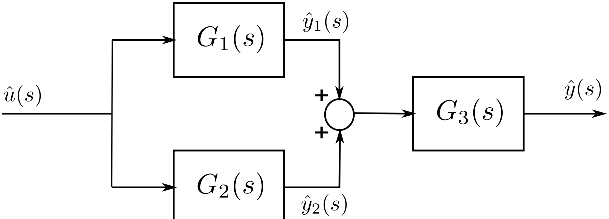


$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= G_1(s)\hat{u}(s) \\ \hat{u}(s) &= \hat{e}(s) - G_2(s)\hat{y}(s) \end{aligned}$$

Transfert équivalent :

$$F(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

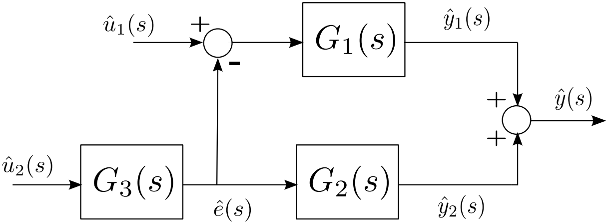
Exemple 1



Transfert équivalent :

$$\hat{y}(s) = \underbrace{G_3(s)\Big(G_1(s) + G_2(s)\Big)}_{F(s)}\,\hat{u}(s)$$

Exemple 2



Transfert équivalent :

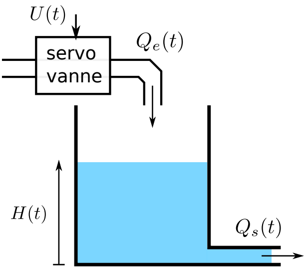
$$\hat{y}(s) = F_1(s)\hat{u}_1(s) + F_2(s)\hat{u}_2(s)$$

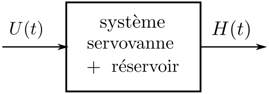
avec

$$F_1(s) = G_1(s) \qquad \text{et} \qquad F_2(s) = \Big(G_2(s) - G_1(s)\Big)G_3(s)$$

Exemple concret 1

Contrôle du niveau d'un réservoir





modèle réservoir :

$$A\frac{dH}{dt}(t) = Q_e(t) - Q_s(t)$$

$$A\frac{dH}{dt}(t) = Q_e(t) - K\sqrt{H(t)}$$

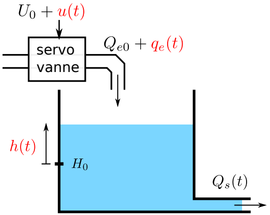
modèle servo-vanne :

$$\tau_{sv}\dot{Q}_e(t) + Q_e(t) = k_{sv}u(t)$$

Exemple concret 1

Considérons des petites variations autour d'un point de fonctionnement :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \text{tension} & \rightarrow & U(t) = U_0 + u(t) \\ \text{débit} & \rightarrow & Q_e(t) = Q_{e0} + q_e(t) \\ \text{hauteur} & \rightarrow & H(t) = H_0 + h(t) \end{array}\right.$$



modèles approchés pour petits signaux

réservoir : $A\dot{h}(t) = q_e(t) - \alpha h(t)$

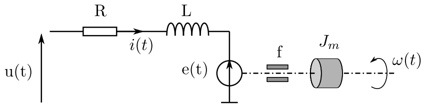
avec $\alpha = \frac{Q_{e0}}{2H_0}$

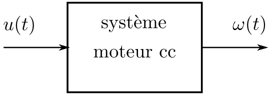
servovanne : $\tau_{sv}\dot{q}_e(t) + q_e(t) = k_{sv}u(t)$

$$\hat{u}(s) \longrightarrow \boxed{\frac{k_{sv}}{\tau_{sv}s+1}} \xrightarrow{\hat{q}_e(s)} \boxed{\frac{1}{As+\alpha}} \longrightarrow \hat{h}(s)$$

Exemple concret 2

Le moteur à courant continu : un système électromécanique



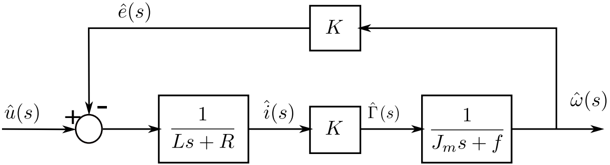


modèle :

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}(t) + e(t), & \text{avec } e(t) = K\omega(t) \\ J_m\dot{\omega}(t) = \Gamma(t) - f\omega(t), & \text{avec } \Gamma(t) = Ki(t) \end{cases}$$

Exemple concret 2

Schéma bloc



Fonction de transfert équivalent

$$F(s) = \frac{\hat{\omega}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{K}{LJ_m s^2 + (RJ_m + Lf)s + (Rf + K^2)}$$

QCM interactif

Dans l'exemple 2, quelle est l'expression de $\hat{y}_2(s)$?

(A) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)\hat{e}(s)G_3(s)\hat{u}_2(s)$

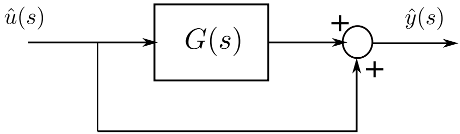
(B) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)$

(C) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)\Big(\hat{e}(s) - \hat{u}_1(s)\Big)$

(D) $\hat{y}_2(s) = G_2(s)G_3(s)\hat{u}_2(s)$

QCM interactif

Quelle est la relation entrée-sortie correcte ?



(A) $\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$

(B) $\hat{y}(s) = \dfrac{G(s)}{1 + G(s)}\hat{u}(s)$

(C) $\hat{y}(s) = \big(G(s) + 1\big)\hat{u}(s)$

(D) $\hat{y}(s) = G(s) + \hat{u}(s)$