# Planification de mouvement par échantillonnage aléatoire

T. Siméon, *LAAS-CNRS, Toulouse, France*

## Résumé

*La planification de mouvement, domaine de recherche très actif durant ces vingt dernieres années, s'est longtemps heurtée à la complexité combinatoire inhérente au problème. Les approches probabilistes apparues depuis une dizaine d'années permettent aujourdhui de résoudre de nombreux problèmes qui restent hors de portée des méthodes déterministes initialement développées, en particulier lorsqu'il s'agit d'explorer des espaces de recherche hautement dimensionnés. Leur champ d'application dépasse aujourd'hui la seule robotique: elles intéressent des domaines aussi diversifiés que la robotique, la CAO, l'animation graphique ou la chimie. Cet article présente une synthèse des travaux récents autour de ces méthodes. Il est illustré par les derniers résultats obtenus dans le cadre de différents projets couvrant des problèmes de robotique, d'IAO process et d'animation graphique.*

## 1 Introduction

Un système robotique agit par le mouvement dans un monde physique. La capacité de planification de mouvement est donc une composante essentielle de l'autonomie du système. La planification de mouvement constitue un domaine de recherche très actif ces vingt dernières années dans la communauté robotique depuis les travaux pionniers de Lozano-Perez au MIT. Dans sa version la plus simple, le problème est intrinsèquement difficile ; sa complexité croit exponentiellement avec le nombre de degrés de liberté du (ou des) mobile(s).

Traditionnellement l'algorithmique du mouvement conduisait soit à des méthodes exactes et complètes, soit à des méthodes heuristiques [23]. La complexité des premières rendait leur utilisation rédhibitoire pour des systèmes de dimension élevée (supérieure à quatre). Les secondes souffraient des inconvénients liés à la non complétude.

Depuis une dizaine d'années sont apparues de nouvelles approches non déterministes [4, 16, 33, 6, 21] qui visent soit à explorer directement l'espace des configurations admissibles soit à en capturer la connectivité, sans reposer sur la construction préalable d'une représentation explicite (exacte ou approchée) de cet espace. Ces techniques utilisent une forme d'aléa (marche [4, 6] ou échantillonnage [16, 33, 21] aléatoire) qui permet de contourner la complexité exponentielle du problème. Elles vérifient une propriété de complétude probabiliste [15, 37] plus faible que la complétude déterministe (ie. garantissent en probabilité de trouver une solution en temps fini, lorsqu'elle existe). Par contre, elles sont beaucoup moins sensibles que les méthodes déterministes à la dimension des espaces dans lesquels sont conduits les calculs et s'avèrent très efficaces en pratique.

Ces approches probabilistes possèdent par ailleurs d'autres propriétes intéressantes qui en font des méthodes effectives de planification, capables de répondre aux besoins de nombreuses applications non seulement en terme d'efficacité, mais aussi de généricité, de robustesse ou encore d'incrémentalité. Elles ont permis de revisiter plusieurs instances de problèmes pour lesquels un cadre formel avait été dégagé mais qui se heurtaient jusqu'alors à la complexité:

- des systèmes mécaniques considérés: nombre élevé de degrés de liberté [17], chaines cinématiques fermées [12, 27], corps déformables [3].

- des contraintes sur les mouvements: systèmes non holonomes [26], contraintes dynamiques [28, 19],
- de problèmes nécessitant l'exploration d'espaces hautement dimensionnés: planification multi-robots [38] ou de tâches de manipulation. [1, 31].

Dans cet article nous présentons une synthèse de travaux sur les méthodes PRM (Probabilistic Roadmap Methods) qui trouvent leur origine à Stanford et Utrecht et qui ont par la suite donné lieu à de nombreuses variantes ainsi qu'à la plupart des extensions mentionnées ci-dessus. La deuxième partie est consacrée à la description d'une technique qui exploite une notion de visibilité afin de réduire la complexité du graphe. Le champ d'application de ces méthodes dépasse aujourd'hui la seule robotique: elles intéressent des domaines aussi diversifiés que la robotique, la CAO, l'animation graphique ou la chimie [24]. La dernière partie présente plusieurs exemples qui illustrent les performances actuelles de ces méthodes dans ces divers champs applicatifs.

## 2 Roadmaps probabilistes

Le principe sous-jacent aux méthodes PRM [16, 33] est simple. Il consiste à capturer la connectivité de l'espace libre par un graphe (ou un arbre) construit à partir de points choisis aléatoirement dans l'espace des configurations. Des algorithmes de *détection de collision* permettent de vérifier si les points considérés correspondent ou non à des configurations admissibles pour les placement correspondant du système mécanique dans son espace de travail. Une *méthode locale* rendant compte des contraintes sur le mouvement du système en absence d'obstacle permet de calculer un chemin faisable entre deux points donnés du graphe. Ces points sont reliés par un arc lorsque le chemin calculé est sans collision.

Le graphe capturant la topologie de l'espace libre peut être construit dans une étape préalable afin de résoudre efficacement des requêtes de planification, ou incrémentalement en l'enrichissant au fur et à mesure que l'algorithme résoud des problèmes particuliers. Une fois le graphe construit, la résolution d'un problème se fait de la manière suivante: une configuration de départ et un but étant donnés, l'algorithme tente de les relier aux noeuds du graphe en utilisant la méthode locale. En cas de succès il reste à effectuer une recherche de chemin dans le graphe. Ce chemin, quand il existe est une séquence de chemins locaux. Il correspond à une trajectoire admissible qui est lissée dans une dernière étape (Figure 1).

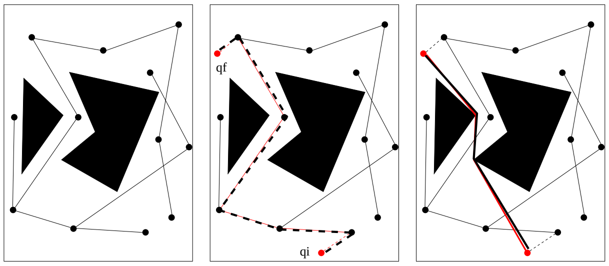


**Figure 1:** *Les 3 étapes de méthodes PRM: a/ calcul du graphe b/ recherche d'une solution c/ lissage de la solution.*

Suivant ce principe général, de nombreuses variantes ou extensions ont par la suite été proposées afin de capturer plus efficacement la connectivité de l'espace libre en présence de passages étroits. En effet, dans ce cas l'échantillonnage uniforme de l'espace des configurations produit une forte densité de noeuds dans chaque composante avant de réussir à les connecter, vue la faible probabilité de tirer des configurations à l'intérieur du passage étroit.

Dans [20], l'algorithme concentre l'échantillonnage aléatoire autour des composantes isolées du graphe afin de capturer plus efficacement ces passages. Une autre idée consiste à échantillonner l'espace libre par des configurations proches des obstacles. Dans [2], la méthode proposée repose sur une analyse explicite de contacts élémentaires afin d'échantillonner l'espace de contact. Cet espace peut aussi être échantillonné plus simplement, sans prise en compte explicite des contraintes de contact: la méthode proposée dans [8] tire aléatoirement des paires de configurations séparées par une distance suivant une distribution gaussienne et ne conserve un échantillon situé dans l'espace libre que lorsque le second est en collision (Figure 2).

Dans [14] la méthode exploite des calculs de distance

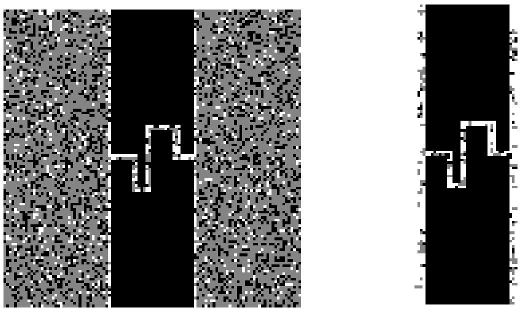

**Figure 2:** *Echantillonnage uniforme vs. Gaussien [8]*

de pénétration (plus couteux que la simple détection de collision) pour calculer dans un premier temps un graphe de configurations autorisant de faibles pénétrations avec les obstacles; le graphe est ensuite modifié en repoussant progressivement les configurations en collision dans l'espace libre.

D'autres variantes (e.g. [7]) visent à limiter le nombre d'appels au détecteur de collision en introduisant des mécanismes d'évaluation paresseuse lors de la vérification de la validité des chemins calculés par la méthode locale.

La complétude probabiliste , établie dans un premier temps [15] pour des systèmes holonomes et une méthode locale reliant deux configurations par une ligne droite, a été par la suite généralisée [37, 26] à tout système localement commandable pour lequel la longueur du chemin calculé par la méthode locale converge vers zéro lorsque le but se rapproche de la position initiale. Cette propriété, vérifiée par une large classe de systèmes, contribue à la généricité de ces méthodes.

Leur comportement reste cependant difficile à analyser d'un point de vue formel. Quelques résultats établis dans [5, 13, 18] montrent cependant que, sous réserve de certaines propriétés, la probabilité que le graphe ne rende pas correctement compte de la topologie de l'espace décroit exponentiellement avec le nombre de noeuds.

## 3 Roadmaps et Visibilité

Dans cette section, nous présentons une technique qui combine l'échantillonnage aléatoire avec une notion de visibilité. Cette technique [32] permet de réduire la complexité du graphe et de contrôler sa construction.

L'idée est de guider la couverture aléatoire de l'espace des configurations sans collision en exploitant la notion de visibilité (ou accessibilité) de la méthode locale utilisée pour relier deux configurations. Cette notion de visibilité est illustrée par la figure 3 qui montre les domaines de visibilité d'une configuration pour deux méthodes locales différentes: Linear qui relie deux configurations par un segment et Manhattan qui construit un chemin composé d'un segment horizontal et d'un autre vertical. Ces domaines de visibilité correspondent à l'ensemble des configurations atteignables en présence d'obstacles par un chemin local sans collision.

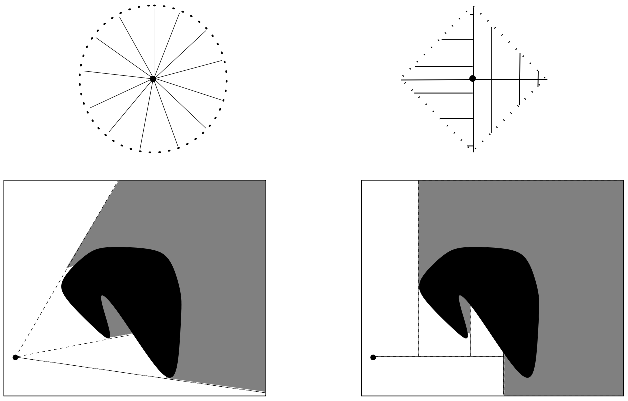

**Figure 3:** *Domaines de visibilité d'une configuration pour la méthode locale* Linear *(gauche) and* Manhattan *(droite).*

Plutôt que de garder toutes les configurations sans collision, l'algorithme proposé dans [34] utilise un pavage implicite de l'espace libre par ces domaines de visibilité pour ne retenir que des configurations qui améliorent la couverture de l'espace libre ou la connectivité du graphe. Le graphe ainsi construit est composé par deux types de noeuds: des *gardiens* dont les domaines de visibilité recouvrent l'espace libre mais qui ne se voient pas mutuellement, et des *connecteurs* visibles par au moins deux gardiens (i.e. situés dans l'intersection de leur domaine de visibilité) qui permettent d'établir les connections dans le graphe.

La figure 4 montre deux roadmaps calculées à partir

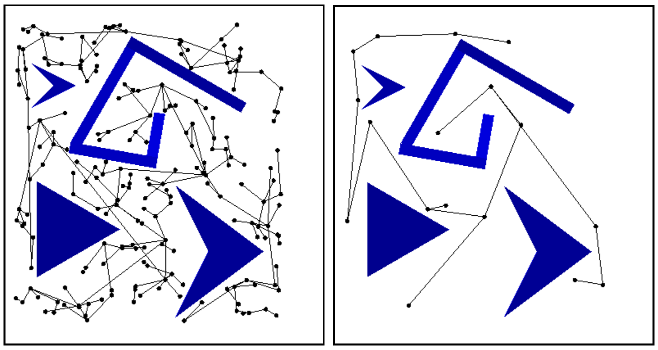

**Figure 4:** *Deux roadmaps issues du même échantillonnage: à gauche, tous les noeuds sont conservés, à droite seuls les gardiens et les connecteurs ont été conservés.*

d'une même liste de 250 configurations aléatoires. On peut noter que la roadmap de visibilité (à droite) capture la connectivité de l'espace dans une structure bien plus compacte. La taille réduite du graphe conduit à un gain significatif en temps calcul [34]. Cette taille est liée à la complexité du pavage de l'espace libre par des domaines de visibilité, et dépend de la méthode locale utilisée [25].

Le second avantage de l'approche est qu'elle permet de définir un critère d'arrêt explicite de l'algorithme dans sa phase d'apprentissage (calcul du graphe), critère absent des approches précédentes. Ce critère d'arrêt dépend de la qualité du graphe en terme de couverture de l'espace libre. La qualité de la couverture peut être estimée simplement à partir du nombre de configurations libres qui sont rejetées avant l'insertion d'un nouveau gardien. En effet, ce nombre d'échecs traduit la difficulté de trouver une configuration aléatoire qui ne soit pas déjà visible par la roadmap en cours de construction.

La courbe pleine de la Figure 5 montre l'évolution de cette estimation au fur et à mesure que de nouveaux gardiens sont insérés dans la roadmap. La comparaison avec la courbe en pointillés qui représente la couverture réelle de l'espace libre, montre que l'estimation converge rapidement vers la couverture réelle lorsque le nombre de gardiens augmente. Le graphe atteint une bonne courverture de l'espace lorsque la courbe devient horizontale.

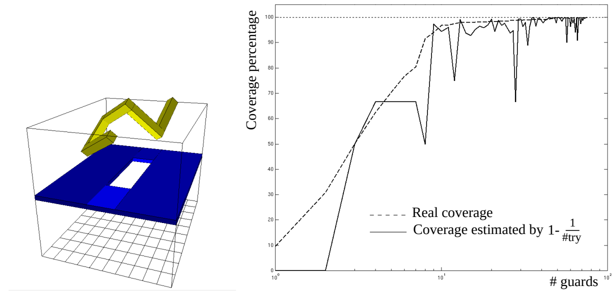


**Figure 5:** *Convergence de l'algorithme de visibilité pour un objet free-flying.*

## 4 Move3D

Cette section présente brièvement la plate-forme logicielle `Move3D` [35] développée au LAAS-CNRS [1] sur la base de ces techniques de planification probabilistes.

`Move3D` est une librairie d'algorithmes dédiés au mouvement. Sa principale caratéristique est sa généricité qui permet de résoudre aussi bien des problèmes issus de la robotique (robots manipulateurs, robots mobiles), de l'ingénierie assistée (logistique dans des installations industrielles) que de l'animation graphique (animation de personnages). Des exemples [2] illustrant ces différents champs applicatifs sont présentés dans la section suivante.

La figure 6 montre l'architecture globale de `Move3D`. La librairie intègre des fonctionnalités pour la modélisation de scènes et de systèmes mécaniques, des algorithmes de calculs géométriques de base (filtrage des données géométriques, calcul de distance et tests de collision performants dans des scènes complexes), des algorithmes permettant de synthétiser des méthodes locales tenant compte de la diversité des contraintes sur les mouvements des systèmes mécaniques (e.g. véhicules nonholonomes, couplage ou découplage de certaines articulations ...), et des algorithmes de planification généraux basés sur les techniques d'exploration probabilistes. La librairie offre également les fonction-

[1] `Move3D` est diffusée par `Kineo`, spin-off du LAAS-CNRS, `http://www.kineocam.com`.

[2] Voir `http://www.laas.fr/~nic` pour d'autres exemples et animations.

nalités nécessaires au prototypage rapide de nouveaux algorithmes de planification.

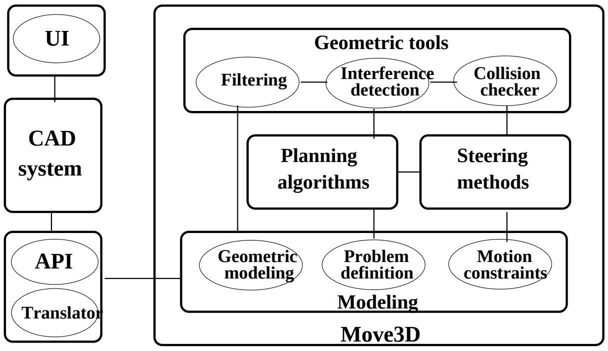


**Figure 6:** Architecture de Move3d

# 5 Applications

## 5.1 Application 1: Robotique mobile

*Hilare et sa remorque*

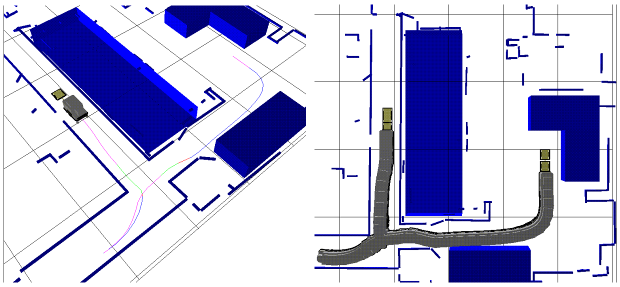

**Figure 7:** *Exemple de trajectoire planifiée puis exécutée par Hilare équipé d'une remorque*

Move3D est utilisée dans les projets de robotique mobile du LAAS-CNRS. La figure 7 montre un exemple de trajectoire calculée pour le système non-holonome constitué du robot mobile Hilare tractant une remorque dans un modèle de la salle d'expérimentation construit à partir du télémètre laser d'Hilare. Ce système non-holonome ne possède que deux degrés de liberté alors que son espace des configurations est de dimension quatre (3 paramètres de position et l'angle de la remorque). Dans cet exemple, la planification est réalisée en utilisant une méthode locale spécifique [22] produisant des chemins faisables pour ce type de système.

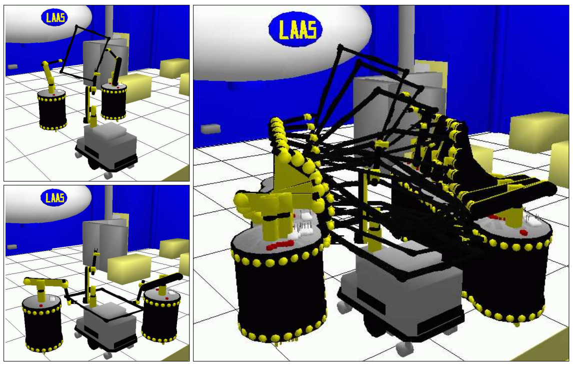

**Figure 8:** *Exemple de manipulation coordonnée*

La figure 8 montre un exemple de manipulation coordonnée d'un objet par deux manipulateurs mobiles possédant chacun 9 degrés de liberté. Les contraintes de manipulation coordonnée se traduisent par la présence d'une chaine cinématique fermée prise en compte par la méthode locale [10] utilisée pour construire le graphe. Ce problème est résolu en quelques secondes par l'algorithme de visibilité.

## 5.2 Application 2: CAO-IAO

Les exemples suivants sont issus du projet Européen MOLOG dédié à l'intégration de techniques de planification dans des systèmes de CAO utilisés en *IAO process* pour des opérations de logistique industrielle. Il s'agit d'automatiser la résolution des problèmes spécifiques qui se posent lors de la maintenance de ces installations et qui nécessitent le transport d'équipements lourds au moyen de divers outils de manutention (voir `http://www.laas.fr/~molog` and [36]).

Dans ces applications, le premier facteur de complexité est la complexité des bases de données géométriques. Le modèle du premier exemple qui représente une vue

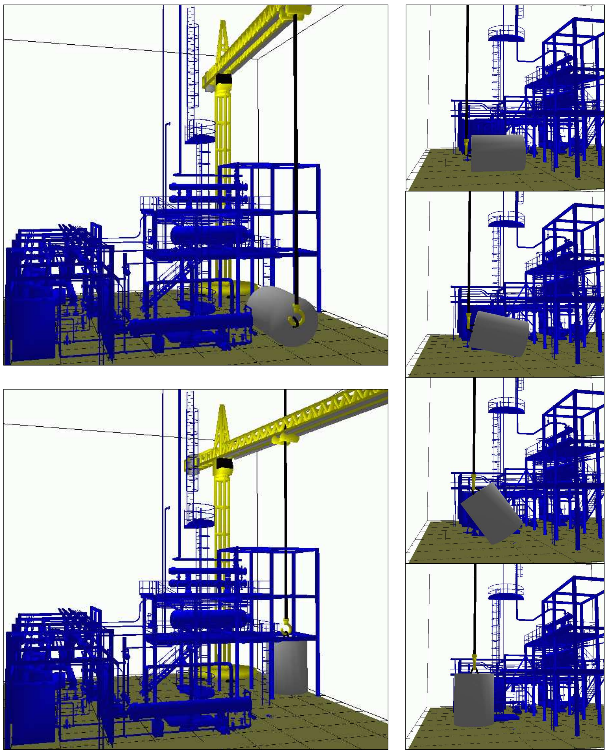

**Figure 9:** *Environnement "Stabilizer" (modèle fourni par Cadcentre)*

partielle d'une installation chimique contient plusieurs centaines de milliers de facettes. Il s'agit d'étudier la possibilité d'acheminer au moyen d'une grue, un réservoir à l'intérieur de la structure métallique. Ici la méthode locale produit des chemins `Manhattan` tenant compte des contraintes de découplage des degrés de liberté de la grue, ainsi que des mouvements contraints du réservoir qui glisse sur le sol avant d'atteindre sa position verticale.

Dans le second exemple, la tâche de maintenance consiste à remplacer la pompe du circuit de refroidissement dans une centrale nucléaire. La pompe est composée de trois éléments qui doivent être acheminés par un pont roulant à l'étage inférieur. La figure 10 montre la trajectoire de prise calculée pour le premier élément. Malgré la complexité géométrique de ces modèles, ces problèmes ont été résolus en une dizaine de minutes de calcul. En re-exploitant la structure du graphe calculé,

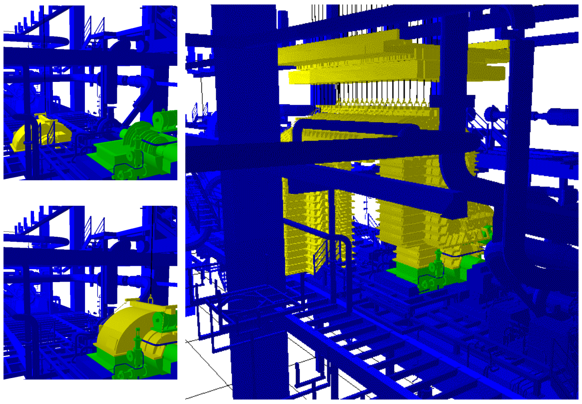

**Figure 10:** *Opération de maintenance dans une centrale nucléaire (modèle fourni par EDF)*

d'autres requêtes du même type prendraient quelques secondes.

### 5.3 Application 3: Animation graphique

Les techniques de planification peuvent également être appliquées pour automatiser la production d'animations d'artefacts virtuels dans des logiciels d'animation graphique. La figure 11 illustre la synthèse automatique des mouvements fins pour la prise d'un objet par un personnage. Dans cet exemple, la position finale n'est pas explicitement spécifiée par l'opérateur qui définit seulement la position approchée de la main. L'algorithme de planification permet alors de synthétiser le mouvement sans collision, incluant le calcul automatique de la position de prise [11].

Ici la difficulté réside dans la définition de méthodes efficaces de synthèse de mouvements réalistes (marche, saut, prise d'un objet,...) et dans la combinaison d'une librairie de mouvements élémentaires avec les algorithmes de planification afin de produire automatiquement des mouvements complexes impliquant le séquencement de comportements élémentaires sans collision (cadre du projet RNTL Nemove3D).

Enfin, on peut aussi mentionner l'intérêt potentiel de ces techniques pour la compression de mouvement dans des applications nécessitant la diffusion de mouvement interactif via internet. En effet, la faible taille des graphes produits par l'algorithme de visibilité [34]

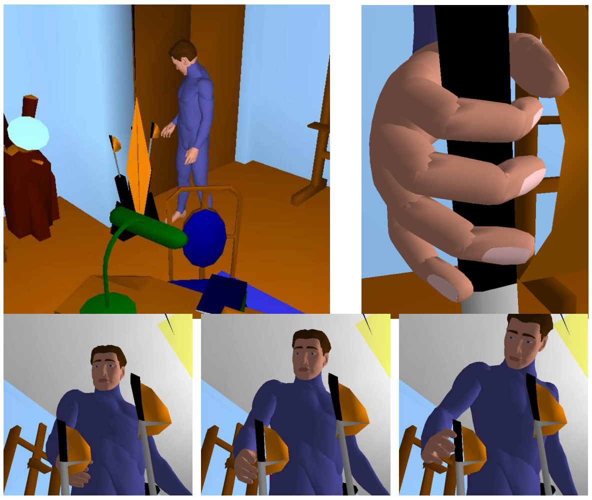

**Figure 11:** *Prise d'un sabre (modèle fourni par Dramaera)*

permet de représenter l'ensemble des mouvements admissibles dans une structure de données de quelques Koctets, qui une fois téléchargée permet de réaliser les mouvements interactifs d'un artefact dans son environnement 3D.

### 5.4 Application 4: Chimie

Ce champ applicatif plus inattendu est apparu très récemment suite aux progrès des techniques de modélisation moléculaire. En effet, la géométrie joue un rôle important pour la compréhension de mécanismes mettant en jeu des protéines, en particulier pour la prédiction de leur structure 3D ou de leur interaction avec des ligands (Figure 12). Ces problèmes constituent aujourd'hui un enjeu majeur pour l'exploitation, notamment par l'industrie pharmaceutique, des séquences de gènes dont la mise à disposition augmente de manière exponentielle.

On assiste depuis les deux dernières années à une montée en puissance de travaux menés aux Etats-Unis, visant à appliquer les techniques robotiques au contexte de la modélisation moléculaire (une session de la conférence ICRA2001 y est consacrée). La difficulté majeure de ce type d'applications réside dans la complexité combinatoire des structures protéiques qui sont modélisées par des chaines cinématiques pouvant posséder plusieurs centaines de degrés de libertés. Seules les approches par échantillonnage sont envisageables face à la complexité de telles structures.

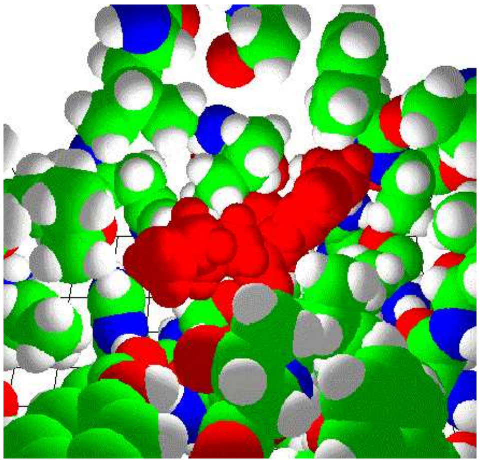

**Figure 12:** Interaction d'un ligand sur un recepteur proteique (lipase): accessibilité géométrique du site récepteur testée avec `Move3D`

## 6 Retour vers le déterminisme

Le succès des méthodes de planification de mouvement par échantillonnage aléatoire s'explique par leur généricité et par leur capacité à attaquer des problèmes de grande dimension. L'efficacité de ces méthodes reste cependant mieux constatée que comprise. La modélisation formelle du comportement en moyenne de ces algorithmes est un problème difficile.

Des travaux très récents [9] montrent que l'échantillonnage aléatoire n'est pas la stratégie optimale d'echantillonnage. Les générateurs de nombres aléatoires produisent en fait une séquence déterministe de nombres calculés de manière à satisfaire un critère de densité de probabilité uniforme. On peut alors se demander si d'autres séquences déterministes ne permettraient pas de résoudre plus efficacement le problème. D'ou l'idée explorée dans [9] d'utiliser des techniques "quasi-aléatoires" dont l'efficacité a déjà été démontrée dans plusieurs domaines, en particulier celui de l'optimisation avec les méthodes de type Quasi-Monte-Carlo.


**Figure 13:** *Echantillonnage aléatoire (gauche) vs. quasi-aléatoire (droite) [9]*

La figure 13 montre deux roadmaps de taille identique et calculées avec le même algorithme. La roadmap de droite est obtenue en utilisant un générateur quasi-aléatoire basé sur des points de l'ensemble de Hammersley [30]. Ces points présentent une dispersion plus faible qu'un ensemble de point aléatoires, ce qui se traduit par une meilleure couverture de l'espace. De plus, la roadmap est identique à chaque génération et les tests réalisés sur plusieurs exemples montrent que le temps de construction est plus faible que la moyenne d'une génération aléatoire.

Ces résultats récents permettent d'envisager une évolution possible vers des techniques déterministes offrant les avantages des méthodes probabilistes, mais vérifiant une forme de complétude approchée, plus forte que la complétude probabiliste. La qualification plus formelle du comportement de ces méthodes reste cependant à établir.

## References


[1] J.M. Ahuactzin, K.K. Gupta and E. Mazer. Manipulation planning for redundant robots: a practical approach. In *Practical Motion Planning in Robotics*, K.K. Gupta and A.P. Del Pobil (Eds), J. Wiley, 1998.

[2] N. Amato, O Bayazit, L. Dale, C. Jones and D. Vallejo. OBPRM: an obstacle-based PRM for 3D workspaces. *Robotics: The Algorithmic Perspective (WAFR98)*, P. Agarwal and all (Eds), AK Peters 1998.

[3] E. Anshelevich, S. Owens, F. Lamiraux, L. Kavraki. Deformable Volumes in path planning applications. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco (USA), 2000.

[4] J. Barraquand and J.C. Latombe. Robot motion planning: a distributed representation approach. *International Journal of Robotics Research*, Vol 10 (6), 1991.

[5] J. Barraquand, L. Kavraki, J.C. Latombe, T.Y. Li, R. Motvani and P. Raghavan. A random sampling scheme for path planning. *International Journal of Robotics Research*, Vol 16 (6), 1997.

[6] P. Bessiere, J. Ahuactzin, T, El-Ghazali and E. Mazer. The "Ariane's clew" algorithm: Global planning with local methods. In *IEEE International Conference on Robots and Systems*, 1993.

[7] R. Bohlin and L. Kavraki. Path planning using lazy PRM. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco (USA), 2000.

[8] V. Boor, M. Overmars and A. Frank van der Stappen. The Gaussian sampling strategy for probabilistic roadmap planners. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Detroit (USA), 1999.

[9] M. Branicky, S. Lavalle, K. Olson and L. Yang. Quasi-randomized path planning. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Seoul(Korea), 2001.

[10] J. Cortes, T. Siméon and J.P. Laumond. A Random Loop Generator for planning the motions of closed kinematic chains with PRM methods. submitted to *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2002.

[11] T. Gaudin. Synthèse de mouvement pour un personnage animé. Master Thesis, LAAS-CNRS, Toulouse, November 2000 (in french).

[12] L. Han and N. Amato. A kinematics-based probabilistic roadmap method for closed kinematic chains. In *Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics*, 2000.

[13] D. Hsu, J.C. Latombe and R. Motwani. Path planning in expansive configuration spaces. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Albuquerque (USA), 1997.

[14] D. Hsu, L. Kavraki, J.C. Latombe, R. Motwani and S. Sorkin. On finding narrow passages with probabilistic roadmap planners. *Robotics: The Algorithmic Perspective (WAFR98)*, P. Agarwal et al (Eds), AK Peters, 1998.

[15] L. Kavraki. Random networks in configuration spaces for fast path planning. PhD Thesis, Dept of Computer Science, Stanford University, 1995.

[16] L. Kavraki and J.C. Latombe. Randomized preprocessing of configuration space for fast path planning. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Diego (USA), 1994.

[17] L. Kavraki, P. Švestka, J.C. Latombe and M.H. Overmars. Probabilistic Roadmaps for Path Planning in High-Dimensional Configuration Spaces, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol 12 (4), 1996.

[18] L. Kavraki, M. Kolountzakis and J.C. Latombe. Analysis of Probabilistic Roadmaps for Path Planning, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol 14 (1), 1998.

[19] R. Kindel, D. Hsu, JC Latombe, and S. Rock. Kinodynamic Motion planning amidst Moving Obstacles. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco (USA), 2000.

[20] L. Kavraki and J.C. Latombe. Probabilistic roadmaps for robot path planning. *Practical Motion Planning in Robotics*, K. Gupta and A. del Pobil (Eds), Wiley Press, 1998.

[21] J. Kuffner and S.M. La Valle. RRT-Connect: An efficient Approach to Single-Query Path Planning. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco (USA), 2000.

[22] F. Lamiraux and JP. Laumond. Flatness and small-time controllability of multi-body mobile robots: application to motion planning. *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol 45(10), 2000.

[23] J.C. Latombe. *Robot Motion Planning*. Kluwer Academic Publishers, 1991.

[24] J.C. Latombe. Motion planning: a journey of robots, molecules, digital actors, and other artifacts. *The International Journal of Robotics Research*, Vol 18 (11), 1999.

[25] JP. Laumond, T. Siméon. Notes on visibility roadmaps for motion planning. *Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics.(WAFR'00), Hannover (USA)*, March 2000.

[26] J.P. Laumond, F. Lamiraux and S. Sekhavat. Guidelines in nonholonomic motion planning. In *Robot Motion Planning and Control, LNCS 229, Springer Verlag*, 1998.

[27] S. LaValle, J.H. Yakey, and L. Kavraki. A probabilistic roadmap approach for systems with closed kinematic chains. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1999.

[28] S. LaValle and J.J. Kuffner. Randomized Kinodynamic planning. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1999.

[29] M. Lin, D. Manocha, J. Cohen and S. Gottschalk. Collision detection: Algorithms and applications. *Algorithms for Robotic Motion and Manipulation (WAFR96)*, JP. Laumond and M. Overmars (Eds), AK Peters, 1997.

[30] J. Matousek. Geometric discrepancy: an illustrated guide. Springer, 1999.

[31] Ch. Nielsen, L. Kavraki. A two-level fuzzy PRM for manipulation planning. In *IEEE International Conference on Intelligent Robots and systems*, Japan, 2000.

[32] C. Nissoux. Visibilité et méthodes probabilistes pour la planification de mouvement en robotique. *PdD Thesis (in french), University Paul Sabatier, Toulouse, 1999.*

[33] M. Overmars and P. Švestka. A Probabilistic learning approach to motion planning. *Algorithmic Foundations of Robotics (WAFR94)*, K. Goldberg et al (Eds), AK Peters, 1995.

[34] T. Siméon, J.P. Laumond and C. Nissoux. Visibility-based probabilistic roadmaps for motion planning. Advanced Robotics Journal 14(6), 2000 (a short version appeared in IEEE IROS, 1999).

[35] T. Siméon, JP. Laumond, F. Lamiraux. Move3D: a generic platform for motion planning. 4th Internation Symposium on Assembly and Task Planning, Japan, 2001.

[36] T. Siméon, JP. Laumond, C. van Geem and J. Cortes. Computer Aided Motion: Move3D within MOLOG. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Seoul (Korea), April 2001.

[37] P. Švestka. Robot motion planning using probabilistic road maps. PhD Thesis, Dept of Computer Science, Utrecht University, 1997.

[38] P. Svestka & M. Overmars. Coordinated Motion Planning for Multiple Car-Like Robots Using Probabilistic Roadmaps. In IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Nagoya (Japan), 1995.