

# Table des matières

- [Introduction à la régulation automatique \(notes de cours\)](#)
  - [Régulation automatique: tentative de définition](#)
  - [Exemples introductifs](#)
    - [Régulation automatique de température](#)
    - [Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC à excitation séparée constante](#)
  - [Éléments et signaux caractéristiques d'un système de régulation automatique](#)
    - [Blocs fonctionnels et sous-systèmes](#)
    - [Signaux](#)
    - [Entrées/sorties](#)
    - [Unités physiques des signaux](#)
  - [Régulation de correspondance et régulation de maintien](#)
  - [Problèmes fondamentaux des systèmes de régulation automatique](#)
    - [Stabilité](#)
    - [Précision et rapidité](#)
    - [Dilemme stabilité-précision](#)
  - [Principe de la régulation numérique](#)
  - [Généralités sur les systèmes](#)
    - [Comportement dynamique](#)
    - [Comportement statique](#)
    - [Système statique](#)
    - [Système dynamique](#)
    - [Système linéaire](#)

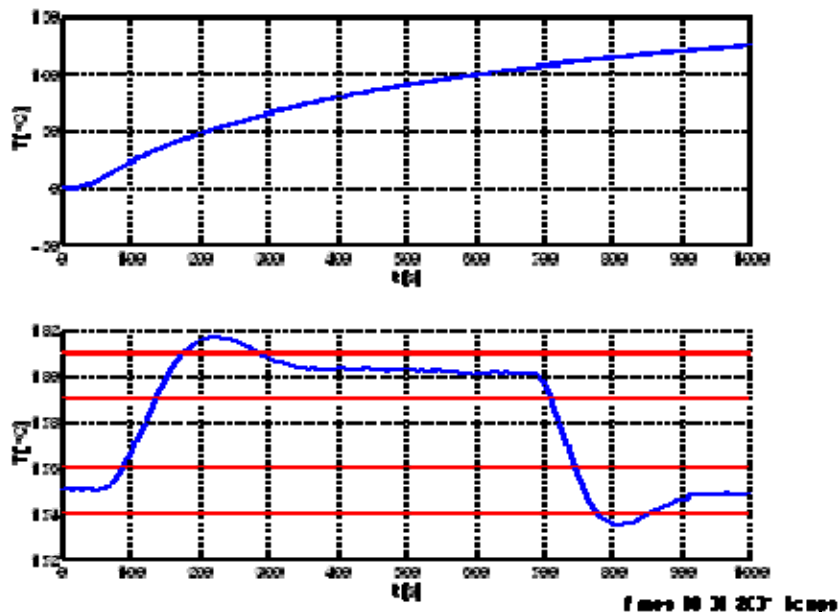
## Régulation automatique: tentative de définition

La régulation automatique est la technique de l'ingénieur offrant les méthodes/outils nécessaires à la prise de contrôle d'un système physique (installation de production, robot, alimentation électronique stabilisée, etc) en vue d'en imposer le comportement. Cette prise de contrôle s'effectue par l'intermédiaire de certains signaux (grandeurs physiques) qu'il est alors nécessaire de mesurer afin de déterminer l'action à entreprendre sur le système. Le contrôle est automatique, i.e. aucune intervention humaine n'est nécessaire.

Le comportement des grandeurs contrôlées peut/doit en général satisfaire plusieurs critères:

- on souhaite qu'une certaine grandeur physique (vitesse, courant, température) ait une valeur moyenne donnée en régime permanent
- cette même grandeur physique doit passer d'une valeur à une autre en un temps donné, voire avec un profil de variation imposé.

Les méthodes de l'automatique offrent donc la possibilité de modifier le comportement statique et dynamique d'une grandeur physique, afin qu'elle évolue conformément aux exigences de l'application.



**Figure:** Régulation de la température d'un processus industriel: en haut, la réponse indicielle du système seul, en bas la réponse indicielle en régulation automatique. On voit que l'on arrive à rendre le système beaucoup plus rapide (*mes\_10\_01\_2001.m*).

En s'appuyant notamment sur la technique de la contre-réaction, les méthodes de l'automatique permettent de traiter des situations où interviennent des systèmes

- intrinsèquement lents devant être rendus plus rapides (figure 1.1);
- difficilement contrôlables manuellement (sustentation et lévitation magnétique, avion de chasse à voilure inversée) devant être rendus stables afin d'être utilisables.

Les applications de la régulation automatique se trouveront donc dans tous les systèmes dont une (ou plusieurs) grandeur physique doit correspondre à une valeur prescrite (température, pH, débit, pression, courant, vitesse, force, altitude, profondeur, orientation, etc), laquelle pouvant être variable, et cela sans intervention humaine, i.e. de manière complètement automatique.

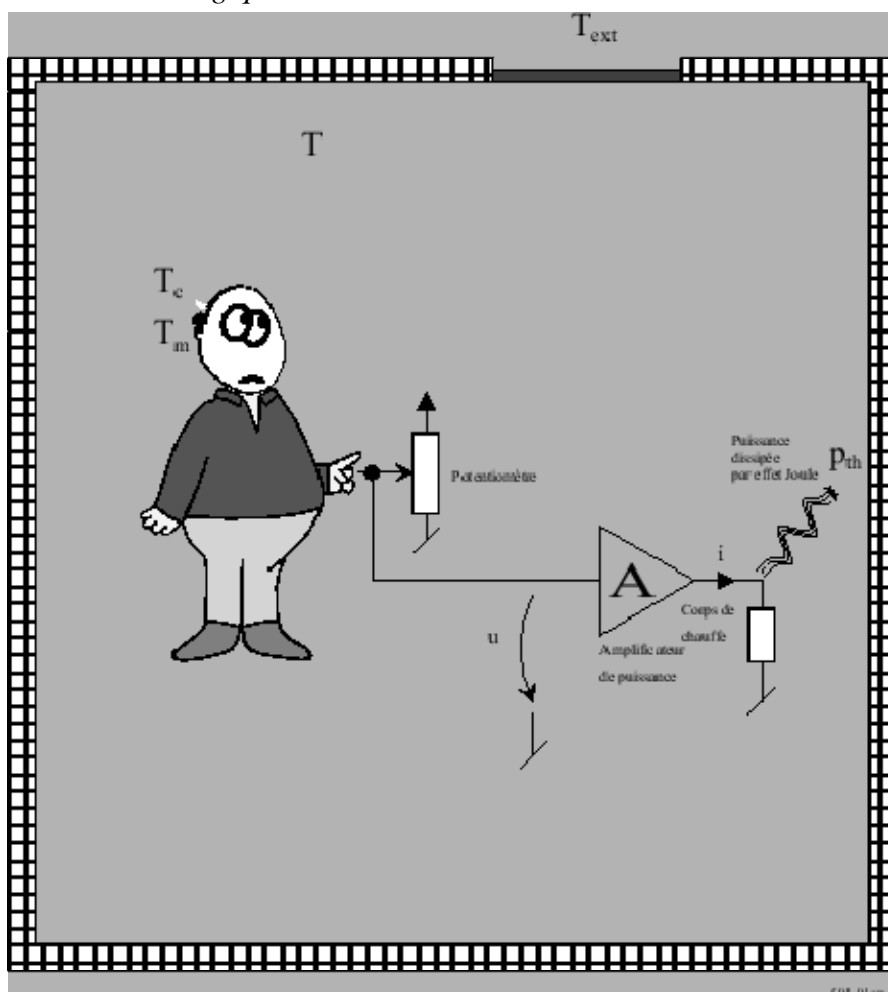
## Exemples introductifs

On présente ci-dessous quelques exemples de systèmes de régulation automatique, que l'on appelle aussi systèmes asservis.

## Régulation automatique de température

### Régulation manuelle de température: schéma technologique

La figure 1.2 représente schématiquement une installation permettant de faire une régulation manuelle de température. L'opérateur agit sur un potentiomètre pour ajuster la tension de commande de l'amplificateur de puissance, lequel alimente un corps de chauffe électrique. Comme les éléments dessinés représentent assez explicitement des dispositifs dépendant de la réalisation technique de l'installation (par exemple corps de chauffe électrique et non à gaz), on parle de *schéma technologique*.



**Figure:** Régulation manuelle de température:  $T_c$  est la température de consigne, i.e. la température souhaitée,  $T$  la température effective en  $^{\circ}$ . L'opérateur souhaite que  $T$ , du moins la température  $T_m$  qu'il perçoit sensoriellement, coïncide avec  $T_c$ . Il agit pour cela sur le potentiomètre afin d'ajuster la puissance thermique dissipée dans la résistance du corps de chauffe (*f\_01.dsf*).

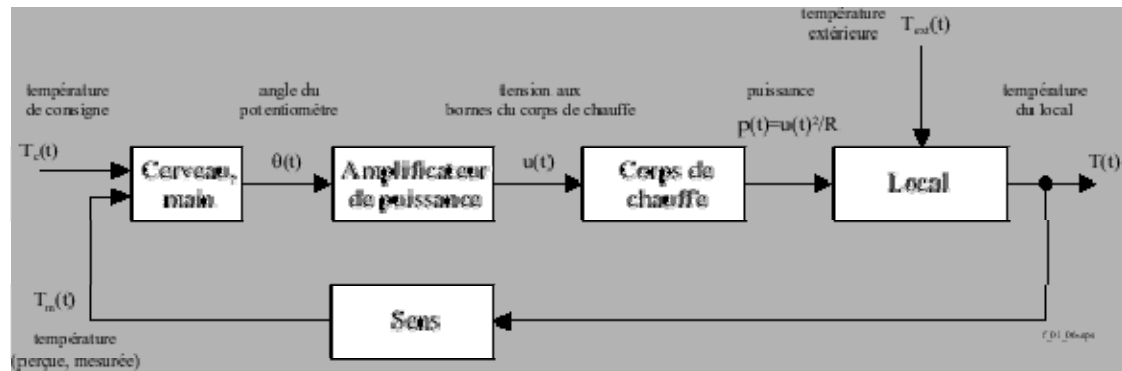
## Régulation manuelle de température: représentation par schéma fonctionnel

On peut représenter le principe de la régulation manuelle de température par un *schéma fonctionnel*, i.e. découper logiquement la fonction globale "régulation manuelle de température" en une série de fonctions plus simples, en indiquant également la nature de l'information (signal) entrant et sortant de chacune d'entre-elles.

En se livrant à cet exercice pour le schéma technologique de la figure 1.2, on peut a priori identifier les fonctions suivantes:

- volume d'air du local (entrée puissance de chauffage, sortie température)
- corps de chauffe (entrée tension, sortie puissance)
- amplificateur de puissance (entrée commande de tension, sortie tension amplifiée en puissance)
- mesure de température (entrée température, sortie estimation de température)
- traitement de la mesure et action sur le potentiomètre

Graphiquement, le schéma fonctionnel peut donc prendre la forme de la figure 1.3.



**Figure:** Représentation par schéma fonctionnel du mode de fonctionnement de l'opérateur en

cas de régulation manuelle: l'opérateur compare la température de consigne  $T_c$ ,

i.e. la température souhaitée, avec la température mesurée (perçue)  $T_m$ , image aussi fidèle que possible de la température réelle  $T$  (cela dépend de la qualité du capteur). En fonction du résultat de la comparaison, l'opérateur agit sur le potentiomètre, ce qui modifie la tension  $u$  aux bornes du corps de chauffe, la puissance dissipée et finalement la température du local.

On observe que le schéma fonctionnel de la figure 1.3 fait déjà apparaître une

boucle: la température mesurée  $T_m$  apparaît en effet

- au **départ** de l'action sur le potentiomètre;
- également comme **conséquence** de cette action.

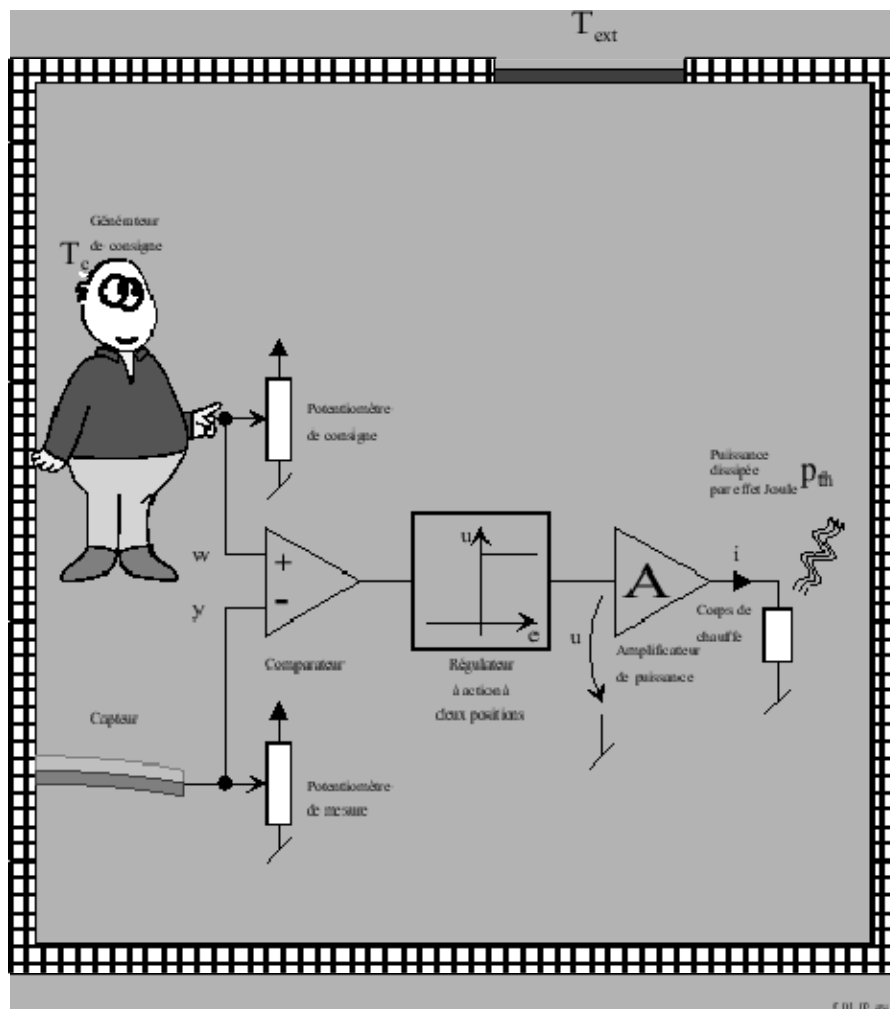
On dit que la température mesurée  $T_m$  est **contre-réactionnée**. Le système de la figure 1.3 présente donc une contre-réaction (feedback, Rückführung).

## Adaptation du principe de régulation manuelle en vue d'une automatisation

Il y a plusieurs raisons justifiant l'intérêt à remplacer l'opérateur par un système entièrement automatique:

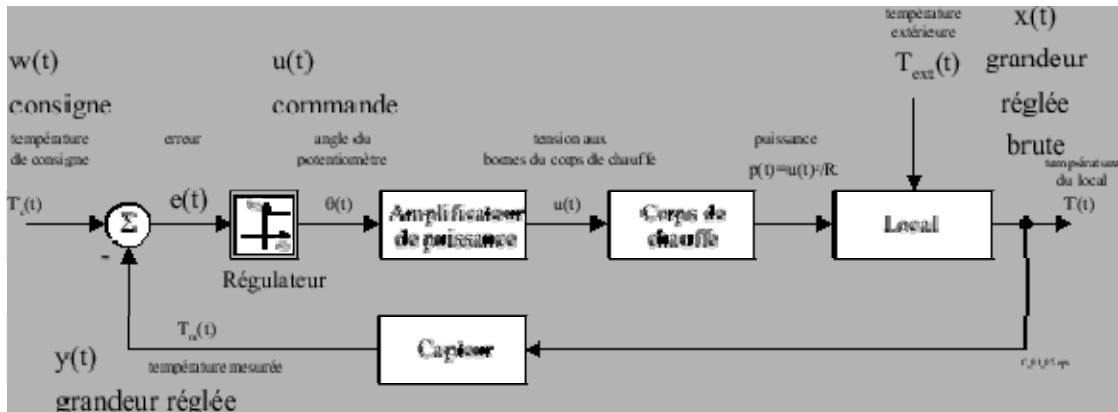
- coût
- fiabilité
- rapidité
- sécurité/confort de l'opérateur (atmosphère de travail par exemple explosive, toxique, etc)
- sécurité de l'installation elle-même

Se basant sur les schémas technologique et fonctionnel des figures [1.2](#) et [1.3](#), on les transforme en vue de rendre la régulation de température complètement automatique (figures [1.4](#) et [1.5](#)).



**Figure:** Schéma technologique d'une régulation automatique de température: le rôle de l'opérateur se limite maintenant à fixer la consigne de température  $T_c$ , la comparaison avec la température mesurée  $T_m$  par un capteur ad hoc (ici un bilame) étant effectuée par un dispositif appelé **régulateur** qui se charge d'agir sur le corps de chauffe. Ici le régulateur a un comportement de type tout-ou-rien, que l'on nomme parfois régulateur à action à deux

positions: si l'erreur de température est en-dessous d'une certaine limite, on impose  $0[V]$  aux bornes du corps de chauffe, sinon, s'il fait trop froid, on applique la tension maximale.



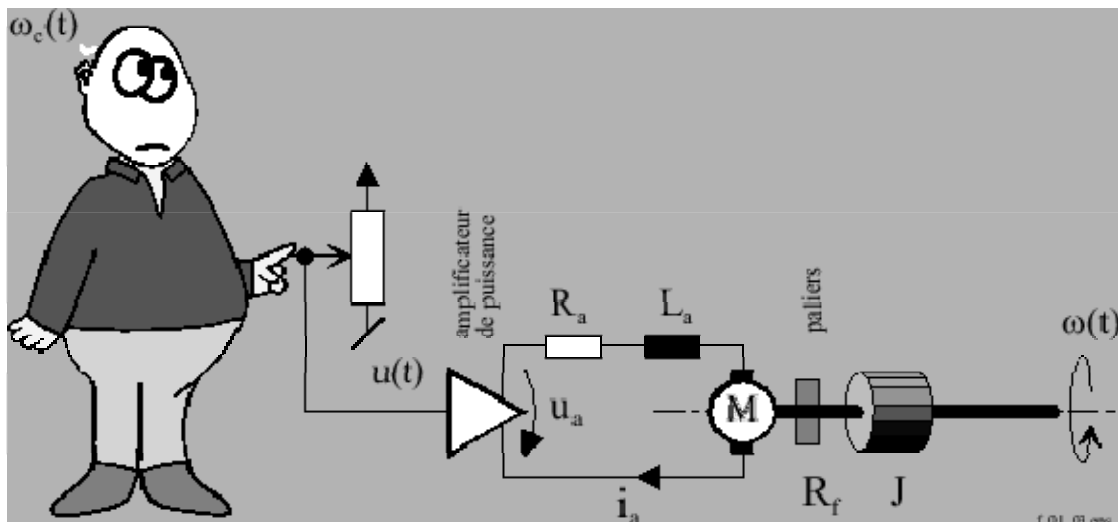
**Figure:** Représentation par schéma fonctionnel du mode de fonctionnement d'une régulation automatique de température.

## Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC à excitation séparée constante

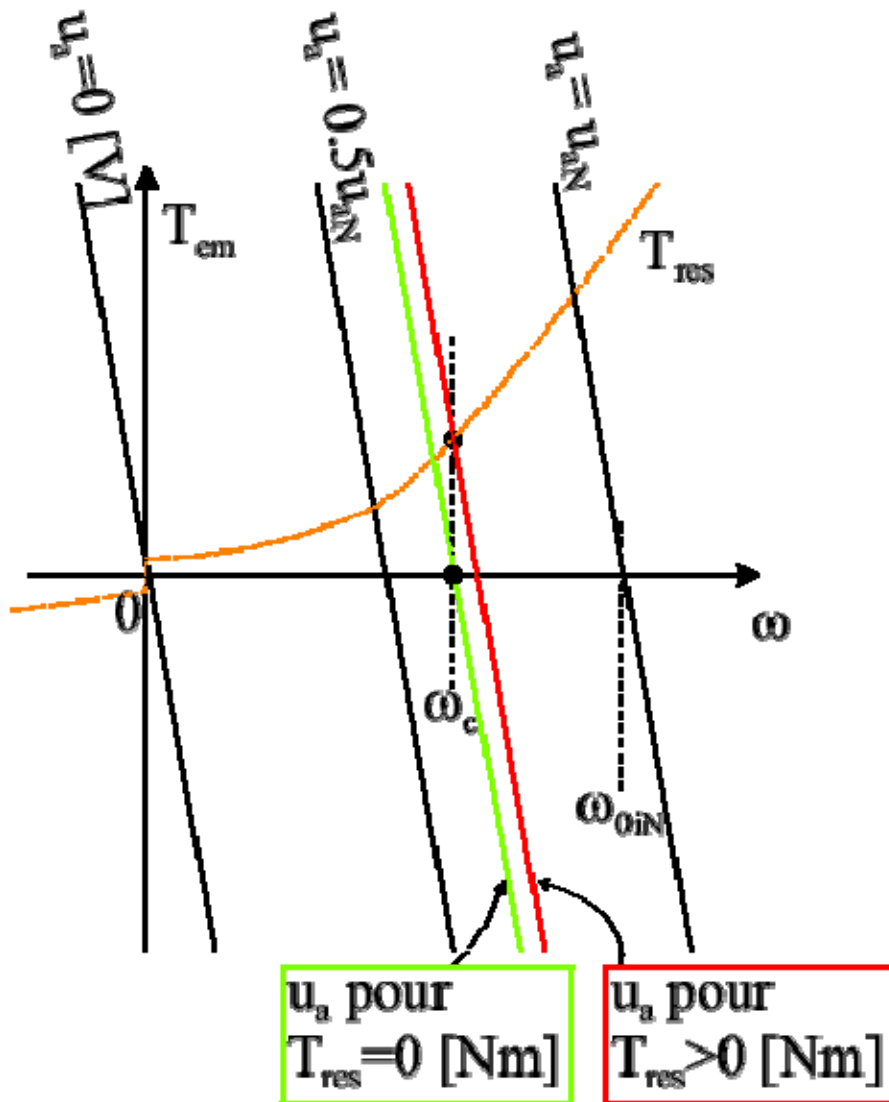
### Régulation manuelle

Le but de la régulation de vitesse, manuelle ou automatique, est de garantir que la vitesse  $\omega$  corresponde à la vitesse de consigne, i.e. la vitesse souhaitée, malgré la présence de couple

résistant  $T_{res}$ .



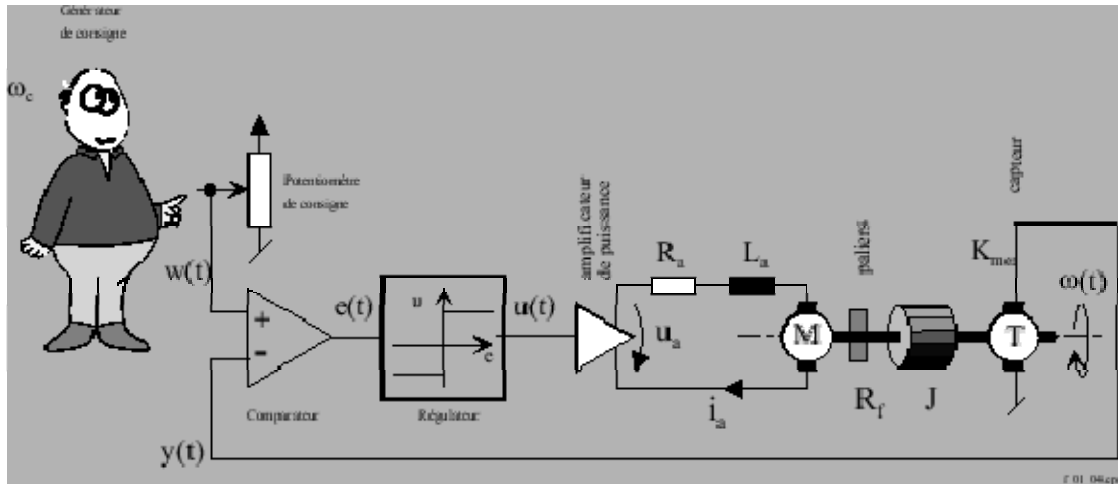
**Figure:** Régulation manuelle de la vitesse d'un moteur DC: l'opérateur estime (mesure) la vitesse de rotation  $\omega$ , la compare avec la vitesse de consigne  $\omega_c$  et ajuste la tension  $u_a$  aux bornes de l'induit par le biais du potentiomètre. Pour la mesure de vitesse, il peut bien sûr disposer d'une appareil ad hoc.



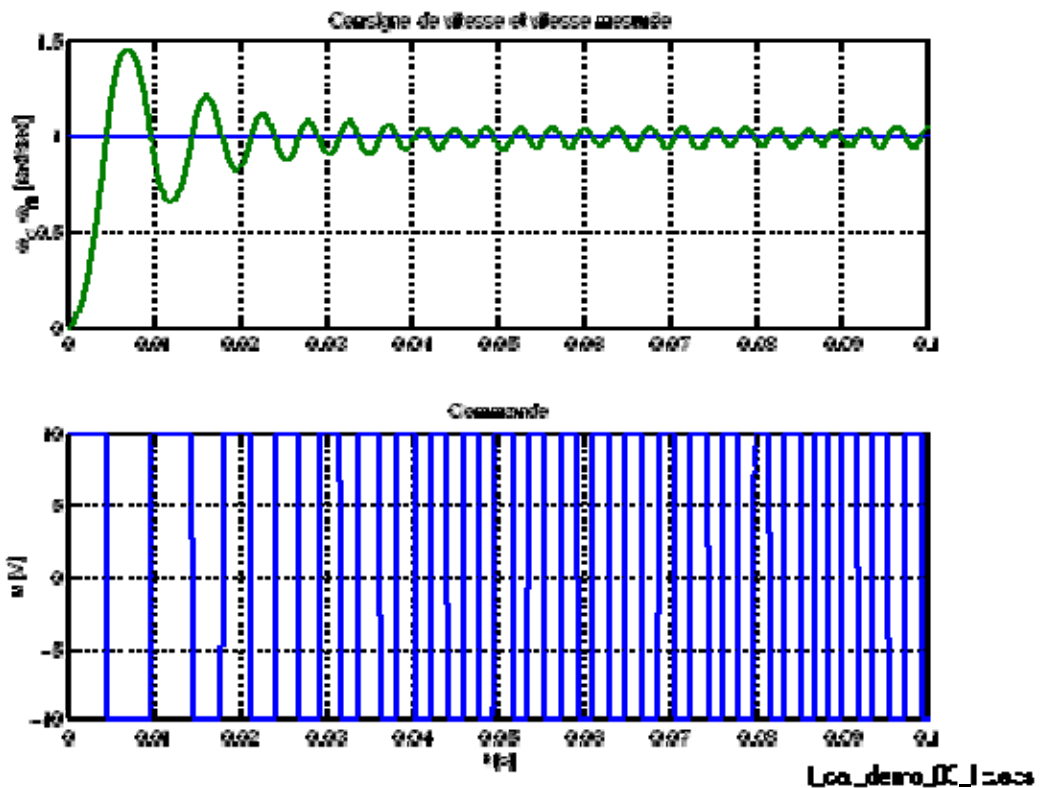
**Figure:** Caractéristique couple ( $T_{em} [N \cdot m]$ )-vitesse ( $\omega [\frac{rad}{s}]$ ), régime permanent constant, d'un moteur DC à excitation séparée constante: on observe que la vitesse de rotation  $\omega$  peut être ajustée en modifiant la tension  $u_a$  aux bornes de l'induit. Pour qu'elle corresponde à  $\omega_c$ , il faut que la tension soit ajustée à des valeurs différentes selon le niveau de couple résistant (frottement sec et visqueux, etc): ici sont illustrés les cas où  $T_{res} = 0 [N \cdot m]$  et  $T_{res} > 0 [N \cdot m]$

. Le symbole  $T$  est utilisé ici comme étant la première lettre de "torque", i.e. couple en anglais.

## Régulation automatique



**Figure:** Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC: l'opérateur est remplacé par un régulateur, ici de type à action à deux positions. La mesure  $y(t)$  de la vitesse de rotation  $\omega$  est réalisée au moyen d'un capteur (ici une dynamo-tachymétrique). La mesure  $y(t)$  est contre-réactionnée et comparée à la consigne  $w(t)$ , l'erreur  $e(t) = w(t) - y(t)$  est construite et détermine l'action, i.e. la commande  $u(t)$  que le régulateur va entreprendre en vue de l'annuler.

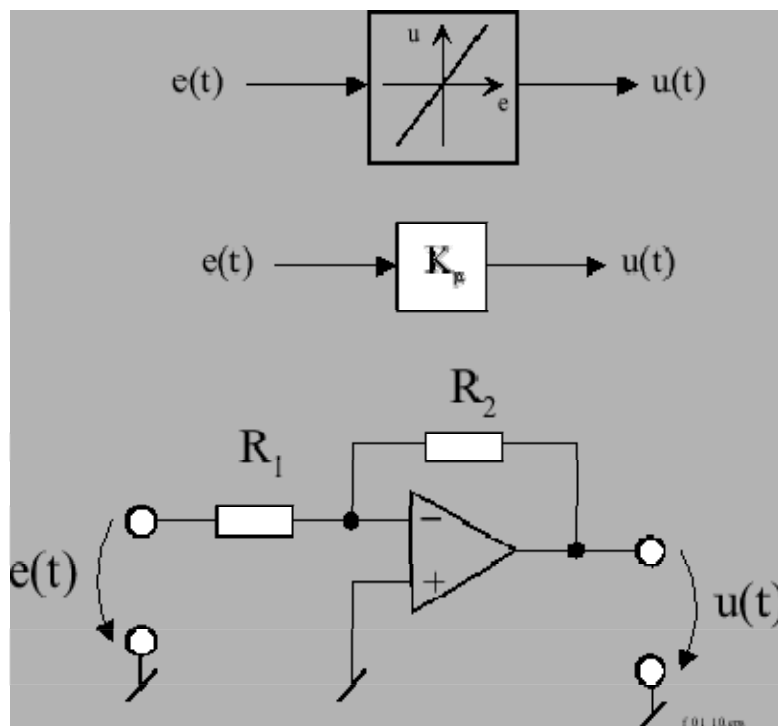


**Figure:** Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC, avec régulateur à action à deux positions (Demo\_03.mdl, cal\_Demo\_03.m). La mesure  $\omega_m$  de vitesse de rotation  $\omega$  coïncide, en

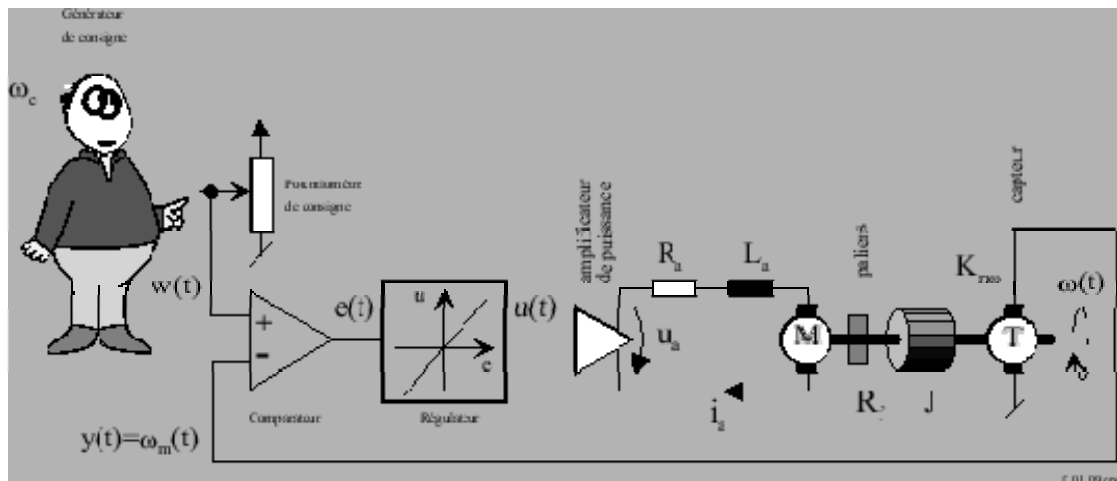


régime permanent constant, avec la consigne  $\omega_c$ , qui a ici la forme d'un saut unité, mais au prix d'une commande  $u$  commutant à une fréquence tendant vers l' $\infty$ . La dérivée de la vitesse, i.e. l'accélération, changeant de signe à fréquence élevée, la mécanique peut en souffrir (usure prématurée, augmentation des jeux de transmissions, etc). Une alternative au régulateur à action à deux positions consiste à utiliser un *régulateur à action proportionnelle*, lequel applique une commande proportionnelle à l'erreur  $e(t)$ . On l'appelle régulateur P:

$$u(t) = K_p \cdot e(t)$$



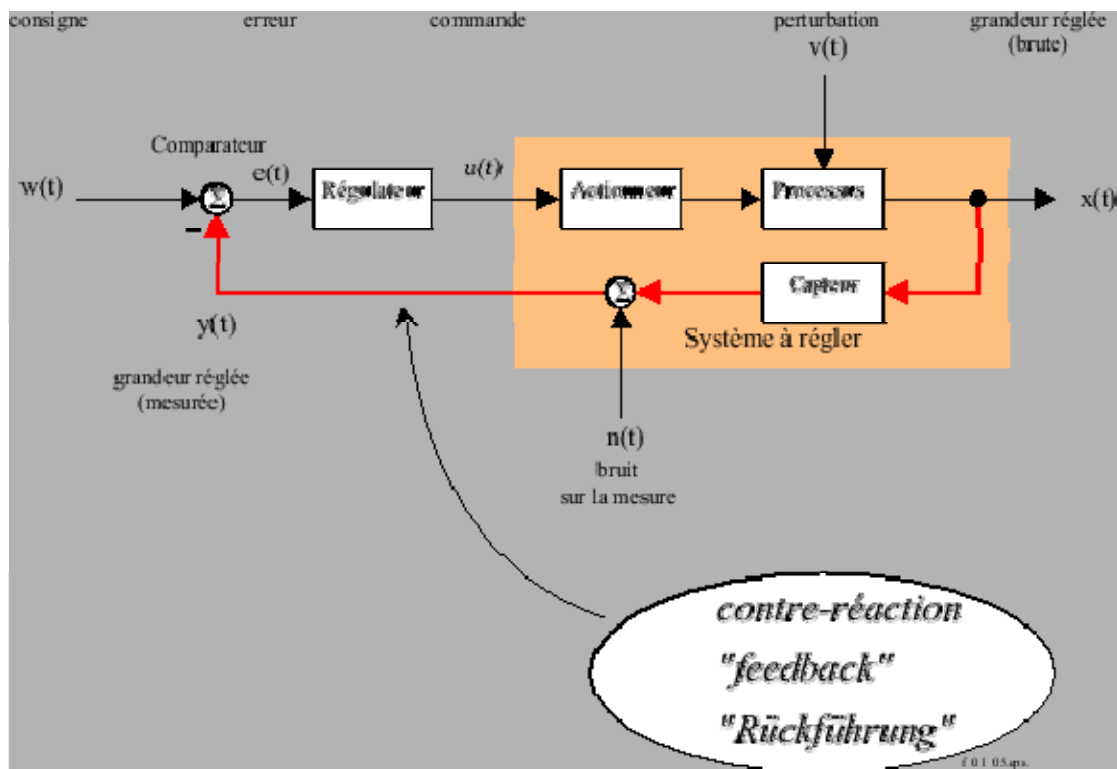
**Figure:** Schéma fonctionnel d'un régulateur P et schéma de principe (schéma technologique) de sa réalisation électronique.



**Figure:** Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC: le régulateur est ici de type proportionnel, ce qui signifie que la commande  $u(t)$  délivrée par le régulateur est proportionnelle à l'erreur  $e(t)$ .

**Figure:** Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC, avec régulateur P,  $K_p = 0.5$  (Demo\_02.mdl, cal\_Demo\_02.m). La commande ne varie pas aussi brutalement qu'avec un régulateur à action à deux positions, mais la grandeur réglée (mesure)  $w_m$  ne coïncide pas parfaitement avec la consigne  $w_e$  en régime permanent constant. Il subsiste ce qu'on appelle une **erreur statique** de valeur  $E_{\infty}$ .

## Éléments et signaux caractéristiques d'un système de régulation automatique



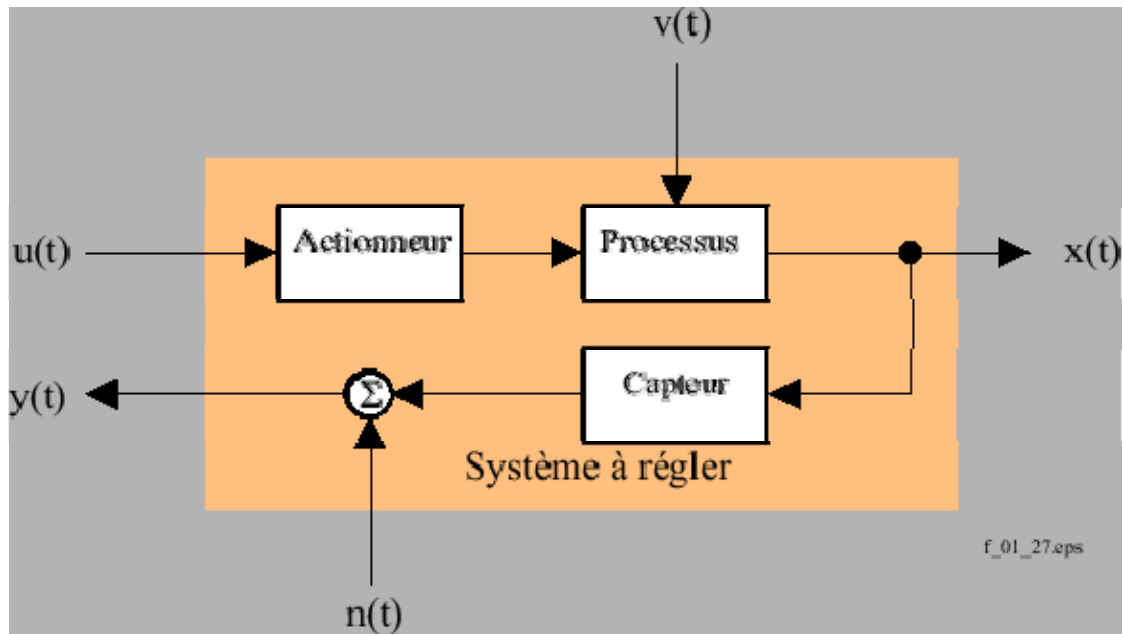
**Figure:** Schéma fonctionnel mettant en évidence les éléments et signaux caractéristiques d'un système de régulation automatique.

# Blocs fonctionnels et sous-systèmes

**Tableau:** Blocs fonctionnels et sous-systèmes.

Élément	Fonction
Comparateur	Construit le signal d'erreur $e(t) = w(t) - y(t)$
Régulateur	Traite le signal d'erreur $e(t)$ et en déduit le signal de commande $u(t)$ destinée à diminuer $e(t)$
Amplificateur de puissance	Amplifie en puissance le signal de commande $u(t)$ de façon à ce qu'il soit applicable au processus
Processus	Installation à asservir
Capteur	Forme une image $y(t)$ aussi fidèle que possible de la grandeur réglée brute $x(t)$

On note qu'avec le schéma adopté, le **système à régler** comprend tous les éléments (actionneur, processus, capteur, etc) se trouvant entre la commande  $u(t)$  délivrée par le régulateur et la grandeur réglée (mesurée)  $y(t)$ , y compris le capteur (figure [1.14](#)).



**Figure:** Système à régler.

## Signaux

**Tableau:** Signaux principaux d'un système de régulation automatique.

Signal	Notation	Remarques
Consigne	$w(t)$	Signal à poursuivre, à caractère généralement déterministe, par opposition à aléatoire: ce signal est défini pour une application donnée
Grandeur réglée mesurée	$y(t)$	Image de la "vraie" grandeur réglée fournie par le capteur, i.e. image de la grandeur réglée brute $x(t)$ . C'est la seule information dont dispose le régulateur, lequel asservit donc en réalité la grandeur réglée mesurée $y(t)$ et non directement la grandeur réglée brute $x(t)$ . C'est pourquoi la qualité de la mesure (capteur et traitement) est primordiale en automatique
Grandeur réglée brute	$x(t)$	Grandeur physique réglée, dans son unité physique propre ( $\left[ \frac{m\dot{c}}{s} \right]$ , $[^{\circ}C]$ , etc).

		Seule une image peut en être obtenue, par l'intermédiaire d'un capteur
Commande	$u(t)$	Signal délivré par le régulateur au système à régler. Ce signal doit normalement tendre à faire diminuer l'erreur
Perturbation	$v(t)$	Signal aléatoire représentant les perturbations intervenant sur le système à régler
Bruit sur la mesure	$n(t)$	Signal aléatoire représentant le bruit intervenant sur la mesure
Erreur ou écart	$e(t)$	Différence entre consigne $w(t)$ et grandeur réglée $y(t)$

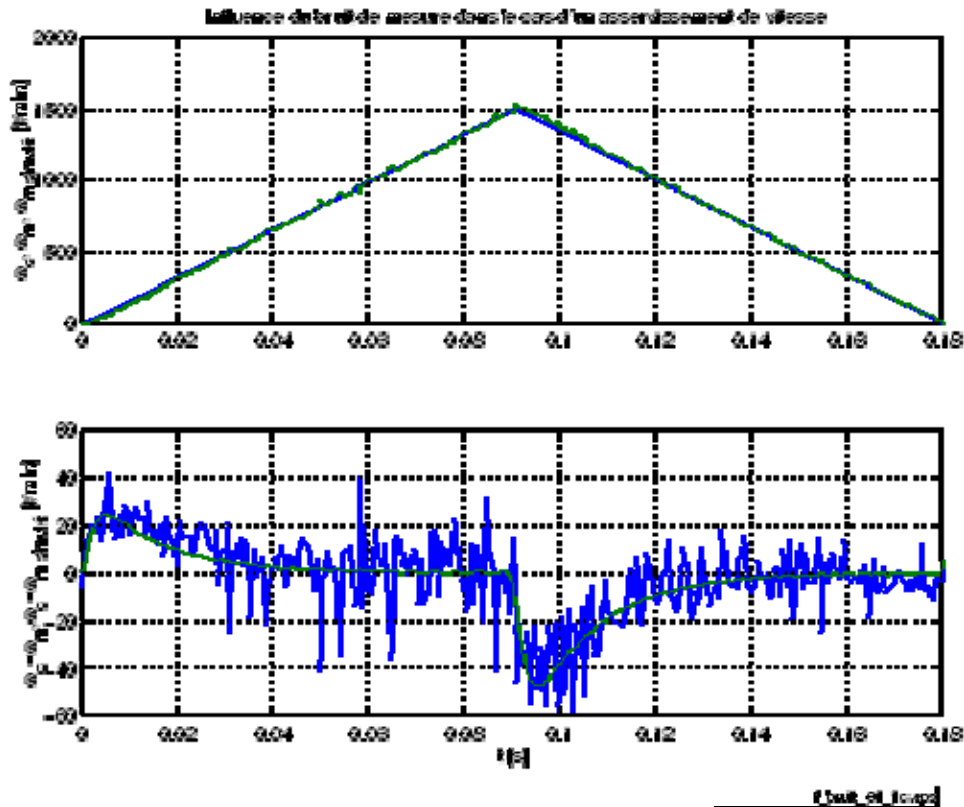
## Entrées/sorties

Signaux d'entrée du système de régulation automatique:

- consigne  $w(t)$  (plusieurs en régulation multivariable)
- perturbation  $v(t)$  (perturbation de charge, pouvant être de différentes natures et intervenant à plusieurs endroits dans le système)
- bruit de mesure  $n(t)$  (perturbation de signal), voir figure [1.15](#)

Signaux de sortie du système de régulation automatique:

- grandeur réglée  $y(t)$  (plusieurs en régulation multivariable)



**Figure:** Visualisation du bruit de mesure dans le cas d'un asservissement de vitesse (bruit\_01.m). La consigne de vitesse a la forme d'un triangle (accélération puis freinage-arrêt). On compare ici la vitesse réglée effective et sa simulation de façon à bien mettre en évidence le bruit.

## Unités physiques des signaux

**Tableau:** Unités physiques des principaux signaux d'un système de régulation automatique. Par unité physique, on entend celle du signal lui-même, définie par la réalisation du système, et non celle de l'information qu'il porte.

Signal	Notation	Unités physique	Foehn	Régulation de vitesse	
Consigne	$w(t)$	Correspond à l'unité physique de la grandeur réglée $v(t)$ fournie par le capteur. Typiquement des $[V]$ $[A]$ ou des	$[T_c] = V$	$[w_c] = V$	

Grandeur réglée mesurée	$y(t)$	Correspond à la nature du signal de sortie du capteur. Typiquement des $[V]$	$[T_m] = V$	$[\omega_m] = V$	
Grandeur réglée brute	$x(t)$	Grandeur physique réglée, dans son unité	$[T] = ^\circ C$	$[\omega] = \frac{rad}{s}$	
Commande	$u(t)$	Correspond à l'unité physique du signal de sortie du régulateur, tel qu'il est réalisé. Typiquement des $[V]$	$[u] = V$	$[u] = V$	
Perturbation	$v(t)$	Dépend de l'endroit où la perturbation intervient	$[v] = ^\circ C$	$[v] = N \cdot m$	
Bruit sur la mesure	$n(t)$	Correspond à l'unité de $y(t)$	$[n] = V$	$[n] = V$	
Erreur	$e(t)$	Correspond à la nature du signal de sortie du capteur. Typiquement des $[V]$	$[e] = V$	$[e] = V$	

## Régulation de correspondance et régulation de maintien

On peut envisager deux modes de régulation:

- la régulation de correspondance ("tracking"), où le but essentiel est de poursuivre une consigne  $w(t)$  variable;

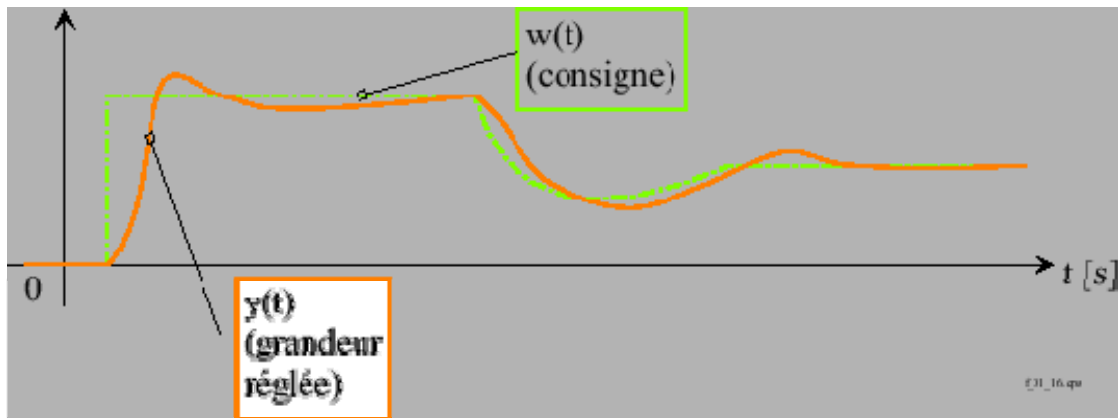


Figure: Régulation de correspondance.

- la régulation de maintien, où le régulateur a pour tâche principale de maintenir la grandeur réglée  $y(t)$  égale à la consigne  $w(t)$  malgré la présence de perturbations  $v(t)$ .

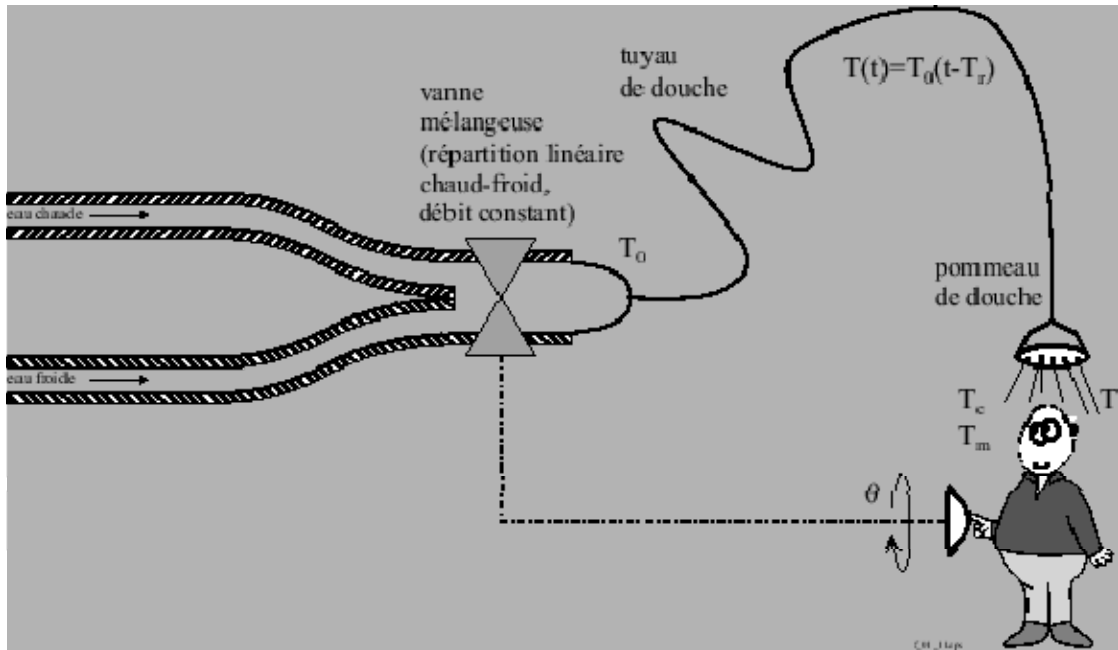
Figure: Régulation de maintien.

## Problèmes fondamentaux des systèmes de régulation automatique

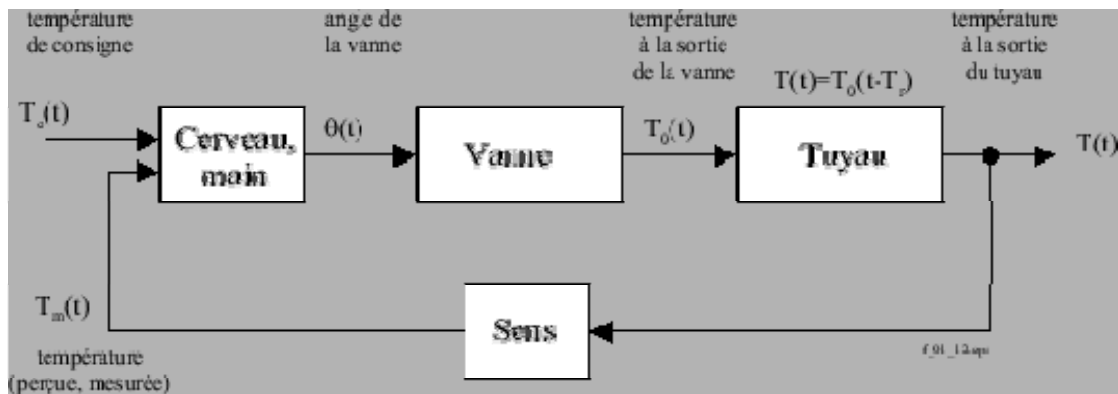
### Stabilité

La stabilité d'un système de régulation automatique (cf chap.5) est une condition impérative. Or, tout système contre-réactionné est potentiellement instable. La cause en est due au retard parfois trop importants que peut subir un signal (ou certaines de ses composantes spectrales) se propageant à travers la boucle. L'exemple de la douche illustre cela de manière intuitive (figure [1.18](#)).





**Figure:** Régulation manuelle de la température d'une douche: schéma technologique. Pour l'exemple, on suppose que le débit est constant et que seule la répartition chaud-froid est modifiée.

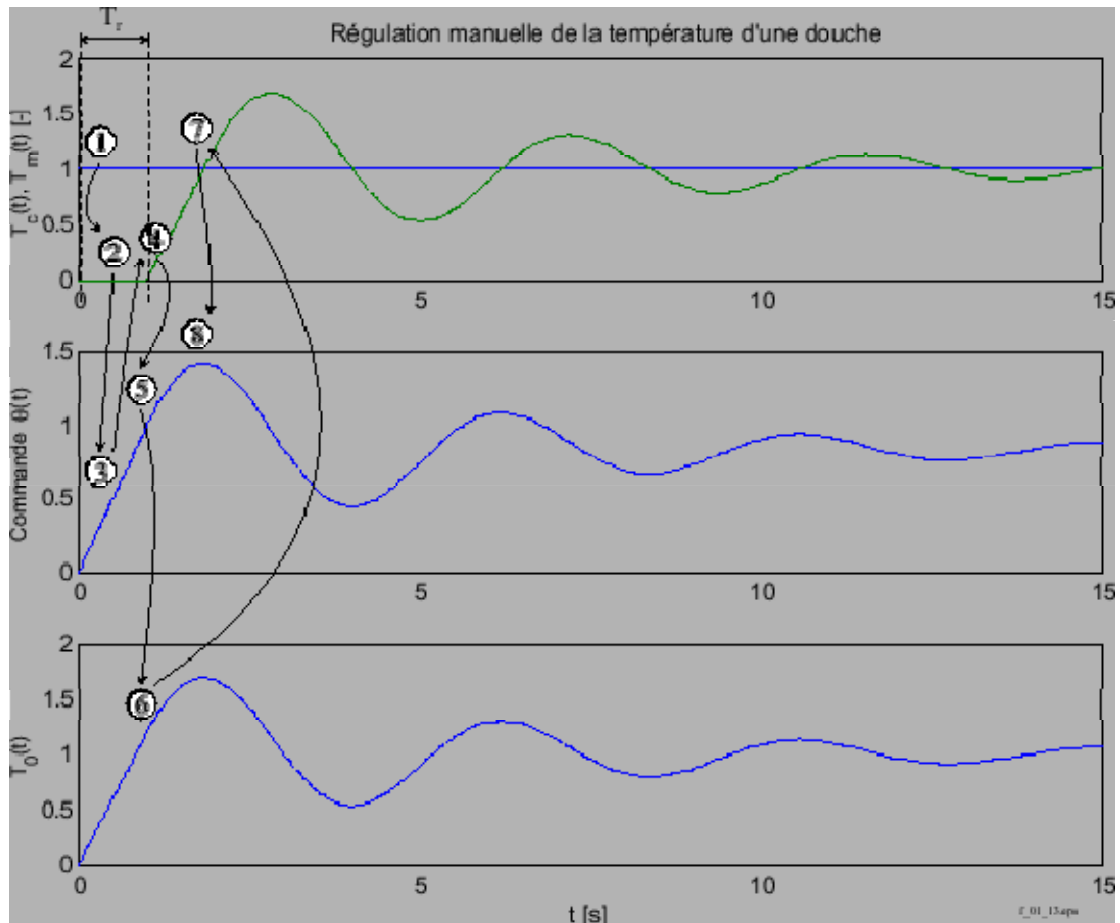


**Figure:** Régulation manuelle de la température d'une douche: schéma fonctionnel.

En négligeant les pertes thermiques dans le tuyau, on a:

$$T(t) = T_0(t - T_r)$$

où  $T_r$  est le temps nécessaire à l'eau pour se propager à travers le tuyau de douche. Dans le jargon des systèmes asservis, on l'appelle *retard pur*.



**Figure:** Régulation manuelle de la température d'une douche (Demo\_05.mdl, cal\_Demo\_05.m): cas de l'opérateur "pressé", i.e. d'un régulateur à gain élevé.

Il y a donc dans cet exemple un **retard pur**  $T_r [s]$  entre l'action entreprise par l'opérateur sur la vanne pour modifier la température  $T_m(t)$  et l'effet résultant. C'est le cas de l'opérateur "pressé" (figure 1.20) qui met en évidence le phénomène d'instabilité:

1. l'opérateur commence sa douche et désire que l'eau soit à la température  $T_e$  ;
2. l'opérateur s'aperçoit que la température  $T_m$  de l'eau est bien inférieure à la valeur souhaitée  $T_e$  ;
3. l'opérateur ouvre modérément la vanne mélangeuse;
4. l'opérateur s'aperçoit que l'ouverture de la vanne mélangeuse est sans effet notable;
5. l'opérateur ouvre davantage la vanne mélangeuse;
6. la température  $T_0$  de l'eau directement à l'entrée du tuyau est alors à une valeur élevée;
7. l'eau de température élevée parvient à l'opérateur: la température de l'eau  $T_m$  dépasse alors largement la consigne  $T_e$  ;
8. l'opérateur réagit en tournant la vanne dans l'autre sens.

Et le pire est à venir: l'eau beaucoup trop chaude parvient au bout du tuyau, provoquant une réaction vive de l'opérateur. Si celui-ci se comporte de manière symétrique (que l'eau soit trop chaude ou trop froide), l'eau va devenir exagérément froide et une oscillation de plus ou moins longue durée peut prendre naissance. Le système observé ici n'est pas instable, mais présente des signes alarmants de tendance vers l'instabilité: il peut devenir incontrôlable si un opérateur encore plus pressé prend sa douche...

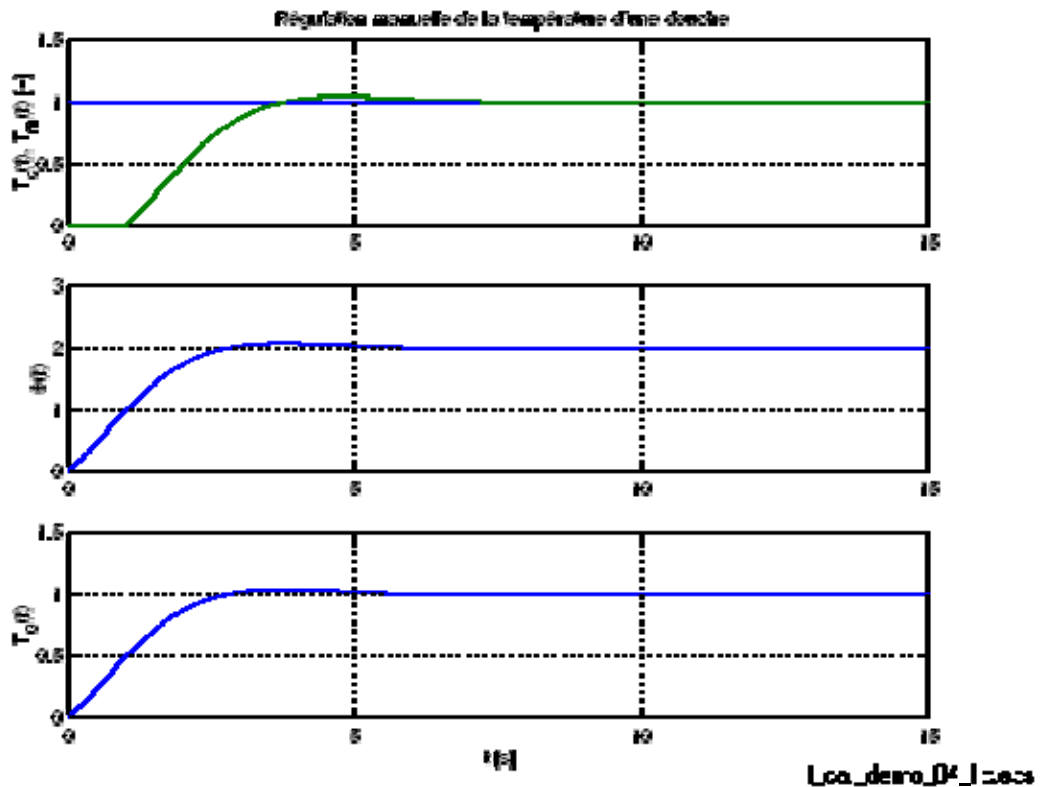


Figure: Régulation manuelle de la température d'une douche(cal\_Demo\_04.m): cas de l'opérateur "calme".

## Précision et rapidité

L'exemple de la régulation de vitesse (figure 1.12) avec régulateur P montre que même en régime permanent constant (consigne constante, etc), un erreur subsiste: ce phénomène est malheureusement normal puisqu'en effet, pour que le moteur DC tourne, même à vide, à une vitesse non-nulle correspondant si possible à la consigne, il faut l'alimenter par une tension

aux bornes de l'induit  $u_a(t)$  que l'on se représente facilement différente de zéro. Or:

- $u_a(t) \approx u(t)$  dans le cas d'un amplificateur de puissance idéal;
- $u_a(t) \neq 0[V] \iff u(t) \neq 0[V]$  ;

$$u(t) \neq 0 [V] \iff e(t) = \frac{u(t)}{K_p} \approx \frac{u_{st}(t)}{K_p} = E_{\infty} \neq 0 [V]$$

L'erreur  $E_{\infty}$  observée s'appelle **erreur statique**. On dit que le système asservi a du **statisme**.

Dans le cas simple du moteur à vide, la tension  $u_a(t)$  doit équilibrer la FEM

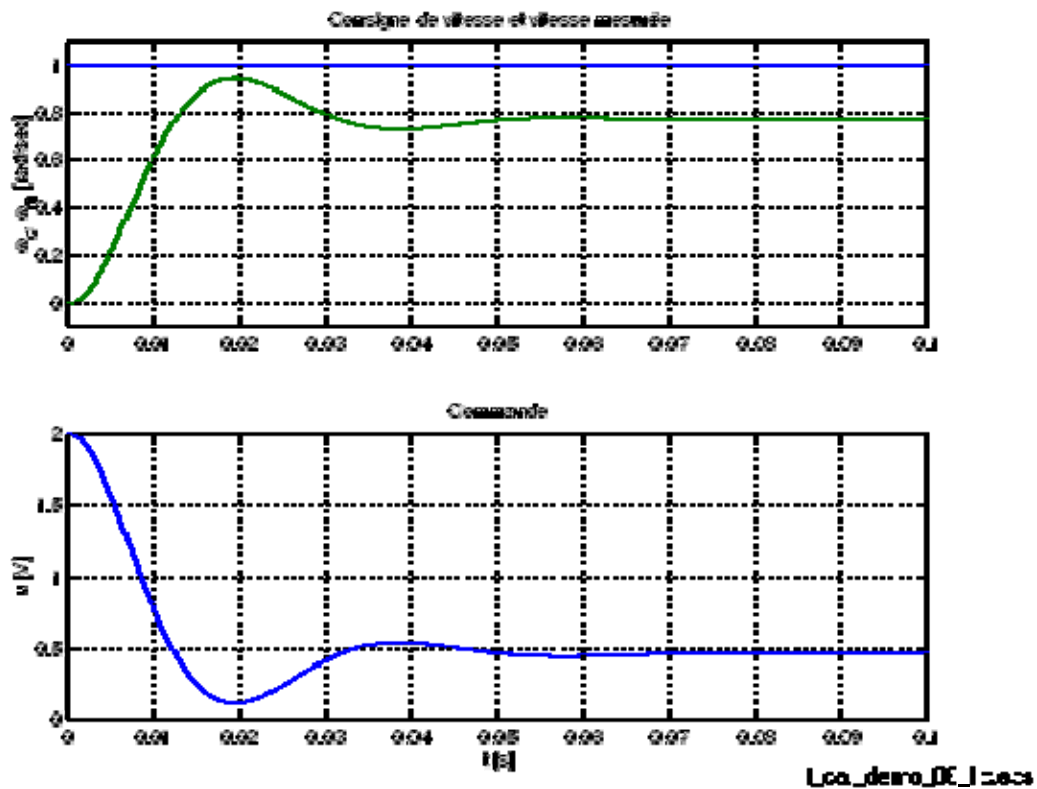
$$e_m(t) = K_E \cdot \omega(t)$$

. On en déduit la valeur de l'erreur  $E_{\infty}$  :

$$E_{\infty} = \frac{e_m(t \rightarrow \infty)}{K_p} = \frac{K_E}{K_p} \cdot \omega(t \rightarrow \infty)$$

Pour diminuer la valeur de l'erreur statique  $E_{\infty}$ , il faut logiquement augmenter le gain

proportionnel  $K_p$  du régulateur. Ce faisant, l'action entreprise par le régulateur en présence d'erreur est de plus en plus énergique et la rapidité du système est également améliorée (figure 1.22).



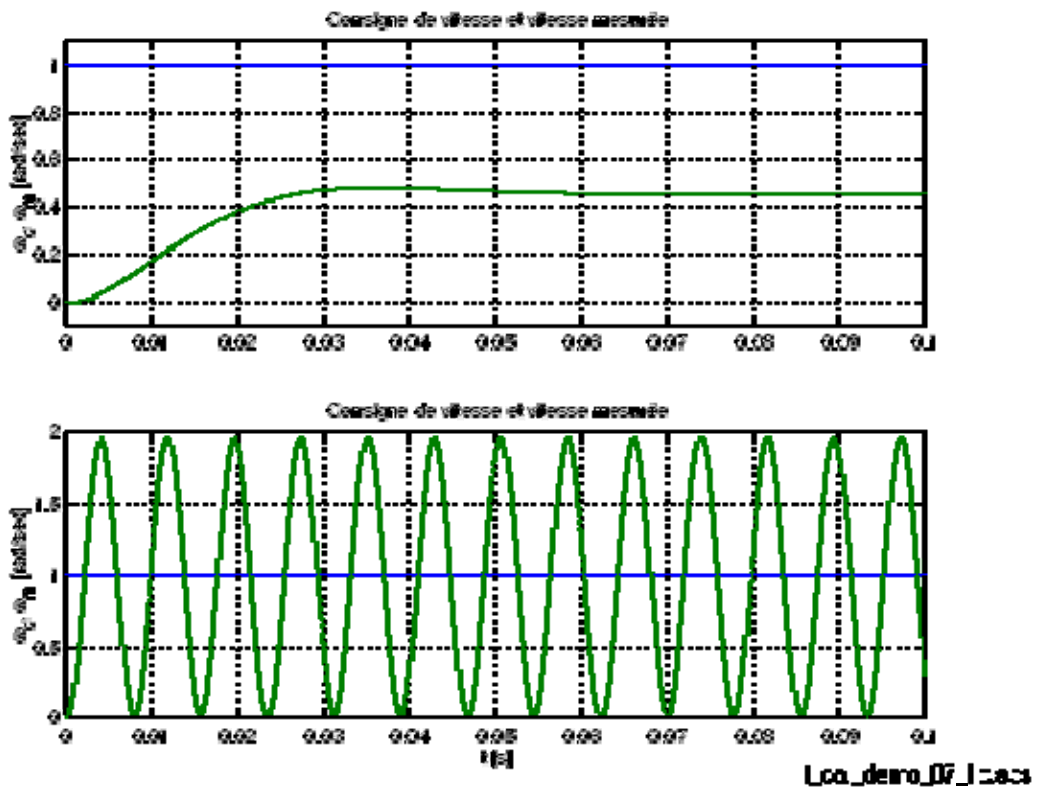
$$K_p = 2$$

**Figure:** Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC, avec régulateur P,

(Demo\_02.mdl, cal\_Demo\_06.m). L'erreur statique  $E_{\infty}$  est inférieure à celle de la figure 1.12 et le système est plus rapide.

# Dilemme stabilité-précision

Si, appliquant les conclusions du paragraphe précédent, on tente d'améliorer encore la précision et la rapidité en augmentant encore le gain  $K_p$  du régulateur proportionnel à **53**, un phénomène analogue à celui observé avec la douche (figure 1.20) apparaît (figure 1.22): le système asservi oscille de manière apparemment entretenue à une fréquence voisine de **129 [Hz]**, l'amplitude de l'oscillation ayant tendance à croître indéfiniment: le système est pratiquement instable.



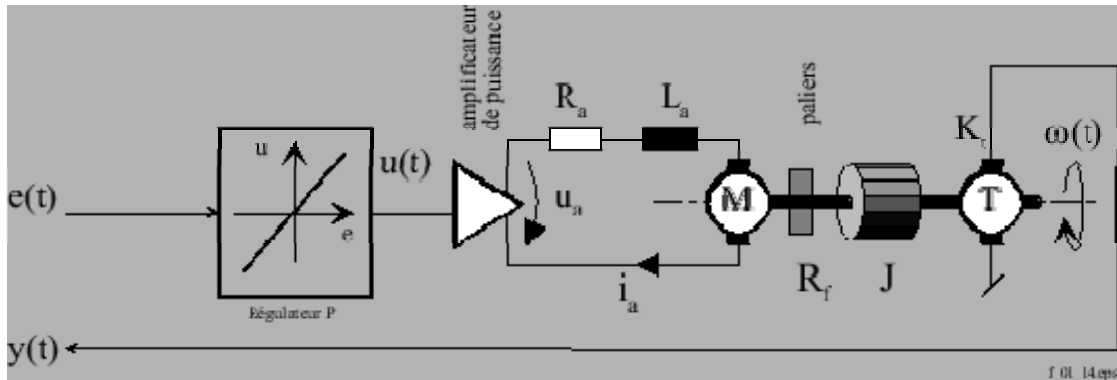
$K_p = 53$

**Figure:** Régulation automatique de la vitesse d'un moteur DC, avec régulateur P, (Demo\_02.mdl, cal\_Demo\_07.m). Le système asservi est quasi instable.

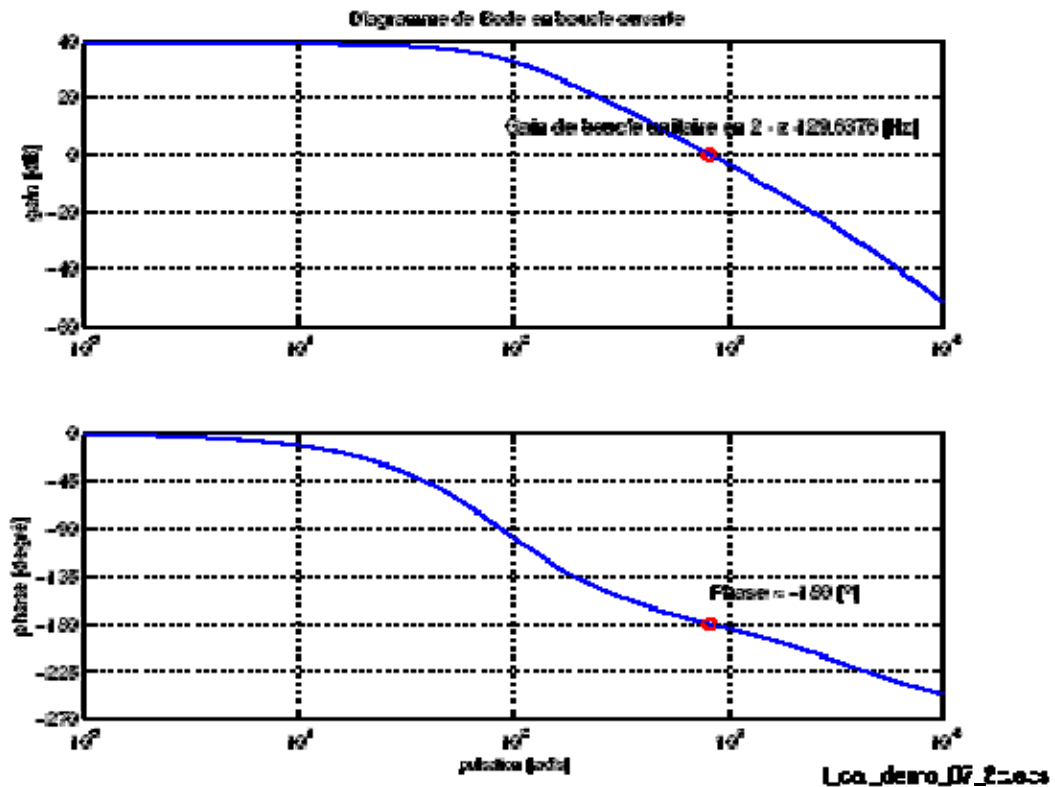
On peut comprendre intuitivement la cause de cette instabilité en examinant la réponse fréquentielle du système asservi en boucle ouverte, i.e. le comportement fréquentiel de la chaîne d'éléments (figure 1.24) allant de l'entrée du régulateur (l'erreur  $e(t)$ ) à la sortie du capteur (la grandeur réglée  $y(t)$ ). Le diagramme de Bode la figure 1.25 montre en effet qu'un signal d'erreur:

129 [Hz]

- ne subit, la fréquence d'environ , aucune atténuation ou amplification, le gain de boucle à cette fréquence étant de  $0 \text{ dB} = 1$  ;
- est déphasé, i.e. retardé, d'exactement  $-180^\circ$  à cette même fréquence.

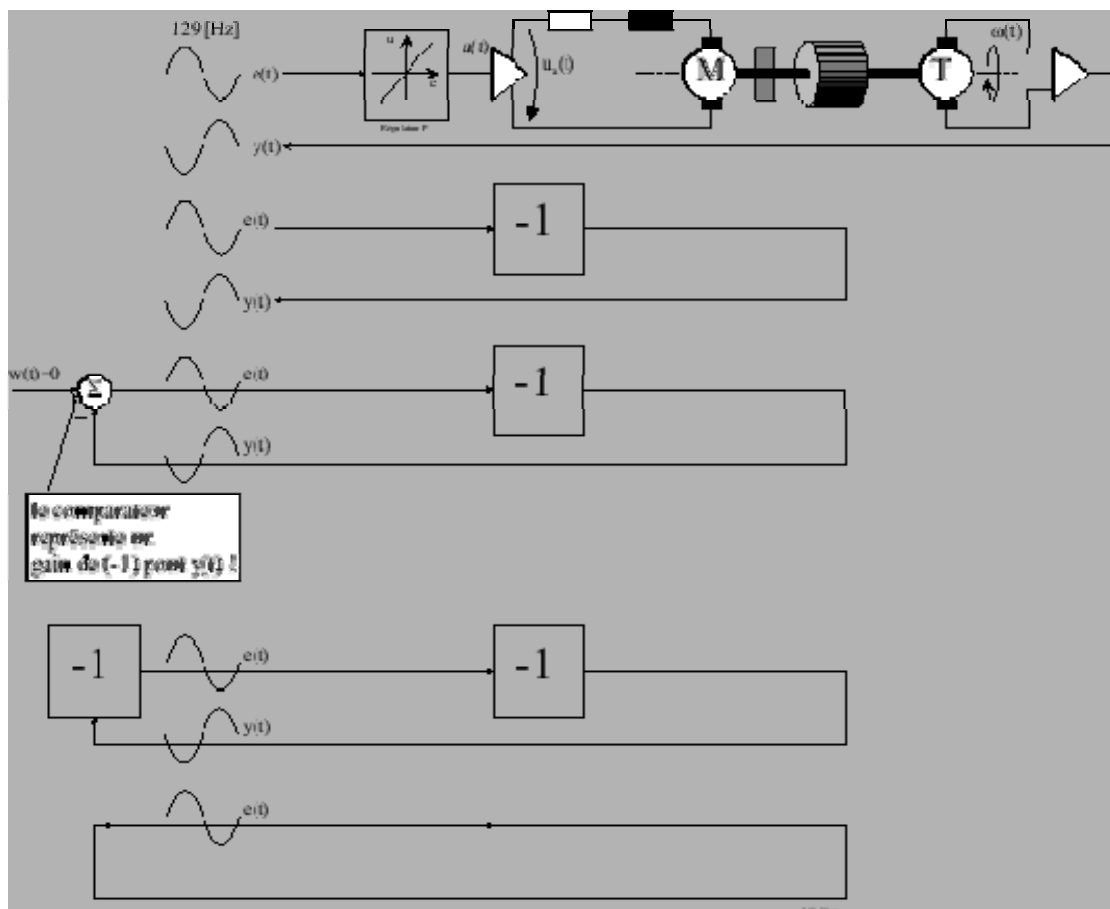


**Figure:** Obtention de la réponse harmonique en boucle ouverte: le signal d'entrée est l'erreur  $e(t)$  et celui de sortie la grandeur réglée  $y(t)$ . Le résultat est donné sur la figure 1.25.



**Figure:** Réponse fréquentielle du système de régulation de vitesse en boucle ouverte  $K_p = 53$  (Demo\_02.mdl, cal\_Demo\_07.m, ).

En conséquence, la composante spectrale à  $129 [Hz]$  du signal d'erreur  $e(t)$  voit tout simplement son signe inversé, ce qui implique qu'à cette fréquence, il n'est pas contre-réactionné, mais réactionné (figure 1.26): du fait de la structure bouclée, une augmentation de la grandeur de commande  $u(t)$  provoque une augmentation de la grandeur réglée  $y(t)$  qui provoque à son tour une augmentation de l'erreur  $e(t)$  et par suite de la grandeur de commande. Le système s'emball, n'est plus sous contrôle, ce qui peut aboutir à sa destruction si des limites physiques n'interviennent pas suffisamment tôt.



**Figure:** Régulation automatique de vitesse (Demo\_02.mdl, cal\_Demo\_07.m): pour  $K_p = 53$ , la composante spectrale à  $129 [Hz]$  du signal d'erreur  $e(t)$  voit tous les éléments de la boucle qu'elle traverse comme un simple gain  $A(\omega)|_{\omega=2\pi \cdot 129 [\frac{rad}{s}]} = -1$ . La contre-réaction devient, pour cette fréquence, de la réaction.

Les exemples de la douche (§1.5.1) et de la régulation de vitesse montrent que plus l'action du régulateur est violente (cas de l'opérateur "pressé", respectivement cas du

régulateur P de vitesse avec  $K_p = 50$ ), i.e. plus le gain du régulateur est élevé, plus il y a risque d'instabilité. Pour des raisons de stabilité, et par suite de sécurité de l'installation, il y a donc en principe intérêt à travailler avec des gains modestes. Mais l'amélioration de la précision et de la rapidité de la régulation de vitesse évoquée au §1.5.2 montre au contraire tout le bénéfice qu'il y a à augmenter les gains du régulateur, i.e. la raideur de l'asservissement.

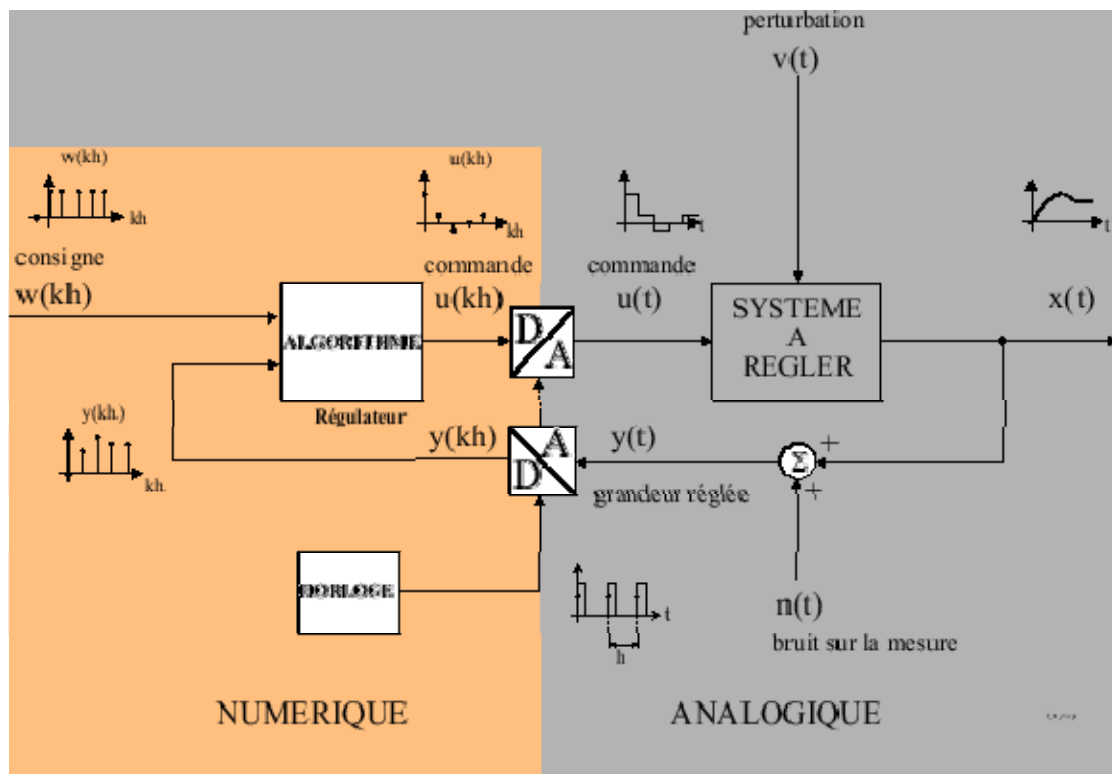
Ces intérêts contraires constituent ce qui est communément appelé le dilemme stabilité-précision. Tout l'art de l'ingénieur automaticien consiste à trouver une solution satisfaisant simultanément les exigences de stabilité et de précision. En pratique, un autre dilemme rend le travail de l'ingénieur-automaticien plus complexe: on pourrait l'appeler **dilemme précision-bruit**, lequel se manifeste souvent bien avant celui de stabilité-précision. En effet, les performances des systèmes asservis sont souvent limitées non par des questions de stabilité, mais par des problèmes de bruit sur la commande, qui est en fait dû essentiellement à

l'amplification (par exemple par le gain  $K_p$  d'un régulateur P) du bruit de mesure. Si  $n(t)$  est ce bruit, sa propagation au travers du régulateur le transforme en un bruit de valeur  $K_p \cdot n(t)$  de valeur d'autant plus élevée que le gain  $K_p$  est élevé, i.e. que les performances exigées sont de haut niveau (figure 1.27). Dans le cas où la commande a une influence directe sur une grandeur mécanique, le bruit qu'elle contient devient même audible et peut par exemple accélérer des phénomènes d'usure. Pour des système 100% électriques, le bruit de la commande peut provoquer un échauffement supplémentaire.

**Figure:** Influence du bruit de mesure d'un asservissement de vitesse (bruit\_02.m). Bien que la consigne de vitesse  $\omega_c$  soit à zéro, la vitesse mesurée  $\omega_{me}$  s'en écarte continuellement, le régulateur réagissant au bruit de mesure.

## Principe de la régulation numérique





**Figure:** Principe de la régulation numérique: le régulateur prend la forme d'un algorithme programmé sur microprocesseur et exécuté en temps réel, i.e. impérativement à chaque période d'échantillonnage  $h$ . Les valeurs typiques de  $h$  vont de  $10 [s]$  pour des systèmes de régulation de température à  $50 [\mu s]$  pour des asservissements de courants dans les entraînements réglés. Pour ces derniers, un implantation du régulateur en assembleur sur processeur de signal (DSP) est quasi indispensable.

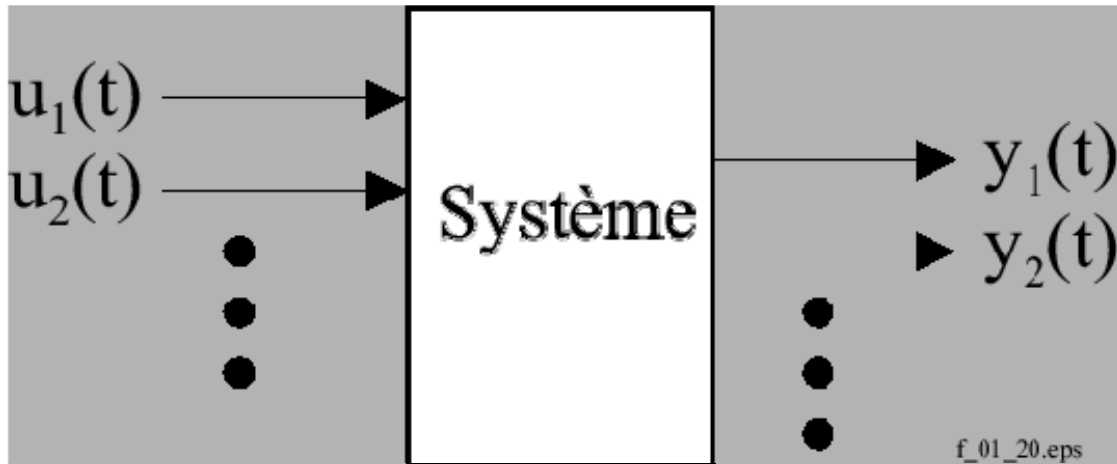
```

void regulateur.PI ()
{
    static float e`2] = {0.0,0.0};
    static float u`2] = {0.0,0.0};
    \par /* Lit le contenu du registre de sortie du convertisseur A/D */
        AD_Conv(&y);
    \par e[0] = w[0] - y[0]; /* forme l'écart */
    \par u[0] = u[1] + b0 * e[0] + b1 * e[1]; /* Calcule la commande u[k] */
    \par /* Commande la conversion D/A de u[k] */
        DA_Conv(u[0]);
    \par u[1] = u[0]; /* mise à jour, gestion de la pile u */
        e[1] = e[0]; /* mise à jour, gestion de la pile e */
}

```

## Généralités sur les systèmes

D'un point de vue technique, tout ensemble d'éléments, de composants, dispositifs, etc associés un but spécifié constitue un système (figure 1.29). Un système peut être simple ou complexe.

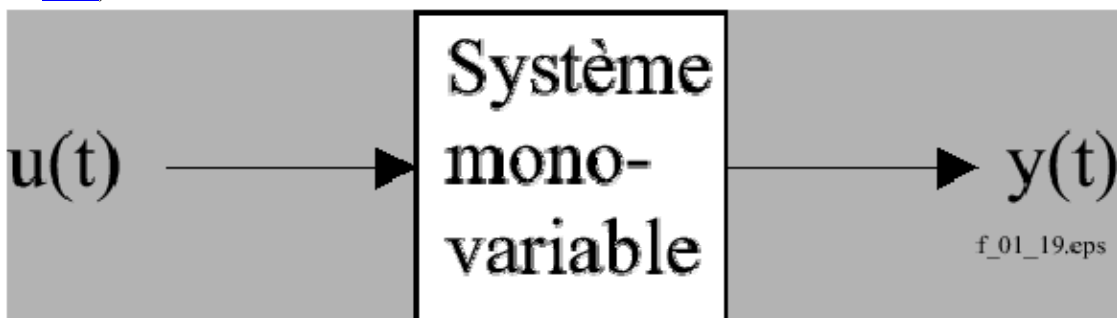


**Figure:** Système quelconque, multi-variables.

Afin de pouvoir contrôler (régler, asservir) un système, il est nécessaire de connaître un certain nombre de ses propriétés:

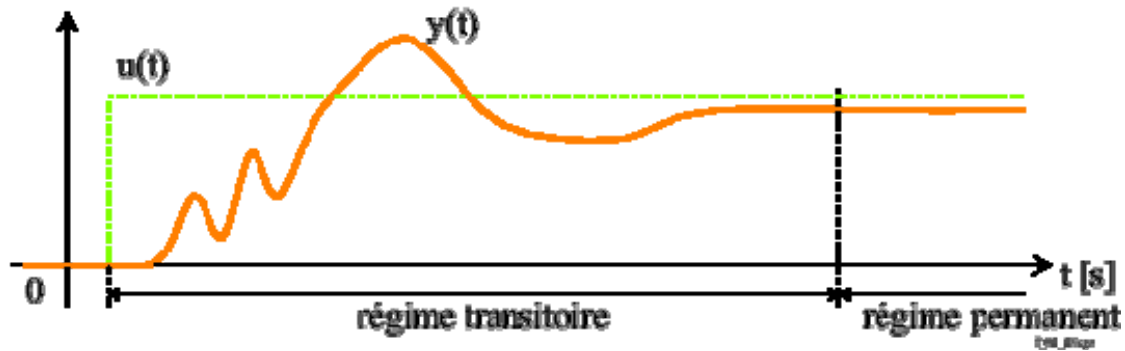
- nombre et nature des entrées et des sorties;
- comportement statique;
- comportement dynamique (temps de montée, nombre et période des oscillations, etc);
- linéarité ou non-linéarités;
- stabilité;
- etc

On se limite ci-après à l'étude de systèmes mono-variable (1 entrée  $u(t)$ , 1 sortie  $y(t)$ , figure 1.30)



**Figure:** Système monovariante. Dans un contexte général, le signal d'entrée est appelé  $u(t)$  et celui de sortie  $y(t)$ .

## Comportement dynamique



**Figure:** Exemple de réponse indicielle d'un système dynamique complexe.

Le comportement dynamique, i.e. en régime transitoire, est souvent difficile à qualifier (quantifier) sur la base de l'analyse temporelle seule. Il faut des outils spécifiques tel que les transformations de Fourier et de Laplace.

## Comportement statique

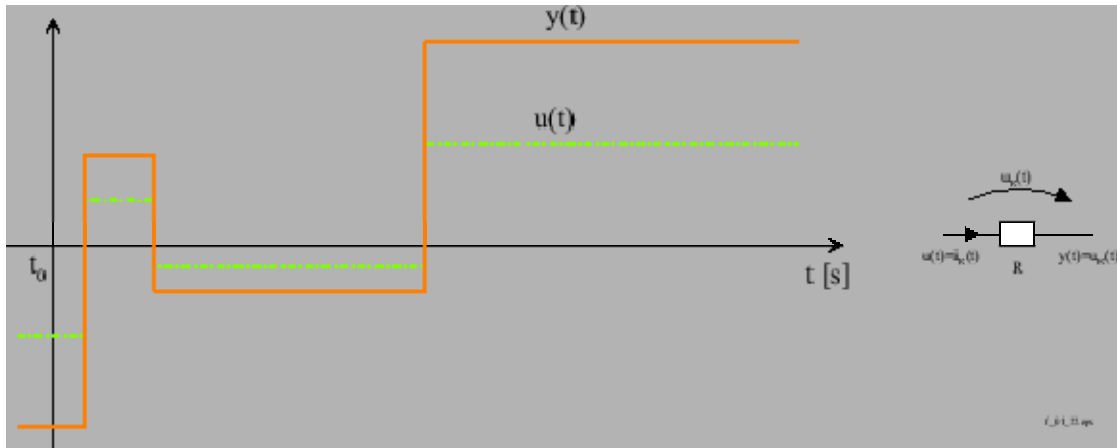
On considère le système étudié en régime permanent constant, i.e. lorsque  $u(t) = \text{const.}$  et que  $t \rightarrow \infty$ . On peut alors calculer le **gain statique**  $K$  :

$$K = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)} \Big|_{u(t)=\text{const.}}$$

## Système statique

Un système est statique si sa sortie  $y(t)$  à l'instant  $t$  ne dépend que de l'entrée  $u(t)$  au même instant  $t$ .

Un tel système réagit donc instantanément, sans retard, sans régime transitoire ou temps d'établissement. Il est sans mémoire puisque le passé n'influence pas sa sortie présente. Un exemple de système statique est la résistance électrique idéale (figure [1.32](#)).



**Figure:** Exemple de système statique.

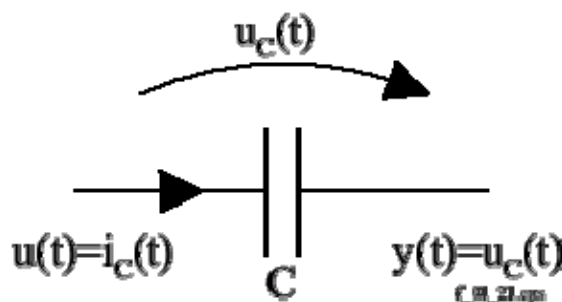
Du point de vue de l'automaticien, un système statique peut sans autre être décrit, i.e. représenté par son gain statique  $K$ .

## Système dynamique

Un système est dynamique si sa sortie  $y(t)$  peut dépendre non seulement de l'entrée présente  $u(t)$  mais aussi des entrées (sorties) passées.

Un exemple est la capacité électrique: définissant le courant de charge  $i_c(t)$  comme signal d'entrée et la tension aux bornes  $u_c(t)$  comme signal de sortie, on a:

$$y(t) = u_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i_c(\tau) \cdot d\tau = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t u(\tau) \cdot d\tau$$



**Figure:** Exemple de système dynamique.

Un système dynamique est représentable mathématiquement par  $n$  équations différentielles d'ordre 1, linéaires ou non. Dans le cas où des paramètres tels que la résistance, l'inertie, etc peuvent être définis sans trop s'éloigner de la réalité physique, le système est à constantes localisées et les équations différentielles sont aux dérivées totales.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) + g_1(u(t)) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) + g_2(u(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) + g_n(u(t)) \\ y(t) &= h(x_1(t), \dots, x_n(t)) + d(u(t)) \end{aligned}$$

Dans la négative (propagation de la chaleur, lignes de transmission, mécanique des fluides, etc), on a affaire à un système à paramètres distribués et sa représentation doit se faire par des équations aux dérivées partielles.

## Système linéaire

Un système est linéaire s'il obéit au **principe de superposition**:

- additivité: les causes ajoutent leurs effets (si  $u_1(t) \rightarrow y_1(t)$  et  $u_2(t) \rightarrow y_2(t)$ ,  
alors  $u_1(t) + u_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$ );
- homogénéité: il y a proportionnalité de l'effet à la cause (si  $u(t) \rightarrow y(t)$   
alors  $a \cdot u(t) \rightarrow a \cdot y(t)$ ).

On se limitera, dans le cadre de ce cours, essentiellement aux systèmes linéaires, dynamiques, à constantes localisées, représentables dans le cas général par  $n$  équations différentielles linéaires d'ordre 1:

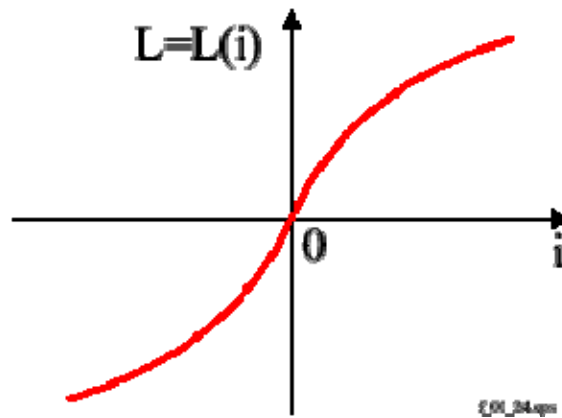
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t) + \dots + a_{1n} \cdot x_n(t) + b_1 \cdot u(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1(t) + a_{22} \cdot x_2(t) + \dots + a_{2n} \cdot x_n(t) + b_2 \cdot u(t) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1} \cdot x_1(t) + a_{n2} \cdot x_2(t) + \dots + a_{nn} \cdot x_n(t) + b_n \cdot u(t) \end{cases}$$

Ces  $n$  équations peuvent être présentées sous la forme d'une seule équation différentielle d'ordre  $n$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y(t) = \\ b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_0 \cdot u(t) \end{aligned}$$

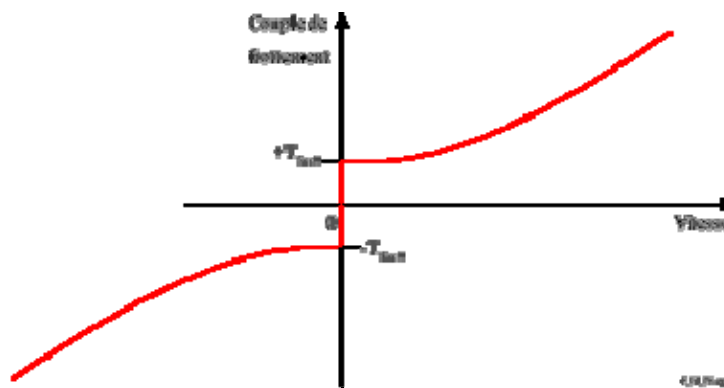
Des exemples de non-linéarités se trouvent dans des cas de figures tels que:

- la saturation magnétique provoquant une variation de l'inductance en fonction du courant:  $L = L(i)$  (figure 1.34);



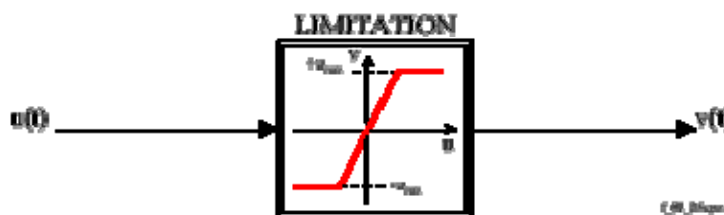
**Figure:** Non-linéarité d'une inductance  $L$  consécutive à la saturation magnétique.

- le frottement sec ou visqueux agissant sur l'arbre d'un moteur électrique dépend typiquement de la vitesse de rotation  $T_{\text{frottement}} = T_{\text{frottement}}(\omega, \text{signe}(\omega))$  (figure 1.35);



**Figure:** Non-linéarité due au frottement sec.

- la limitation de la grandeur de commande  $u(t)$  est nécessaire pour protéger le système à régler: dans le cas où  $u(t)$  entre en limitation, le système de régulation devient non-linéaire (figure 1.34);



**Figure:** Non-linéarité due à la limitation nécessaire du signal de commande.

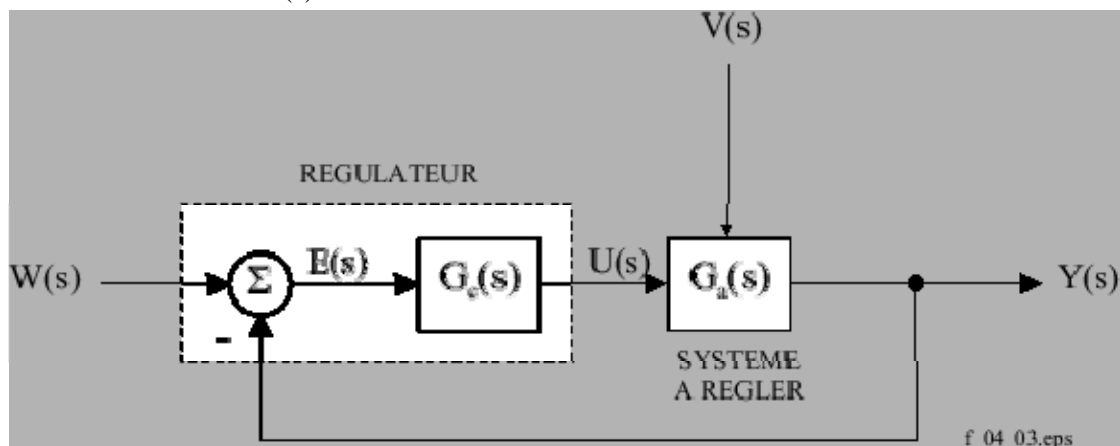
- un bras articulé de robot se déployant voit son inertie  $J$  varier en fonction de la position:  $J = J(\theta)$ .

Dans tous ces cas, on vérifie en effet que le principe de superposition ne s'applique pas. Une méthode de linéarisation de tels systèmes sera présentée au chap.2.

# Régulateur PID analogique

## Introduction

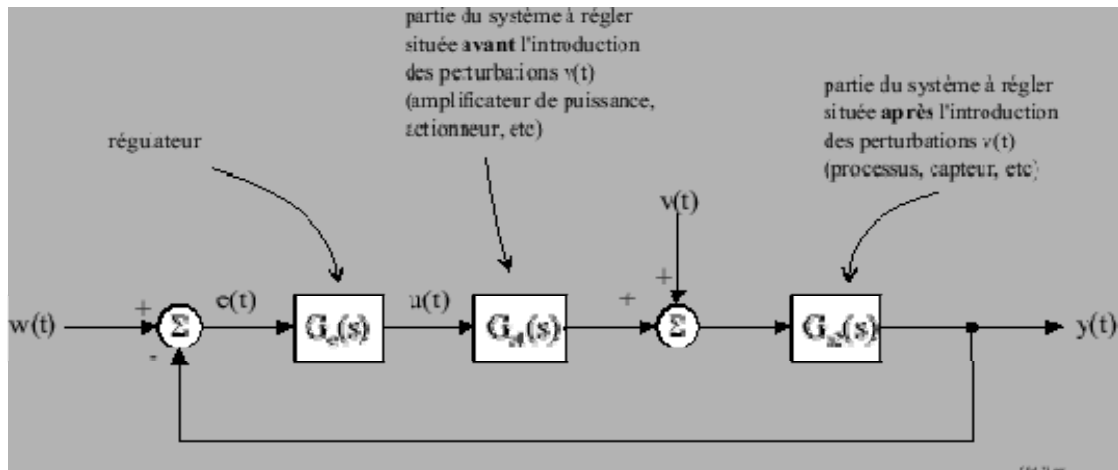
Le régulateur, de fonction de transfert  $G_e(s)$ , est situé en amont du système à régler, de fonction de transfert  $G_a(s)$ .



**Figure:** Schéma fonctionnel d'un système asservi mono-variable. On distingue le régulateur

$G_e(s)$  et le système à régler  $G_a(s)$ .

Le système à régler  $G_a(s)$  comprend, outre le processus, l'amplificateur de puissance, l'actionneur, le capteur et l'électronique de traitement de la mesure associée.



**Figure:** Schéma fonctionnel universel d'un système asservi.

L'entrée du régulateur comprend forcément la consigne  $w(t)$  et la mesure  $y(t)$  de la grandeur réglée. Le plus souvent la comparaison

$$e(t) = w(t) - y(t)$$

directe est effectuée, appelée écart ou **erreur**.

Le régulateur a pour charge de maintenir le signal d'erreur  $e(t)$  aussi proche de zéro que possible; dans ce but, il fournit au système à régler la commande  $u(t)$  telle que l'image  $y(t)$  de la **grandeur réglée** obtenue par mesure corresponde à la consigne  $w(t)$ .

La commande  $u(t)$  est construite sur la base des signaux de consigne  $w(t)$  et de mesure  $y(t)$  de la grandeur réglée selon la loi de commande

$$u(t) = u(w(t), y(t)).$$

Cette commande est en général d'un faible niveau de puissance, raison pour laquelle un amplificateur de puissance est normalement intercalé entre le régulateur et le système à régler à proprement parler.

Appliquée au système à régler, la commande  $u(t)$  provoque donc une modification de la grandeur réglée  $y(t)$ . Le régulateur en tenant compte pour former  $u(t)$ , on constate que  $y(t)$  apparaît:

- à l'origine de l'action entreprise par le régulateur;
- comme conséquence de cette action.



Représenté graphiquement sous forme de schéma fonctionnel, le système présente donc une boucle.

La loi de commande du régulateur peut être très simple (régulateur tout-ou-rien)

$$\begin{aligned} u(t) &= u_{max} && \text{si } e(t) > 0 \\ u(t) &= u_{min} && \text{si } e(t) < 0 \end{aligned}$$

ou beaucoup plus compliquée (régulateurs flous, réseaux de neurones).

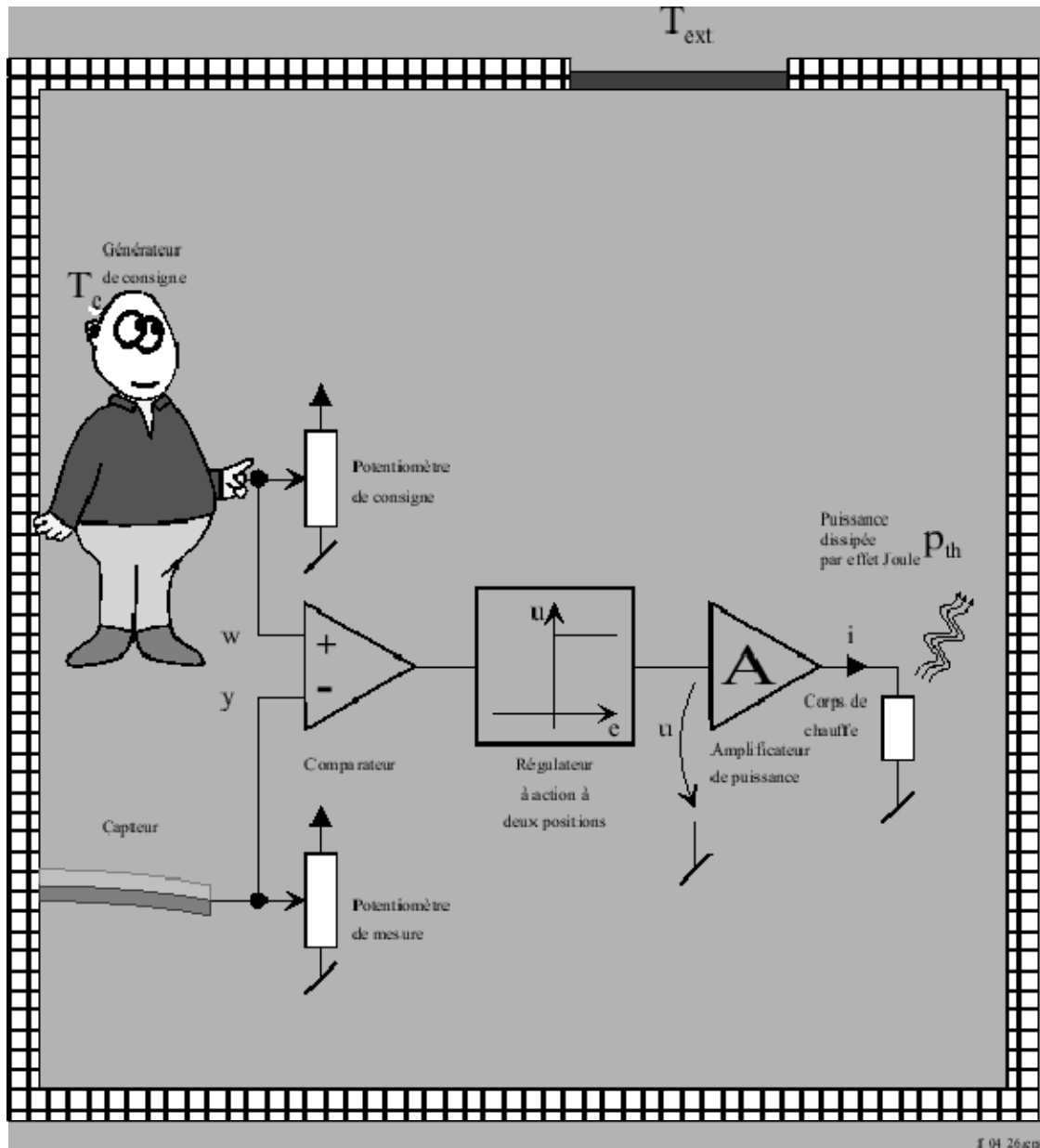
## Régulateurs non-linéaires

Si l'on imagine vouloir régler la température d'une salle et la maintenir aux environs

de **20[°C]**, on se dit qu'il suffit d'enclencher ou déclencher le chauffage selon que la température ambiante est plus petite ou plus grande que la température souhaitée (figure [4.8](#)).

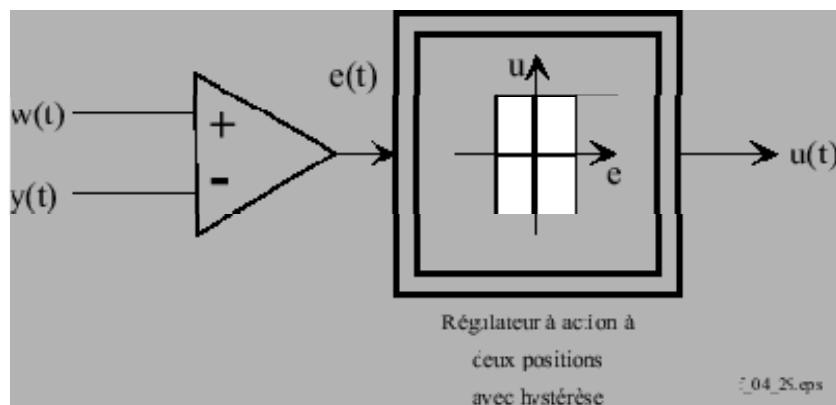
Avec ce régulateur, appelé tout-ou-rien, ou encore à action à deux positions, la

température oscillera légèrement autour de **20[°C]** et cela à satisfaction des utilisateurs de la salle. Cependant, le chauffagiste risque d'être très mécontent car il verra la chaudière s'enclencher et déclencher sans cesse pour de courts instants. Cette situation n'est pas acceptable pratiquement.



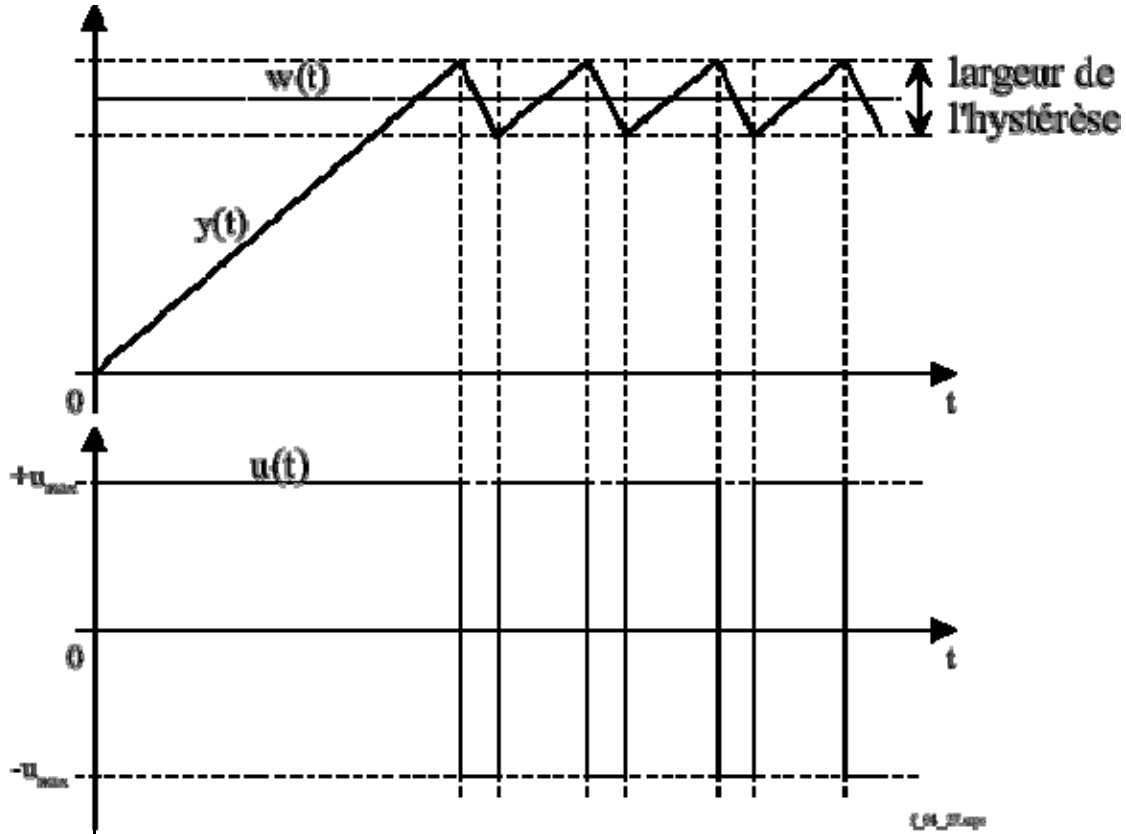
**Figure:** Régulation automatique de la température d'un local.

Pour éviter cela, on lui préfère un autre régulateur à deux niveaux avec hystérèse (figure 4.9).



**Figure:** Régulateur à action à deux position avec hystérèse.

Dans ce cas, on verra la température osciller avec plus d'amplitude autour de  $200^{\circ}\text{C}$  et cela sans gêne pour le confort des personnes présentes. De son côté, le chauffagiste sera satisfait, car la chaudière s'enclenchera et déclenchera pour des durées raisonnables préservant ainsi sa durée de vie.



**Figure:** Allure de la grandeur réglée (température mesurée) lors d'un asservissement par régulateur à action à deux position avec hystérèse.

Il faut cependant noter que la non-linéarité de ces régulateurs simples rend difficile leur synthèse sur la base d'un cahier des charges fixant les performances du système asservi. Malgré cela, ils sont fréquemment utilisés pour des applications dont l'actionneur supporte une forte sollicitation et pour lesquelles une oscillation

constante de la grandeur réglée  $y(t)$  autour de la consigne  $w(t)$  est admissible. Un exemple d'application est le réglage de courant fourni par une alimentation à découpage.

Dans ce qui suit, on se contentera d'étudier le régulateur standard PID, de loin le régulateur le plus utilisé en pratique.

## Régulateur à action proportionnelle (P)

## Loi de commande, fonction de transfert, réponses indicielle et harmonique du régulateur P

Le régulateur à action proportionnelle, ou régulateur P, a une action simple et

naturelle, puisqu'il construit une commande  $u(t)$  proportionnelle à l'erreur  $e(t)$ . Cette action s'apparente à un effet ressort (ressort de rappel).

- Loi de commande du régulateur P:

$$u(t) = K_p \cdot e(t)$$

- Fonction de transfert du régulateur P:

$$G_e(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

- Schéma fonctionnel du régulateur P:

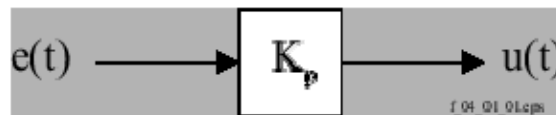
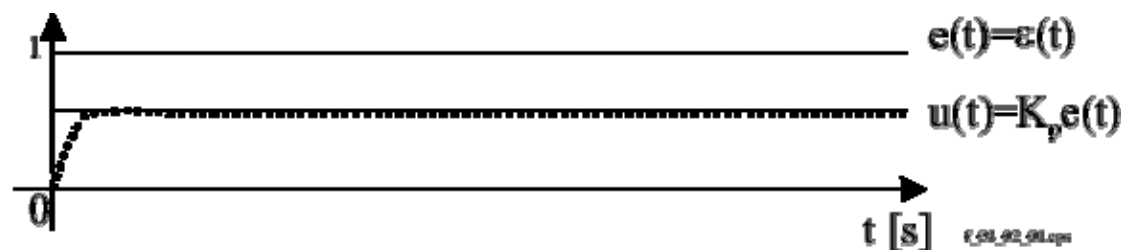


Figure 4.11:

- Réponse indicielle du régulateur P:



**Figure:** Réponse indicielle du régulateur P (idéal). La réponse en traitillé rappelle qu'aucun système physique ne peut réagir statiquement, i.e. sans retard. Dans le cas d'une réalisation électronique (à amplificateurs opérationnels par exemple) du régulateur P, il est clair que le temps de montée esquissé est négligeable par rapport aux constantes de temps du système à régler.

- Réponse harmonique du régulateur P:

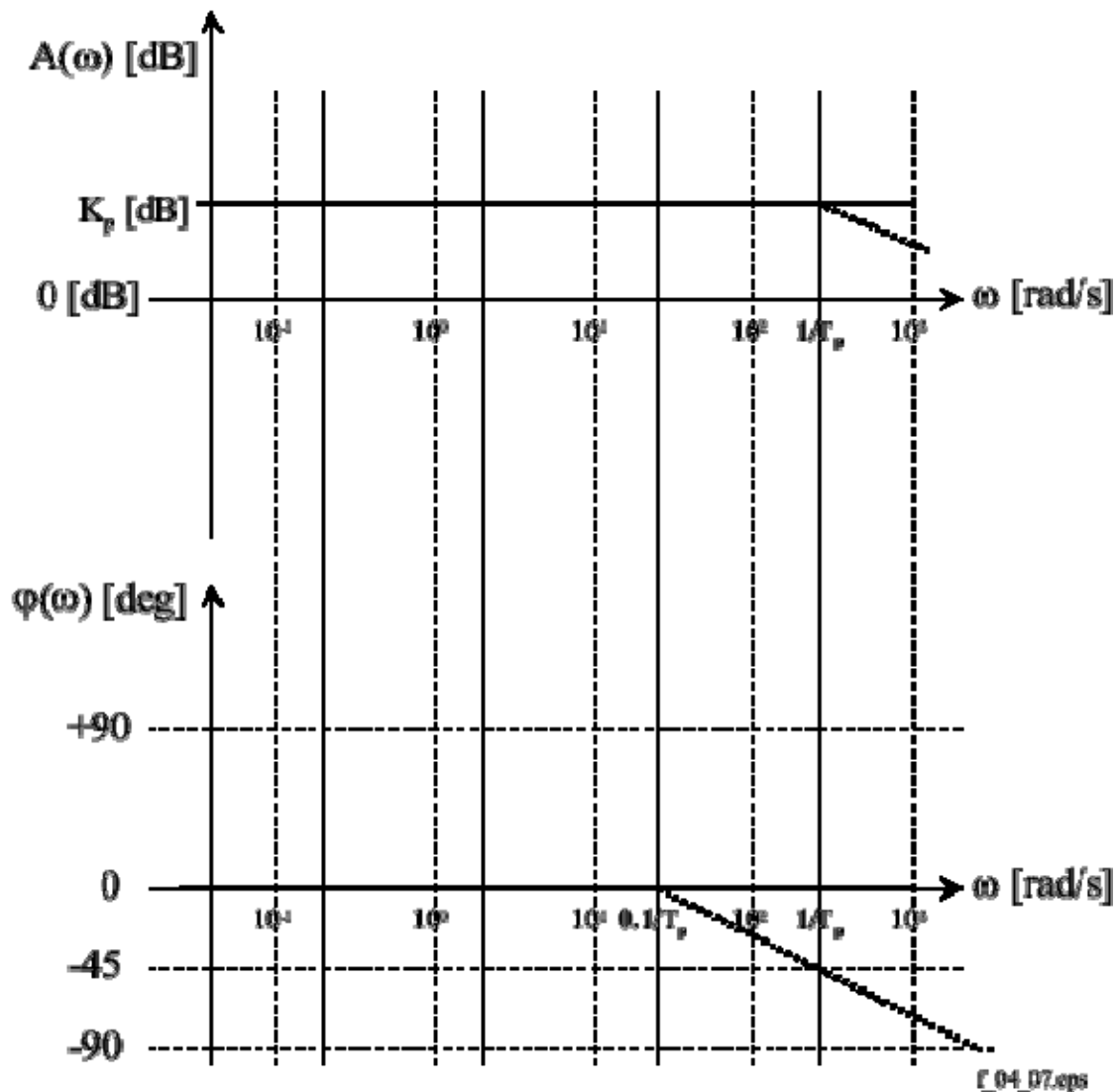


Figure: Réponse harmonique du régulateur P.

L'atténuation esquissée en traitillé à partir de la pulsation  $\frac{1}{T_p}$  rappelle que la caractéristique entrée-sortie de tout élément physiquement réalisable tend toujours vers 0 lorsque la fréquence tend vers l'infini. Dans le cas du régulateur P, elle est par exemple due aux limites en fréquence de l'amplificateur opérationnel utilisé pour sa réalisation électronique:

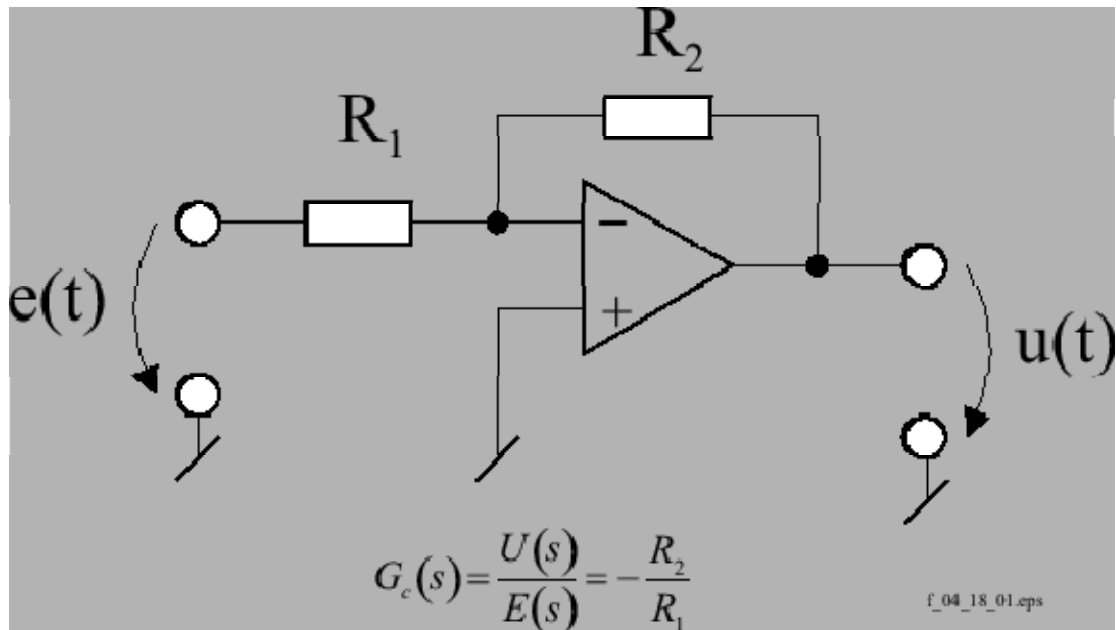


Figure 4.14:

Les inductance et capacité parasites des résistances pourraient également intervenir, certes à plus haute fréquence.

### Avantages et inconvénients de l'action proportionnelle

On voit que le régulateur P assure une transmission instantanée du signal d'erreur; dans ce sens, son action est relativement dynamique: sa commande ne dépend pas du passé, ni d'une tendance, mais simplement de ce qui se passe à l'instant présent. Une limitation du régulateur P est son incapacité à annuler notamment l'erreur

statique  $E_{osc}$  en régulation de maintien, i.e. celle qui apparaît consécutivement à

l'intervention d'une perturbation constante. En effet, si la commande  $u(t)$  à appliquer au système doit être non-nulle afin que celui-ci puisse retrouver son état d'équilibre, il est dans le même temps nécessaire que l'erreur soit non-nulle puisque:

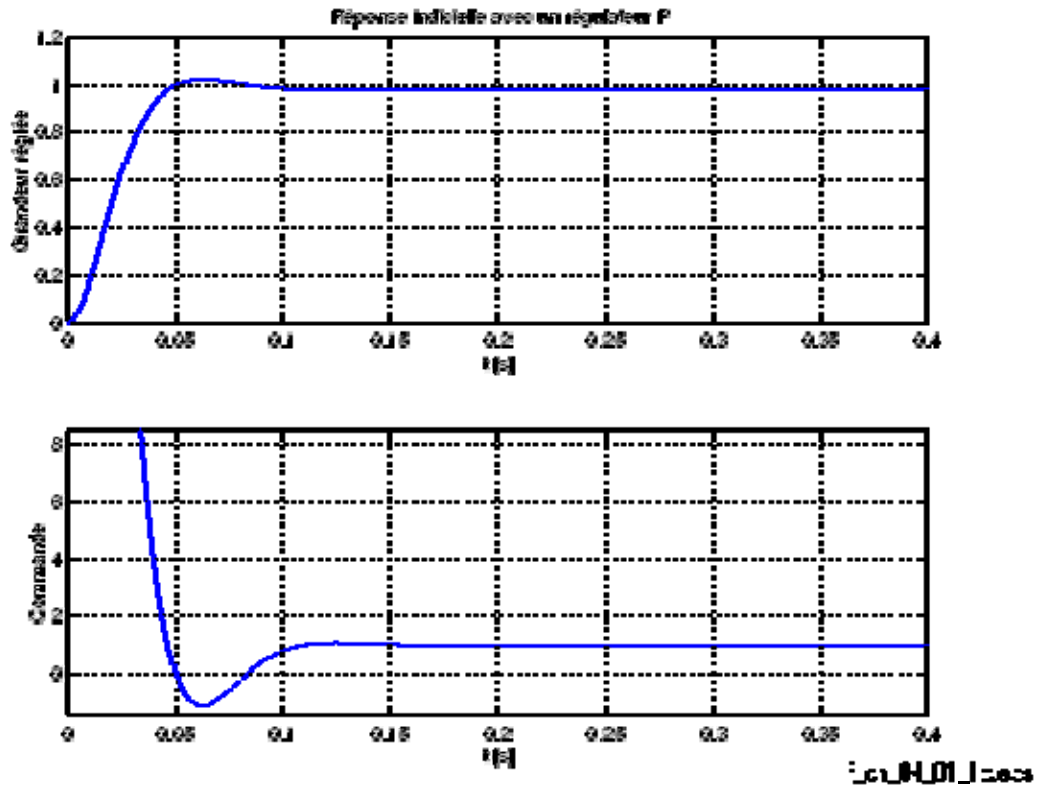
$$u(t) \neq 0 \Rightarrow u(t) = K_p \cdot e(t) \neq 0 \Leftrightarrow e(t) \neq 0$$

La figure ci-dessous illustre le phénomène pour le système à régler

$$G_a(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(1+s) \cdot (1+s \cdot 0.01)}$$

$$K_p = 50$$

contre-réactionné par un régulateur P de gain



**Figure:** Réponse indicielle en boucle fermée avec asservissement par régulateur P: une erreur statique subsiste car le signal de commande  $u(t)$  à appliquer au système à régler  $G_o(s)$  doit être dans ce cas non-nul pour que  $y(t)$  atteigne un niveau différent de zéro.

## Régulateur à action intégrale (I)

### Le problème de l'erreur statique

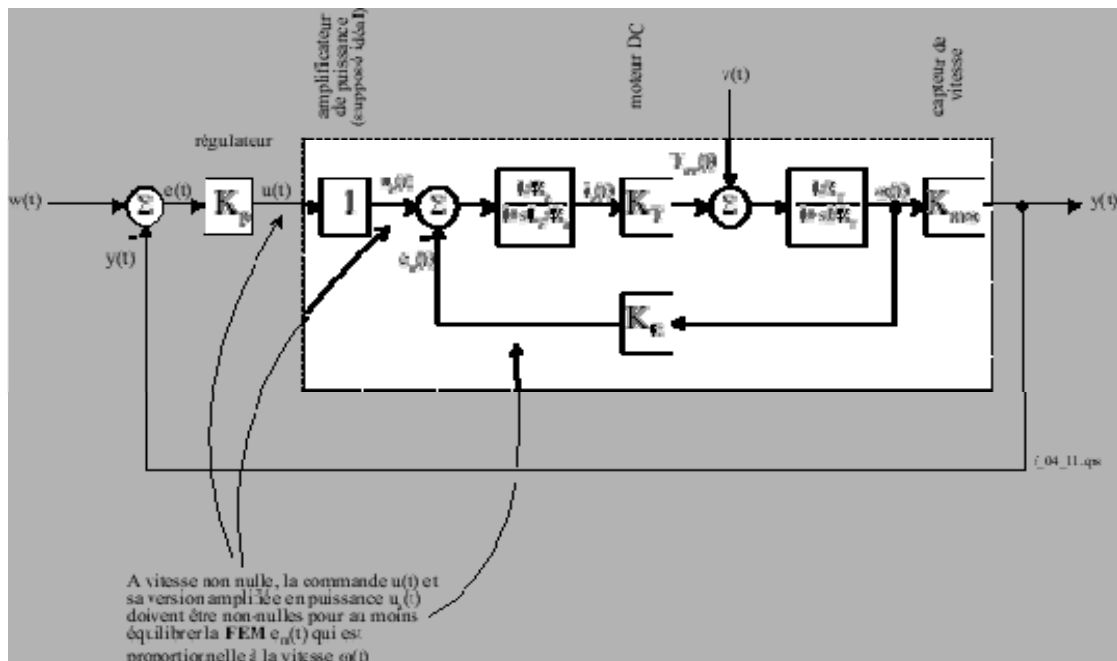
Les exemples des asservissements de vitesse et de température vus au chapitre 1 ont montré qu'un système, même contre-réactionné par un régulateur P, pouvait présenter une erreur permanente en régime permanent constant. Cette erreur intervenant alors que les signaux d'entrée (consigne ou perturbation) sont constants, on la désigne par **erreur statique**.

Dans le cas de la régulation de vitesse, ce phénomène s'explique par le fait que même dans un cas aussi banal que lorsque le moteur est à vitesse constante ( $\omega =$

const.) et à vide ( $T_{\text{res}} = 0 \text{ [Nm]}$ ), le moteur DC doit être alimenté par une tension

aux bornes de l'induit  $u_a(t)$  égale à la tension induite  $e_m(t)$  :

$$u_a(t) = R_a \cdot \underbrace{i_a(t)}_{\frac{T_{\text{res}}}{K_T} = 0} + \underbrace{e_m(t)}_{K_E \omega \neq 0}$$



**Figure:** Asservissement de vitesse d'un moteur DC. La tension  $u_a(t)$  aux bornes de l'induit doit être non-nulle si la vitesse  $\omega(t)$  est différente de zéro, ne serait-ce que pour équilibrer  $e_m(t)$  (au moins) la FEM.

Ainsi, même en régulation de correspondance, soit sans couple résistant, l'erreur statique est non nulle:

$$u(\infty) = e_m(\infty) = K_p \cdot e(\infty) \neq 0 \Leftrightarrow E_{\text{cor}} \neq 0$$

Il faut donc que le système présente une erreur pour qu'une tension d'alimentation  $u_a(\infty)$  non-nulle soit appliquée aux bornes de l'induit.

Il n'en va pas autrement en régulation de maintien: si des perturbations de couple interviennent, telles que les frottements sec ou visqueux ou plus généralement un

couple résistant  $T_{\text{res}}(t)$  agissant sur son arbre, le moteur doit fournir du couple pour



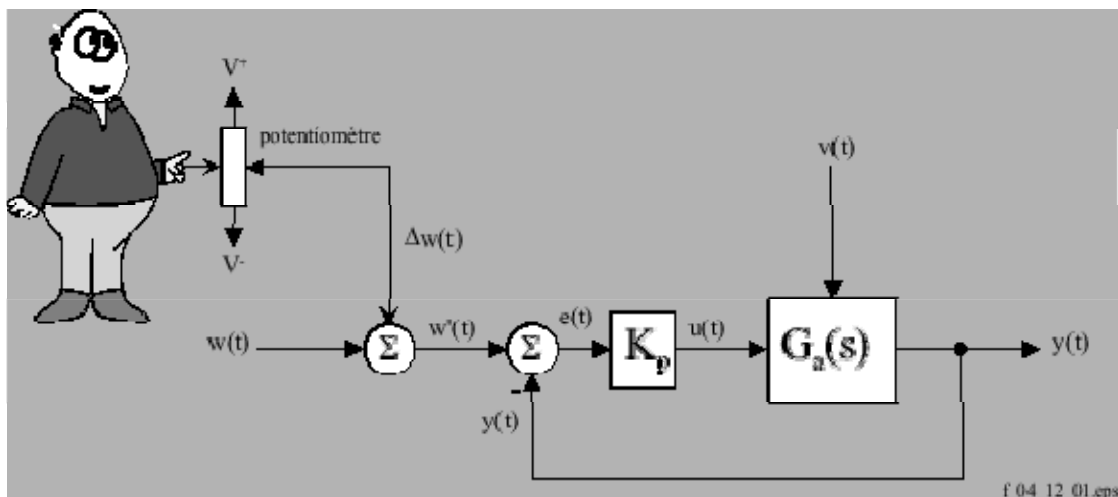
les compenser afin de se maintenir en état d'équilibre. Ce couple (moteur) ne peut alors être fourni que si la tension  $u_a(t)$  aux bornes de l'induit est supérieure à la tension induite  $e_m(t)$  :

$$u_a(t) = R_a \cdot \overbrace{i_a(t)}^{\frac{T_{em}}{K_T} \neq 0} + \overbrace{e_m(t)}^{K_E \omega \neq 0}$$

Celle-ci étant positive différente de zéro puisque le moteur tourne,  $u_a(t)$  doit donc être positive différente de zéro. Avec un régulateur de type P, l'erreur ne peut donc qu'être différente de zéro et le système asservi présente donc ce qu'on appelle du **statisme**.

### Annulation de l'erreur statique

Pour remédier au problème du statisme, on pourrait dans un premier temps augmenter la consigne de la valeur de l'erreur statique constatée  $E_{\infty}$  (figure 4.17).

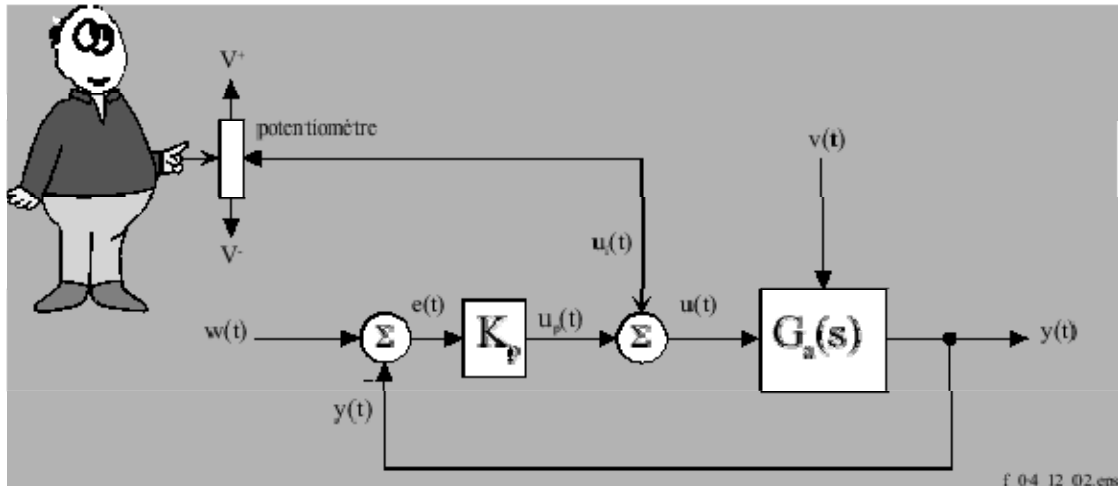


**Figure:** Annulation manuelle de l'erreur statique par décalage de la consigne.

Sur cette lancée, on pourrait décider d'agir directement sur la commande  $u(t)$  en procédant comme suit (figure 4.18):

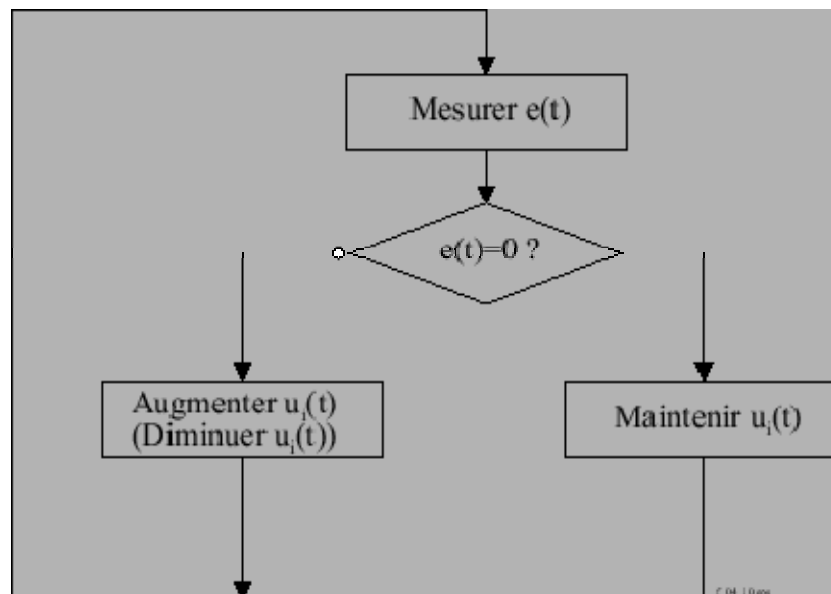
- ajouter à la commande  $u_p(t)$  issue du régulateur P la quantité ajustable  $u_i(t)$  ;

- augmenter ou diminuer  $u_i(t)$  progressivement jusqu'à ce que  $e(t)$  soit nulle;
- $u_p$  est alors nulle ( $u_p = 0$ ) et  $u_i$  est exactement égale à la valeur nécessaire à la compensation de l'erreur statique, et bien que l'erreur soit nulle, la commande  $u(t) = u_p(t) + u_i(t)$  est bel et bien non-nulle.



**Figure 4.18:** Annulation manuelle de l'erreur statique par augmentation du signal de commande.

En vue d'automatiser cette procédure, on la transcrit sur le diagramme suivant:



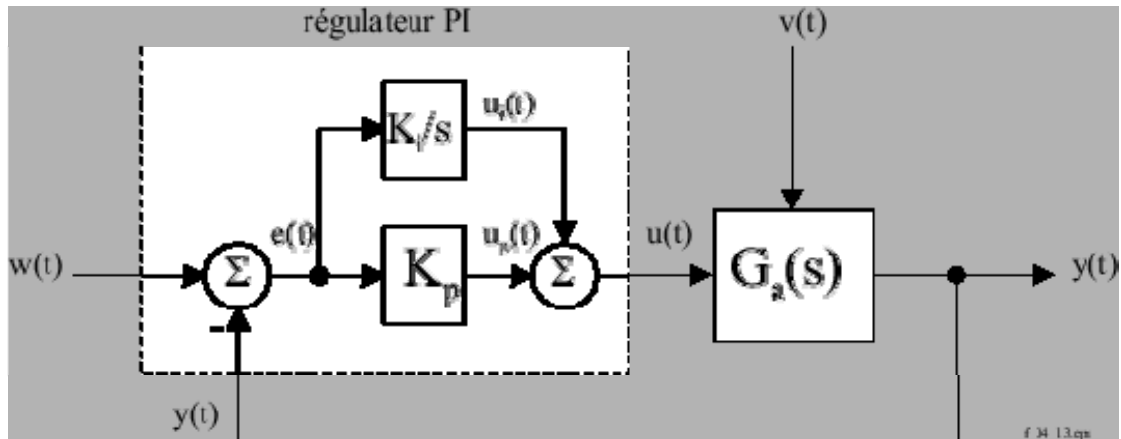
**Figure:** Annulation manuelle de l'erreur statique par augmentation du signal de commande: suite des opérations effectuées.

On voit qu'il s'agit de trouver un élément, complétant l'action P, qui accumule le signal

$e(t)$  d'entrée et se maintient à son dernier niveau lorsque l'erreur est nulle: la solution consiste à **intégrer l'erreur**. La loi de commande est donc:

$$u_i(t) = \frac{1}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot d\tau$$

La commande proposée est formée des deux contributions  $u_p$  et  $u_i$ , contributions proportionnelle (P) et intégrale (I). Le régulateur est donc à actions proportionnelle et intégrale: c'est un régulateur **PI**.



**Figure:** Asservissement par régulateur PI.

### Loi de commande, fonction de transfert, réponses indicielle et harmonique du régulateur PI

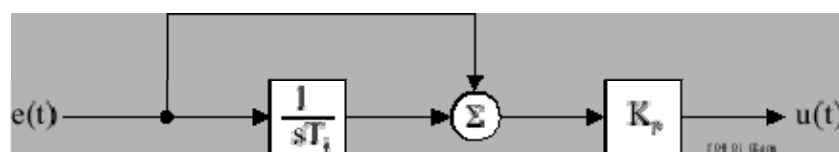
- Loi de commande du régulateur PI:

$$u(t) = K_p \cdot \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot d\tau \right)$$

- Fonction de transfert du régulateur PI:

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot \frac{1 + s \cdot T_i}{s \cdot T_i}$$

- Schéma fonctionnel du régulateur PI:



**Figure:** Schéma fonctionnel du régulateur PI.

- Réponse indicielle du régulateur PI:

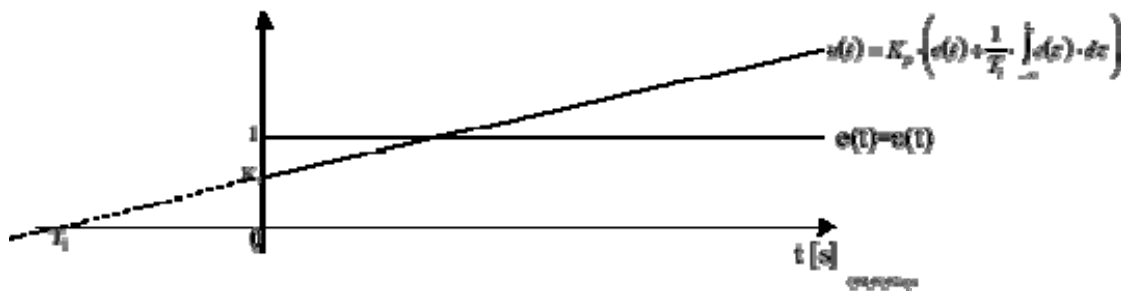


Figure: Réponse indicielle du régulateur PI.

- Réponse harmonique du régulateur PI:

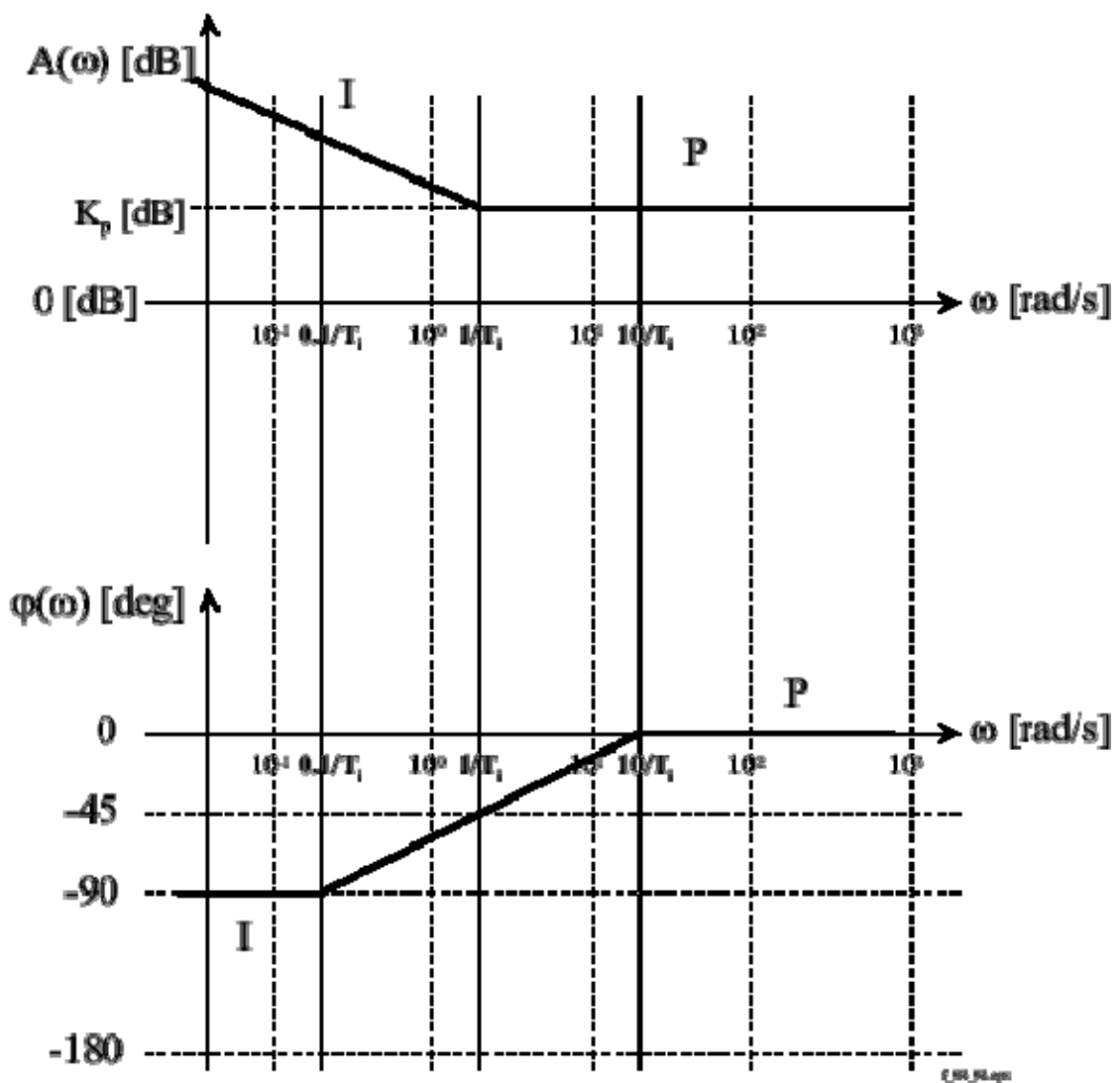
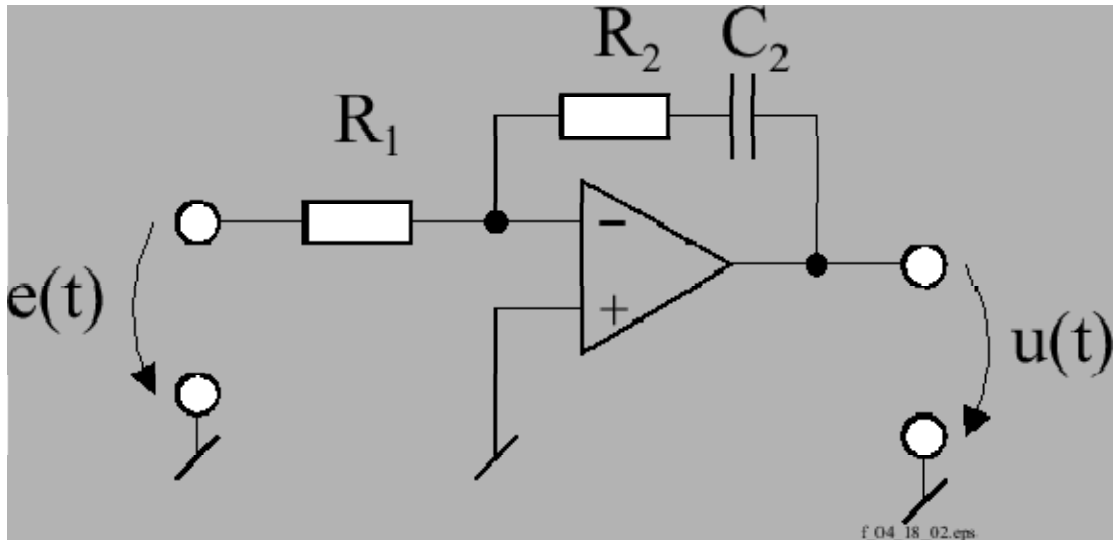


Figure: Réponse harmonique du régulateur PI.

- Réalisation électronique de principe:



**Figure:** Réalisation électronique de principe d'un régulateur PI.

- A la mise sous tension de l'installation, il faut veiller à ce que la capacité  $C_2$  soit initialisée à une valeur correcte (en principe déchargée), sans quoi le système risque d'emblée de recevoir un saut de commande  $u(t)$ . Un dispositif de décharge de  $C_2$  est donc à prévoir.

## Régulateur I pur

L'action P du régulateur PI n'est pas utile du point de vue de la précision en régime permanent; cependant, le fait que l'action P permette la transmission instantanée du signal d'erreur rend le régulateur PI plus dynamique que le régulateur I pur, mis en oeuvre dans quelques cas particuliers où la vitesse n'est pas importante et où l'on souhaite avoir une action relativement "molle" sur le système à régler.

- Loi de commande du régulateur I:

$$u(t) = \frac{K_p}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot d\tau = K_i \cdot \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot d\tau$$

- Fonction de transfert du régulateur I:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_p}{s \cdot T_i} = \frac{K_i}{s}$$

Le régulateur PI est le régulateur le plus utilisé en pratique où ses contributions à la **précision** mais aussi à la **robustesse** du système asservi sont particulièrement appréciées.

## Avantages et inconvénients de l'action intégrale

La réponse harmonique du régulateur PI (figure [4.23](#)) montre que celui-ci est à action plutôt intégrale à basse fréquence et plutôt proportionnelle à haute fréquence. Ce comportement intégrateur à basse fréquence fait l'avantage du principal du régulateur PI, son action I permettant d'annuler une erreur statique. Cela peut également se comprendre en observant sur la réponse harmonique qu'à basse fréquence, le gain de l'intégrateur tend vers l'infini: en d'autres termes, le gain de boucle

$$G_o(j\omega) = G_e(j\omega) \cdot G_a(j\omega)$$

tend vers l'infini et l'on a, en régulation de correspondance d'une part

$$G_w(j \cdot \omega) = \frac{Y(j \cdot \omega)}{W(j \cdot \omega)} = \frac{G_o(j \cdot \omega)}{1 + G_o(j \cdot \omega)} \rightarrow 1 \quad \text{pour} \quad G_o(j \cdot \omega) \rightarrow \infty$$

et en régulation de maintien d'autre part

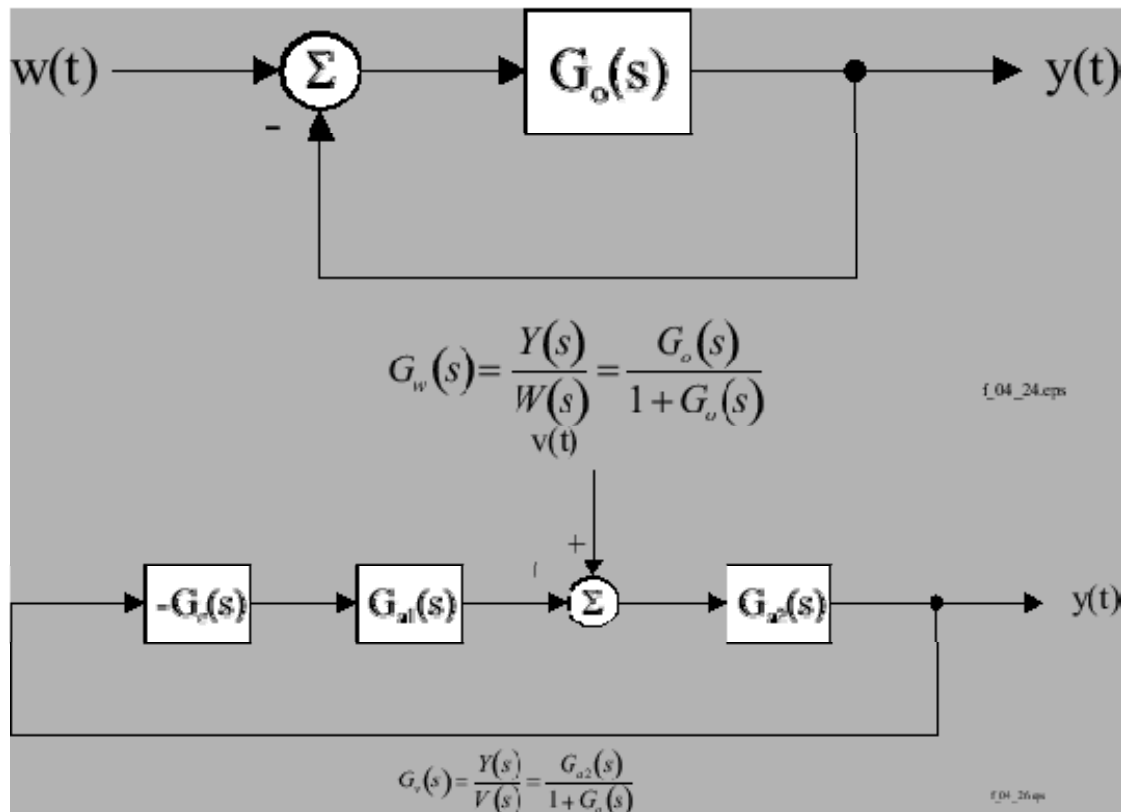
$$G_v(j \cdot \omega) = \frac{Y(j \cdot \omega)}{V(j \cdot \omega)} = \frac{G_{a2}(j \cdot \omega)}{1 + G_o(j \cdot \omega)} \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad G_o(j \cdot \omega) \rightarrow \infty$$

L'examen de ces deux fonctions de transfert en boucle fermée, évaluées en basses fréquences,

peut montrer un autre avantage du terme intégrateur: si le gain  $G_a(j\omega)$  varie quelque peu, les performances en boucle fermée du système ne s'en ressentent que faiblement puisque l'on a approximativement:

$$G_w(j \cdot \omega) = \frac{Y(j \cdot \omega)}{W(j \cdot \omega)} = \frac{G_o(j \cdot \omega)}{1 + G_o(j \cdot \omega)} \rightarrow \frac{\infty}{1 + \infty} \rightarrow 1$$

$$G_v(j \cdot \omega) = \frac{Y(j \cdot \omega)}{V(j \cdot \omega)} = \frac{G_a(j \cdot \omega)}{1 + G_o(j \cdot \omega)} \rightarrow \frac{G_a(j \cdot \omega)}{1 + \infty} \rightarrow 0$$



$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}$$

$$G_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_{d2}(s)}{1 + G_v(s)}$$

On dit que le régulateur à action intégrale améliore la **robustesse** du système, rendant en particulier ses performances de précision peu dépendantes des variations des paramètres (notamment du gain permanent  $K_0$ ) du système à régler  $G_o(s)$ .

L'inconvénient du régulateur PI peut se déduire directement de sa réponse fréquentielle (figure 4.23), laquelle montre qu'à basse fréquence, tous les signaux sont déphasés de  $-90^\circ$  : l'action intégrale est lente et ralentit ainsi la propagation des signaux dans la boucle. Elle augmente ainsi le **risque d'instabilité** inhérent à tout système contre-réactionné. Il faut donc être sur ses gardes lorsque l'on s'apprête à mettre en oeuvre un régulateur comprenant un action intégrale. Dans le meilleur des cas, la stabilité du système est maintenue grâce au talent de l'ingénieur automaticien mais ses **performances dynamiques** (rapidité) sont forcément dégradées en comparaison des résultats obtenus avec un régulateur P. On obtient donc un système asservi plus précis mais moins rapide.

De plus, la **commande intégrale atteignant son maximum lorsque l'erreur est nulle**, il est vraisemblable que la réponse indicielle (en régulation de correspondance) du système asservi présente un dépassement plus important qu'avec un régulateur P. En effet, en se plaçant dans la situation où le système asservi reçoit un saut de

consigne  $w(t) = z(t)$ , on comprend d'une manière intuitive que la contribution intégrale ne cesse de croître que lorsque l'erreur s'annule. Ainsi, l'action I "pousse" de plus en plus le système tout pendant que l'erreur est de même signe et l'entraîne d'autant plus violemment que le gain  $\frac{K_p}{T_i}$  sur cette action est élevé. Si, au moment  $t_{01}$  où l'erreur s'annule pour la première fois, la commande  $u(t_{01})$  est trop élevée, le système dépasse la consigne et l'erreur change de signe: il y a dépassement. Ceci est en fait nécessaire pour que la commande atteigne son niveau final, l'erreur devant forcément changer de signe afin de diminuer le contenu de l'intégrateur, lequel devant trouver le niveau requis pour maintenir le système à son nouvel état d'équilibre  $y(\infty)$  déterminé par la consigne.

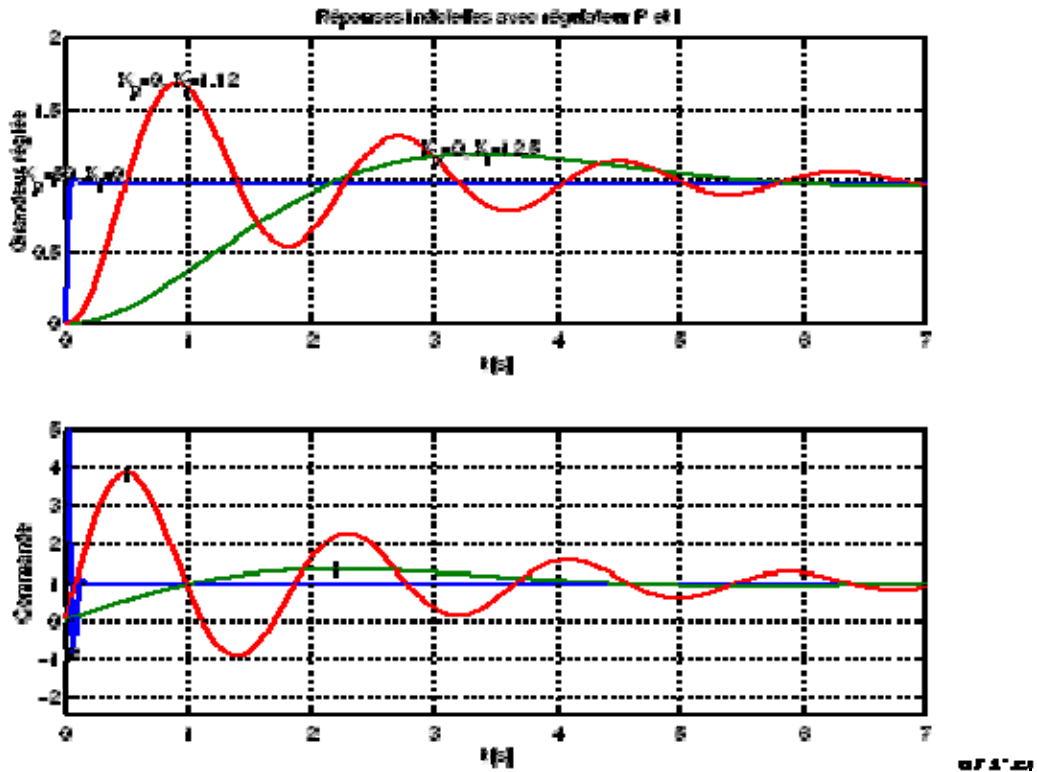
La figure [4.25](#) illustre le phénomène pour le système à régler

$$G_o(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(1+s) \cdot (1+s \cdot 0.01)},$$

contre-réactionné de trois manières différentes:

- régulateur P de gain  $K_p = 50$  ;
- régulateur I pur de gain  $K_i = 1.12$  ;
- régulateur I pur de gain  $K_i = 12.5$  ;





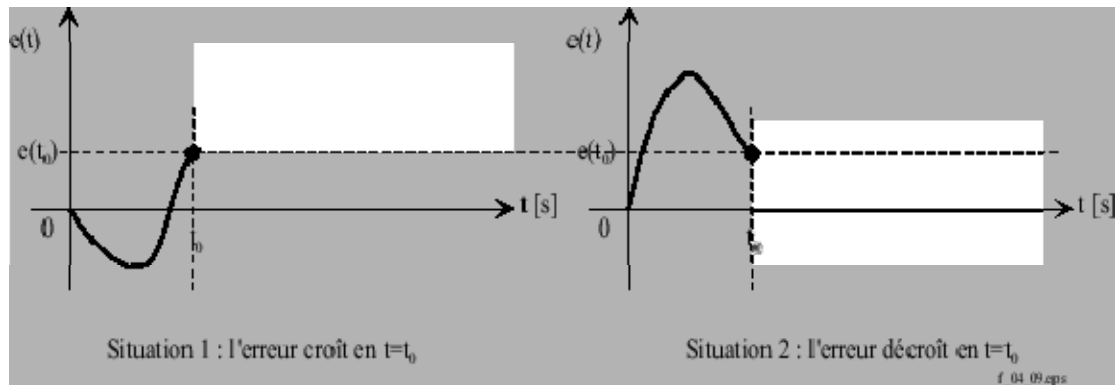
**Figure:** Réponses indicielles en boucle fermée, régulateur P pur avec  $K_p = 50$ , I pur avec  $K_i = 12.5$  et  $K_i = 1.12$ .

On observe qu'en  $t_{01}$ , pour  $K_p = 0$ , l'erreur s'annule mais les commandes sont respectivement nulle et maximale pour les régulateurs P et I. De plus, lorsque le gain sur l'action intégrale est trop élevé, un comportement oscillatoire mal amorti est observable. Enfin, il vaut la peine de remarquer qu'avec le régulateur P, une erreur statique subsiste alors qu'en revanche, le système est beaucoup plus rapide.

## Régulateur à action proportionnelle (P) et dérivée (D)

Considérons les deux situations suivantes (figure 4.26), où l'erreur  $e(t_0)$  a la même amplitude, mais où

- elle croît dans le premier cas;
- elle décroît dans le second cas.



**Figure:** Présentation de situations d'asservissement identiques en  $t = t_0$  pour un régulateur P.

Intuitivement, on conçoit qu'il serait illogique d'appliquer dans ces deux situations la même commande  $u(t_0)$ , bien que ce soit bel et bien l'action qu'entreprendrait un régulateur de type P!

Il vient alors l'idée de former la commande  $u(t_0)$  non pas en tenant compte exclusivement de l'amplitude de l'erreur (action P), mais aussi de son **évolution**, dans le but de savoir quelle est la tendance du signal d'erreur et d'en quelque sorte de la prévoir. Un bon moyen consiste à évaluer son taux de variation, à savoir sa pente en calculant la dérivée de l'erreur en  $t_0$ .

Pour ce faire, la dérivée par rapport au temps  $\frac{de}{dt}$  du signal d'erreur  $e(t)$  est calculée au moyen d'un bloc fonctionnel. Multipliée par un gain ajustable  $T_d$ , cette contribution est ensuite ajoutée à celle de l'action P. La loi de commande du régulateur PD obtenu est alors:

$$u(t) = K_p \cdot \left( e(t) + T_d \cdot \frac{de}{dt} \right)$$

## Loi de commande, fonction de transfert, réponses indicielle et harmonique du régulateur PD

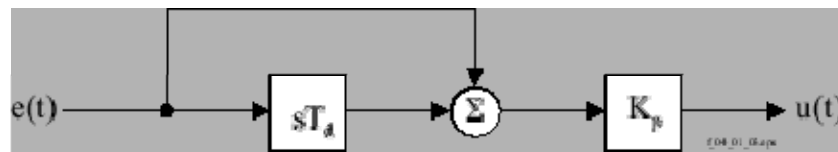
- Loi de commande du régulateur PD:

$$u(t) = K_p \cdot \left( e(t) + T_d \cdot \frac{de}{dt} \right)$$

- Fonction de transfert du régulateur PD:

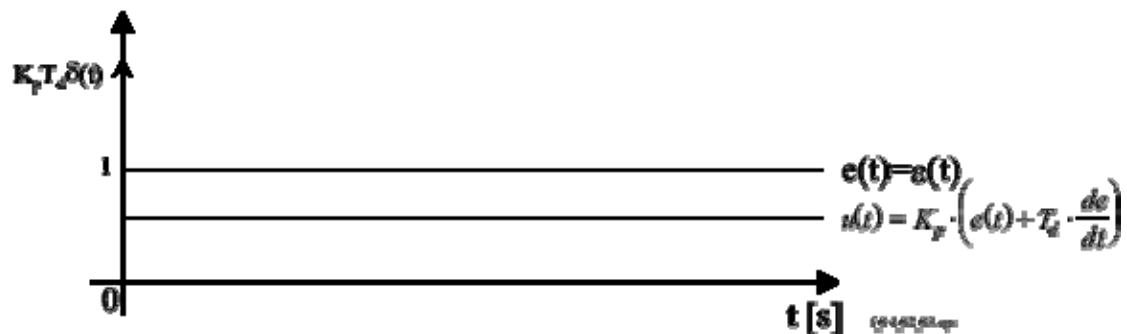
$$G_e(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot (1 + s \cdot T_d)$$

- Schéma fonctionnel du régulateur PD:



**Figure:** Schéma fonctionnel du régulateur PD.

- Réponse indicielle du régulateur PD:



**Figure:** Réponse indicielle du régulateur PD.

- Réponse harmonique du régulateur PD:

$$G_e(j \cdot \omega) = \frac{U(j \cdot \omega)}{E(j \cdot \omega)} = K_p \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot T_d)$$

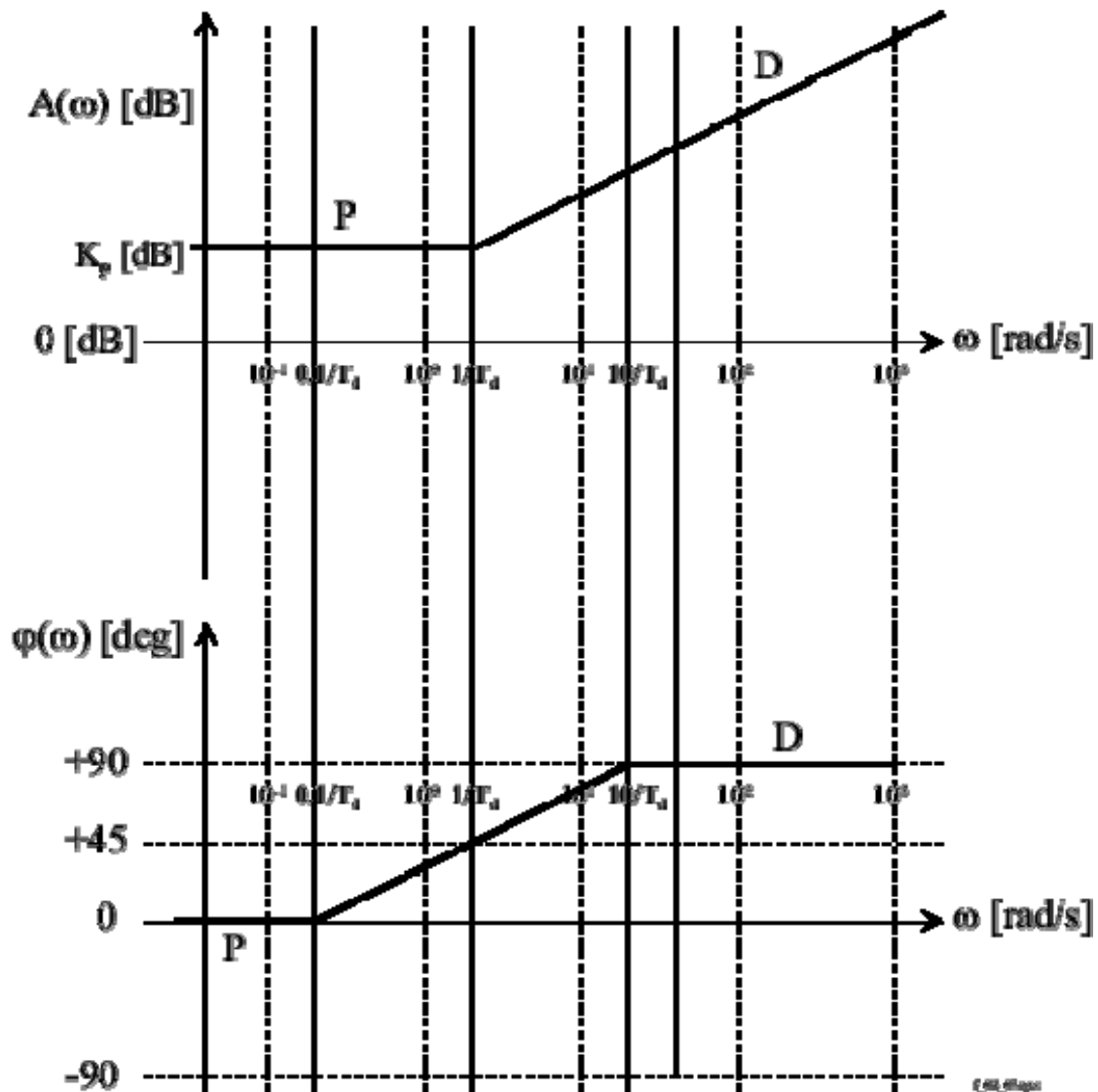


Figure: Réponse harmonique du régulateur PD.

### Avantages: effet stabilisant et amélioration de la rapidité

L'action D apporte une amélioration notable du comportement dynamique, accélérant la vitesse de réaction du régulateur aux moindres variations de l'erreur. Ainsi, un signal d'erreur, si faible que soit son amplitude, pourra générer une réaction très

énergique du régulateur si son taux de croissance  $\frac{de}{dt}$  est élevé. L'action D anticipe donc l'évolution du système et a tendance à accélérer la propagation des signaux dans la boucle, comme le confirme la réponse harmonique ci-dessus, laquelle montre que les signaux de haute fréquence subissent une avance de phase tendant asymptotiquement vers  $+90^\circ$ . On peut d'ores et déjà déduire de cette constatation

que l'action D a un effet plutôt favorable sur la stabilité du système asservi: il est donc important de réaliser que **l'action D est plutôt stabilisante et améliore la rapidité des systèmes**. La figure [4.30](#) compare les réponses indicielles en boucle fermée, régulation de correspondance, avec des régulateurs P et PD de même gain

proportionnel  $K_p = 1$  ;

- Système à régler:

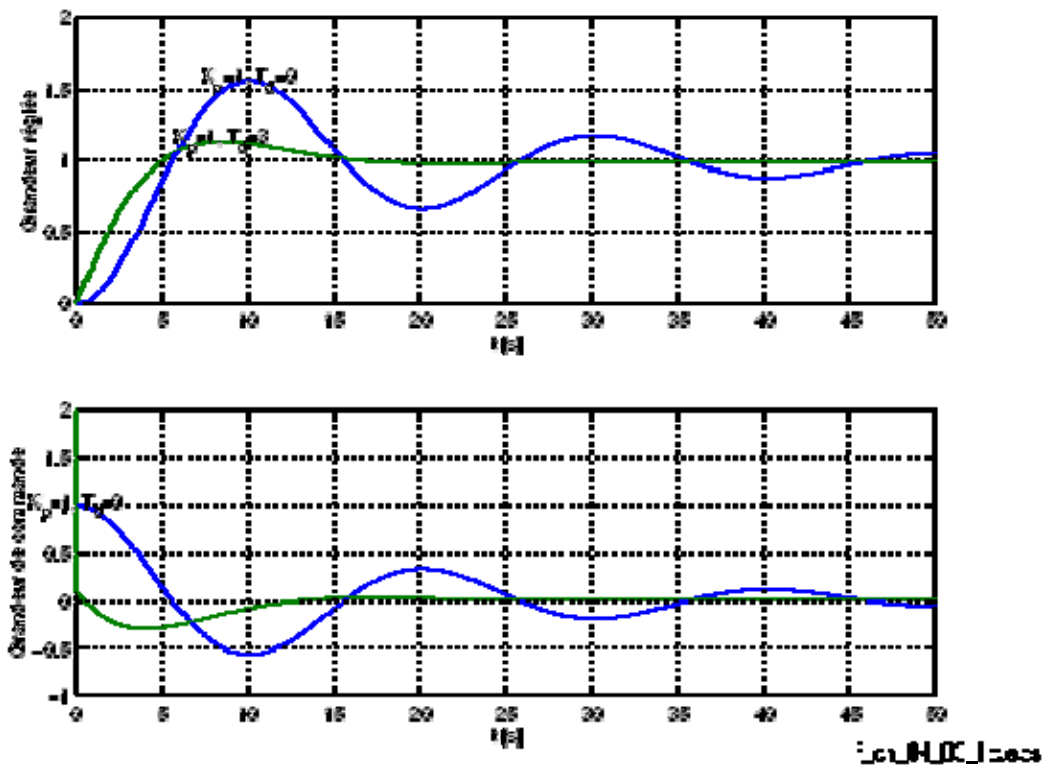
$$G_e(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{100}{(1 + s \cdot 10) \cdot (1 + s \cdot 100)}$$

- Régulateur P:

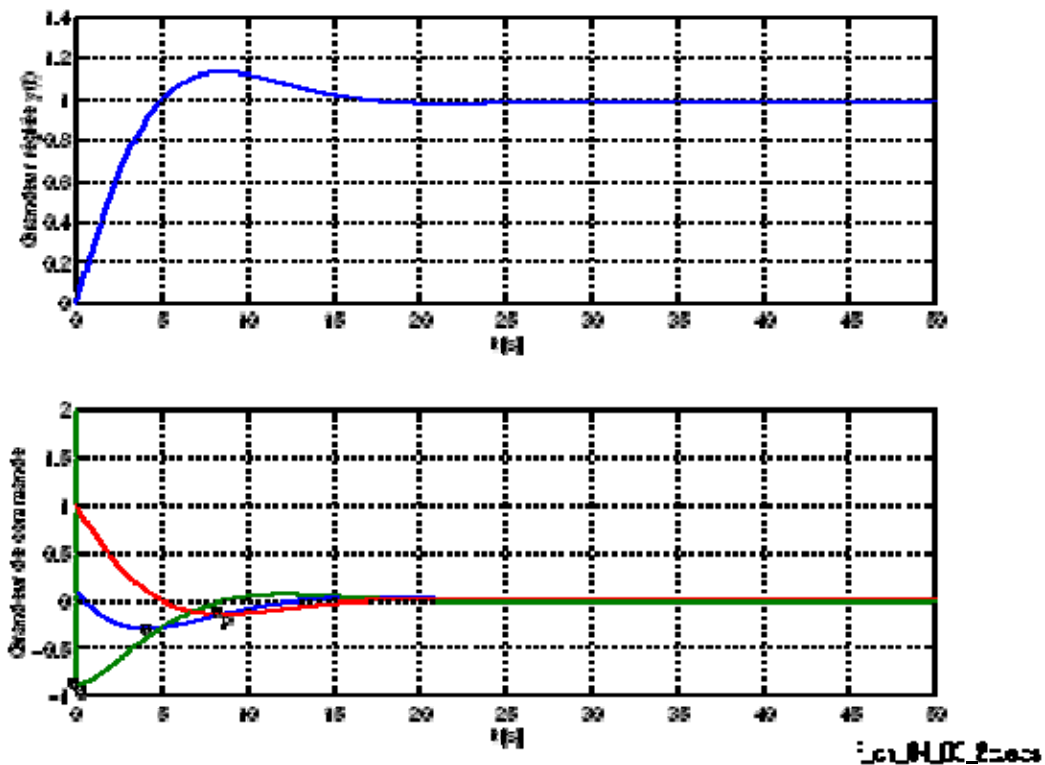
$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p = 1$$

- Régulateur PD:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot (1 + s \cdot T_d) = 1 \cdot (1 + s \cdot 3)$$



**Figure:** Réponses indicielles en boucle fermée, pour un même système asservi par un régulateur P puis un régulateur PD. Ce dernier offre, avec la même action proportionnelle  $K_p = 1$  (dans les 2 cas) un comportement mieux amorti et tout à la fois plus dynamique. Outre le comportement moins oscillatoire du système asservi par un régulateur PD, on remarque que le système est plus rapide. Quant à la commande, on vérifie sur la figure 4.31 qu'après une impulsion de grande amplitude suivant immédiatement l'application du saut unité de consigne, elle change de signe pour "freiner" le système, l'erreur étant déjà en train de décroître. Elle est par ailleurs en avance sur  $e(t)$ , contrairement à la commande purement proportionnelle.



**Figure:** Réponse indicielle en boucle fermée avec régulateur PD. La décomposition de la commande  $u(t)$  en ses contributions proportionnelle ( $u_P(t)$ ) et dérivée ( $u_D(t)$ ) montre bien l'effet d'anticipation ("freinage") de l'action D.

Des contre-exemples démentant cette affirmation peuvent cependant être trouvés en relevant que si que l'effet d'avance de phase de l'action D est favorable par le fait qu'il facilite la propagation des signaux dans la boucle, cette avance est néanmoins **limitée** à la valeur (respectable) de  $+90^\circ$ , alors que le gain continue à croître sans limite au rythme de  $+20 \left[ \frac{\text{dB}}{\text{décade}} \right]$ . Il est donc plausible de se retrouver dans une situation où les  $+90^\circ$  d'avance que subit un signal haute fréquence sont en partie ou totalement compensés par les retards propres au système à régler (par exemple dans le cas d'un système possédant un retard pur) alors que le gain reste à une valeur élevée. Les méthodes d'analyse harmonique étudiées ultérieurement (chap.6) permettront de quantifier précisément ce problème.

Une conséquence directe de l'effet d'anticipation de l'action D est qu'il est a priori plus facile de limiter les dépassements de la réponse indicielle avec un régulateur PD qu'avec un régulateur P ou PI: l'action D apporte une contribution allant diminuant

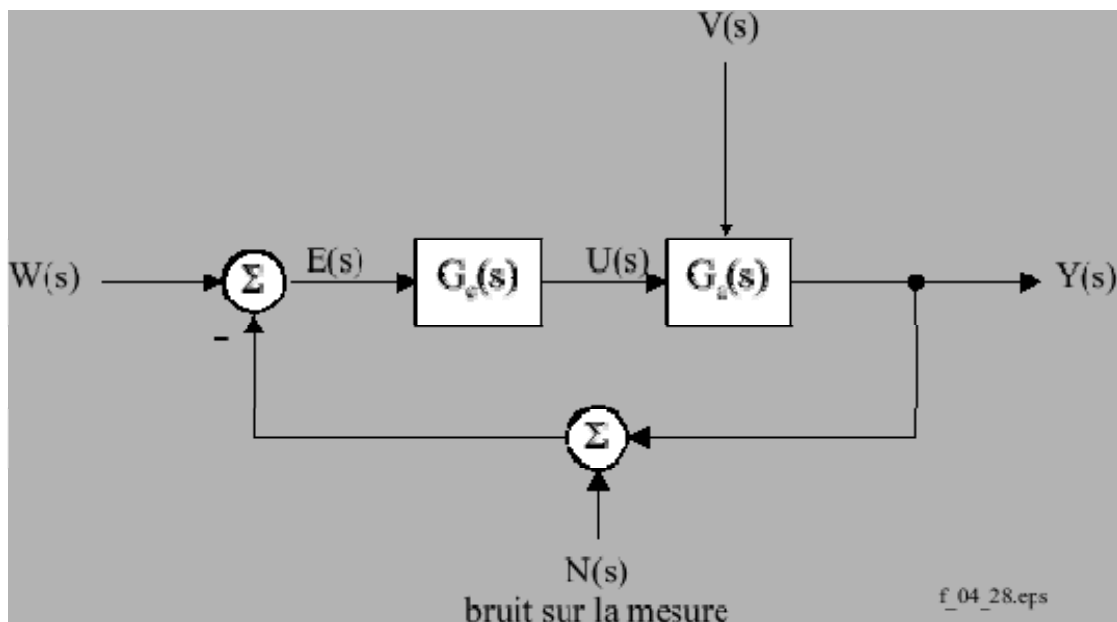
dès le moment où l'erreur décroît, introduisant ainsi un effet de freinage lors de l'approche de la consigne. Dans ce sens, l'action D est une commande particulièrement "intelligente".

### Inconvénients: sensibilité aux bruits et précision statique

Un inconvénient majeur de l'action D est à rechercher au niveau de l'effet des bruits intervenant sur la mesure. Le dérivateur amplifie l'effet des bruits et ceci d'autant plus que ceux-ci se situent par nature dans une gamme de fréquences relativement

élevées. On a en effet, dans le cas d'un bruit sinusoïdal de fréquence  $f$  :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \hat{N} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \right) = \underbrace{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \hat{N}}_{\text{amplitude multipliée par } f} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$



**Figure:** Prise en compte de la présence bruit  $n(t)$  sur la mesure.

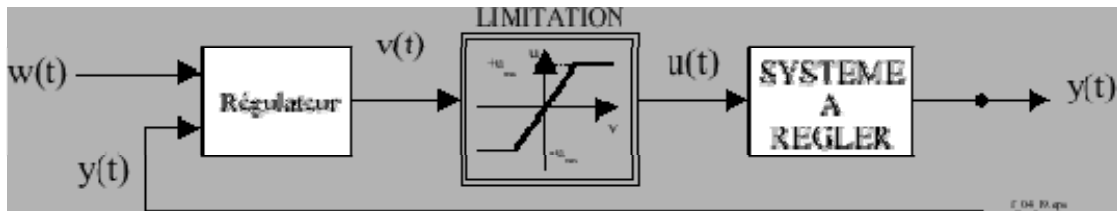
En conséquence, la commande  $u(t)$  peut être s'avérer inutilisable, malmenant le système à régler et notamment l'actionneur par des à-coups très violents. Il s'agit là d'un problème très important auquel on se heurte presque toujours en pratique. Une ébauche de remède sera proposée au paragraphe [4.4.5](#).

Un problème lié à la très grande dynamique de la réaction du terme D apparaît également lorsque la consigne varie brutalement; le système à régler ayant toujours de l'inertie, i.e. son temps de réaction n'étant pas infiniment court, la variation brutale de la consigne se reflète instantanément sur l'erreur, dont la dérivée peut amener la



commande à des valeurs très élevées, comme le montre la réponse indicielle du régulateur PD. Pratiquement, l'amplitude de la commande est toujours limitée, ne serait-ce que

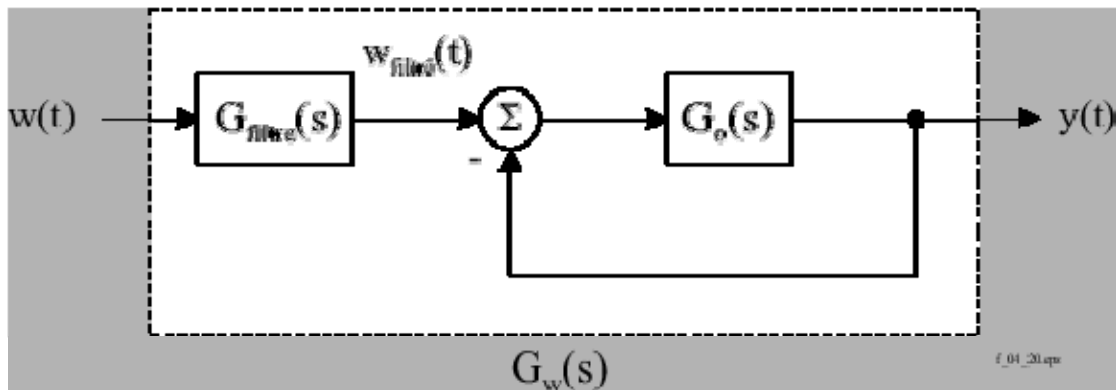
- naturellement, car la puissance disponible bien sûr elle aussi limitée,
- ou encore
- artificiellement à des fins de protection de l'actionneur.



**Figure 4.33:** Limitation volontaire de la grandeur de commande.

En conséquence, il est très vraisemblable qu'à la suite d'une variation trop rapide de la consigne, une saturation de la commande  $u(t)$  intervienne, faisant ainsi travailler le système en régime non-linéaire. Outre le fait qu'une telle situation est anormale et ne devrait pas se prolonger, cela signifie que le modèle du système à régler ne correspond plus à celui adopté. L'analyse et la prédiction de comportement, si elle reste possible, devient néanmoins plus difficile. En pratique, on évite donc d'exciter un système asservi avec des signaux à flancs abrupts comme le saut unité en est un exemple. Ce dernier est et reste donc plutôt un signal d'analyse réservé à

l'identification de la fonction de transfert  $G_o(s)$  du système à régler ou plus simplement aux études théoriques. Une alternative consiste à filtrer la consigne afin de limiter ses variations (figure 4.34).



**Figure:** Filtrage de la consigne afin d'éviter les saturations de la commande.

D'autre part, si l'action D est particulièrement bénéfique en régime transitoire, lorsque la consigne et/ou la grandeur réglée évoluent, offrant une meilleure précision dynamique, il n'en va pas de même en régime permanent où la contribution dérivée est d'autant plus faible que l'erreur varie peu: **elle est même nulle lorsque l'erreur est constante!** De ce fait, il est exclu, dans le contexte d'un système asservi, de mettre en oeuvre un régulateur à action D seule. Un tel régulateur serait très efficace en régime dynamique mais s'avérerait bien sûr totalement inopérant en régime permanent constant, incapable de réagir dans le cas pourtant le plus facile, i.e. celui où l'erreur est constante. Pour l'exemple de la régulation de vitesse de moteur DC précédemment étudié, cela signifie qu'une erreur de vitesse constante ne générerait

aucune tension aux bornes de l'induit:  $u_a(t) = 0[V]$  !

L'action D n'améliore donc pas directement la précision en régime permanent, cette tâche étant à la charge de l'action P voire de l'action I si un régulateur comprenant les trois types d'actions P, I et D est mis en oeuvre. **En conséquence, on notera que l'action D ne permettant pas la transmission d'un signal constant, elle doit donc toujours s'accompagner au moins d'une action P en parallèle (régulateur PD).**

Toutefois, par le fait que l'action D est plutôt stabilisante, le gain de l'action P peut parfois être ajusté à une valeur plus élevée en minimisant le risque d'instabilité: la précision en régime permanent peut être ainsi améliorée indirectement par l'action dérivée.

## Régulateur PD réalisable

L'opérateur effectuant la dérivée du signal d'erreur n'est pas réalisable physiquement; en effet,

l'examen de son lieu de Bode montre que son gain  $A(\omega)$  tend vers l'infini en même temps que la fréquence du signal. La puissance de celui-ci est alors, dans le cas d'un signal sinusoïdal d'amplitude unitaire:

$$p(t) = \left( \frac{d}{dt} e(t) \right)^2 = \left( \frac{d}{dt} \sin(\omega \cdot t) \right)^2 = \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} p(t) = \infty$$

Cette puissance tend vers l'infini lorsque  $\omega$  en fait autant, ce qui rend caduque la réalisation d'un dérivateur pur. Il faut donc s'attendre à ce qu'à partir d'une certaine

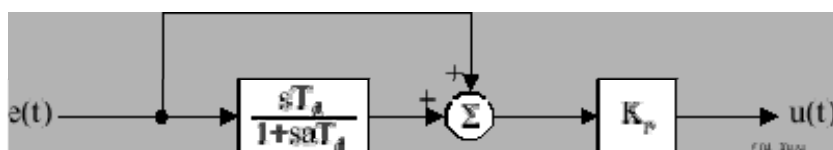
fréquence, le gain  $A(\omega)$  du dérivateur réel cesse d'augmenter au rythme de  $20 \left[ \frac{\text{dB}}{\text{décade}} \right]$  et se stabilise à une valeur constante avant même de décroître. Les fréquences caractéristiques correspondantes sont liées aux imperfections inévitables de la réalisation, telle que par exemple la bande passante finie des amplificateurs opérationnels, les capacités parasites des étages amplificateurs ou plus simplement des résistances, tout autant d'éléments qui provoquent une atténuation du gain à partir d'une fréquence plus ou moins élevée.

En pratique, les conséquences sont négligeables, eu égard à la gamme des fréquences auxquelles ces phénomènes parasites interviennent. Qui plus est, on souhaitera même dans certains cas amplifier leur effet en complétant délibérément l'action D par un filtrage passe-bas de pulsation caractéristique  $\frac{1}{\alpha \cdot T_d}$  nettement plus basse. La raison à cela est d'ordre essentiellement pratique: on souhaite par ce biais atténuer l'effet des bruits. Aussi le régulateur PD réalisé a-t-il souvent pour fonction de transfert:

$$G_e(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot \left( 1 + \frac{s \cdot T_d}{1 + s \cdot \alpha \cdot T_d} \right)$$

$$G_e(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot \frac{1 + s \cdot (1 + \alpha) \cdot T_d}{1 + s \cdot \alpha \cdot T_d}$$

où  $\alpha$  est un coefficient ajustable nommé facteur d'avance de phase valant en général **0.1** à **0.2**.



**Figure:** Schéma fonctionnel d'un régulateur PD réalisable.

Ce régulateur est parfois appelé régulateur à avance de phase, en raison de l'avance provisoire qu'il apporte à la phase, comme le montre sa réponse harmonique:

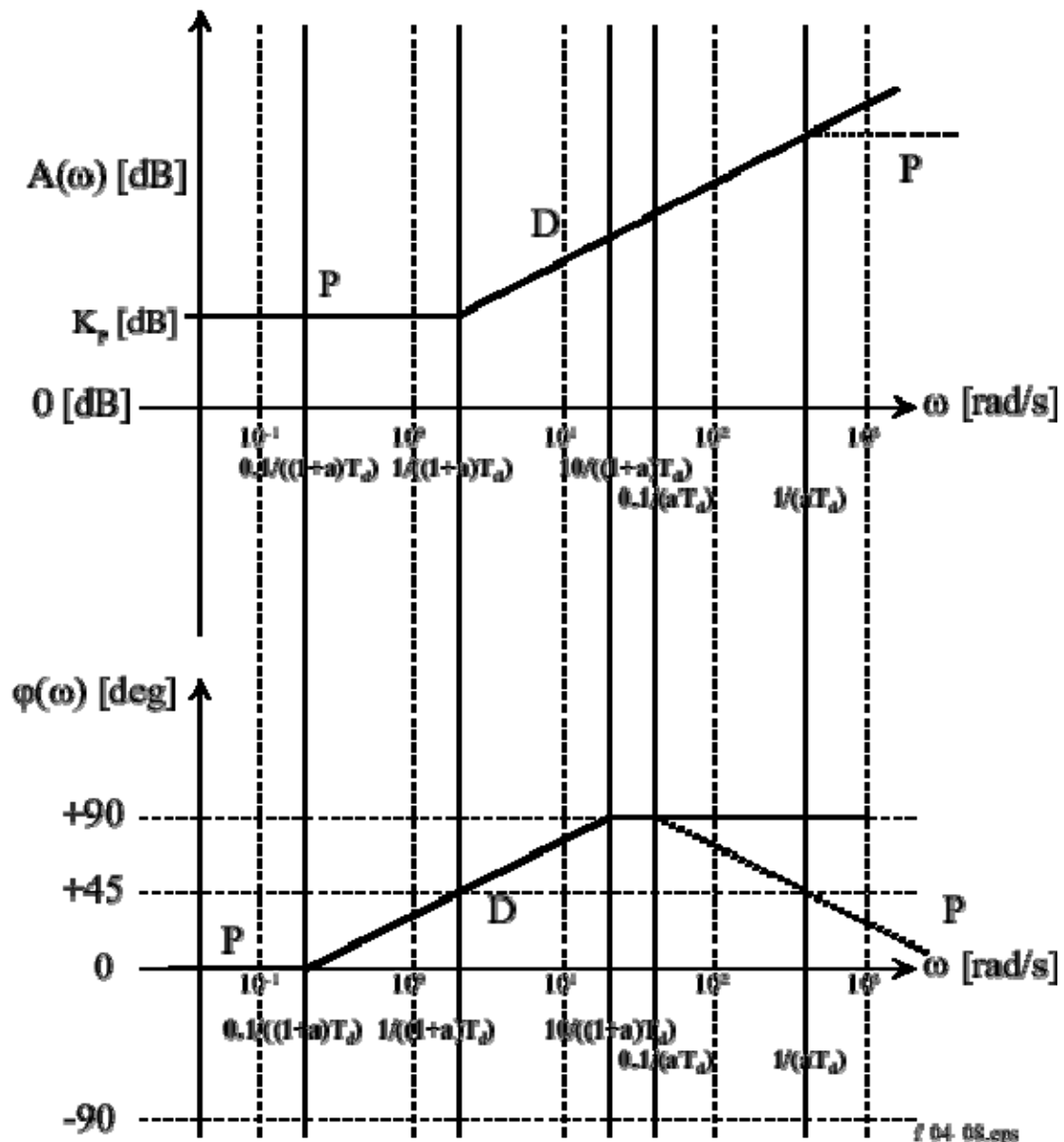


Figure: Réponse harmonique d'un régulateur PD réalisable.

Le calcul et le tracé de la réponse indicielle de ce régulateur sont faits en exercice.

## Régulateur industriel PID

Le régulateur Proportionnel-Intégral-Dérivée est la combinaison des trois actions de base P, I et D. Grâce au terme I, il permet l'annulation d'une erreur statique tout en autorisant des performances de rapidité supérieures à un régulateur PI.

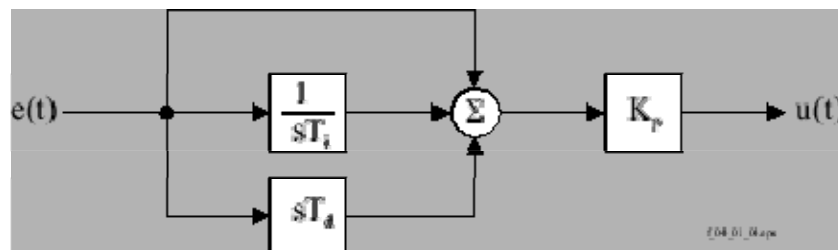
- Loi de commande du régulateur PID:

$$u(t) = K_p \cdot \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot d\tau + T_d \cdot \frac{de}{dt} \right)$$

- Fonction de transfert du régulateur PID:

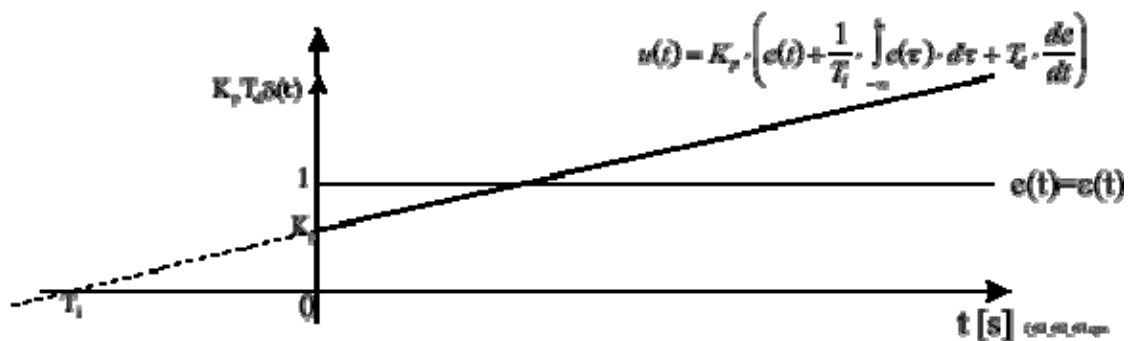
$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot \frac{1 + s \cdot T_i + s^2 \cdot T_i \cdot T_d}{s \cdot T_i}$$

- Schéma fonctionnel du régulateur PID:



**Figure:** Schéma fonctionnel du régulateur PID.

- Réponse indicielle du régulateur PID:



**Figure:** Réponse indicielle du régulateur PID.

- Réponse harmonique du régulateur PID:

$$G_c(j \cdot \omega) = \frac{U(j \cdot \omega)}{E(j \cdot \omega)} = K_p \cdot \frac{1 + j \cdot \omega \cdot T_i + (j \cdot \omega)^2 \cdot T_i \cdot T_d}{j \cdot \omega \cdot T_i}$$

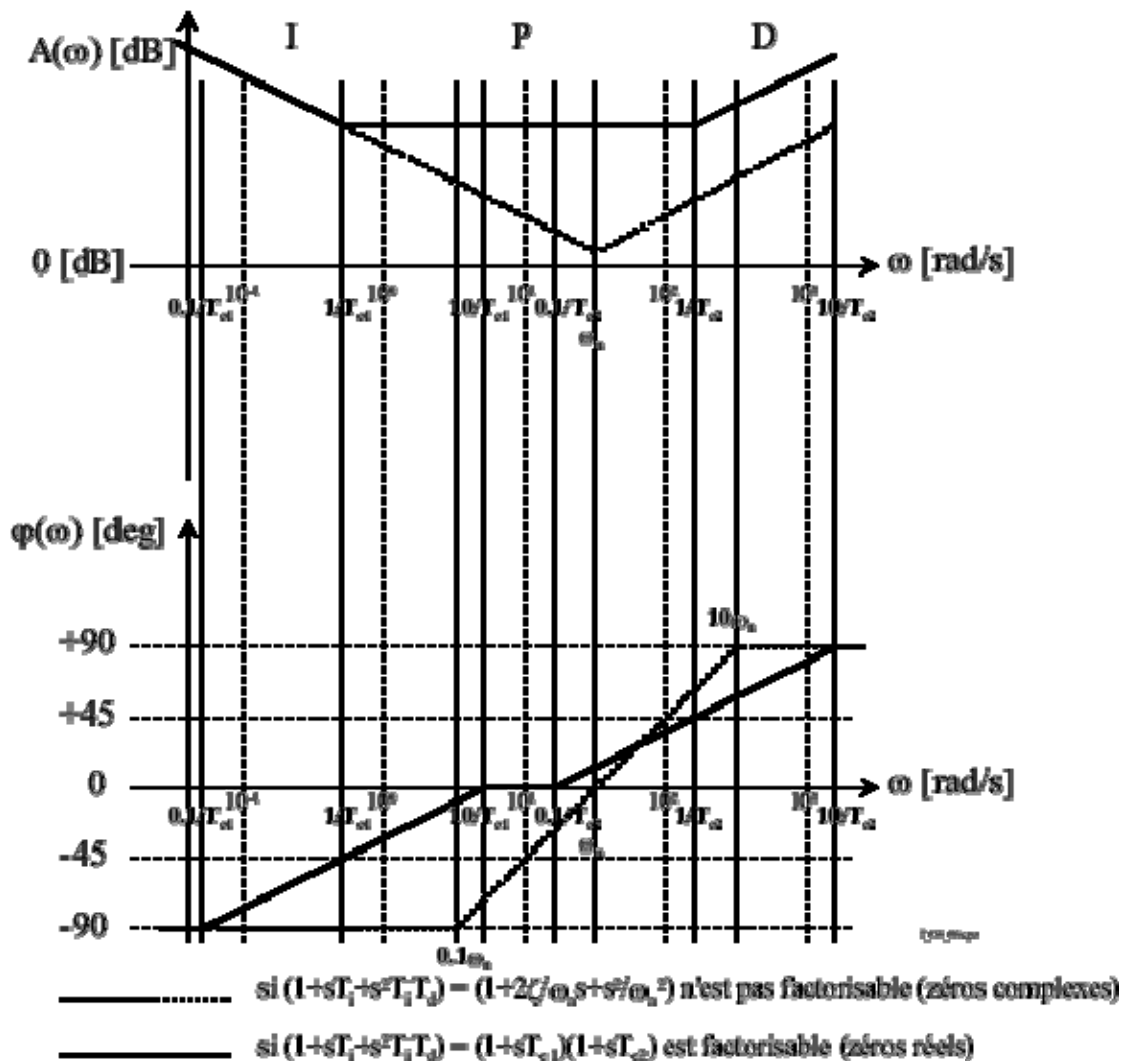


Figure: Réponse harmonique du régulateur PID.

Pour établir les fonctions de transfert des régulateurs PD et PID, on a supposé que le dérivateur pur était réalisable. Ceci explique pourquoi les expressions de  $G_c(s)$  obtenues

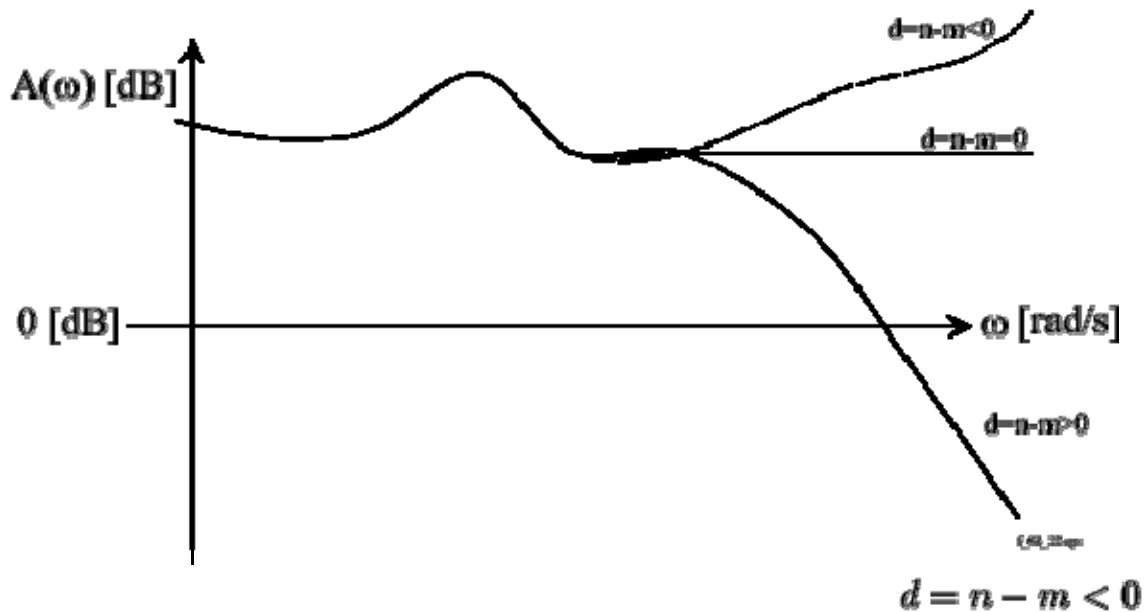
$$G_c(s)|_{PID} = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot \frac{1 + s \cdot T_i + s^2 \cdot T_i \cdot T_d}{s \cdot T_d}$$

$$G_c(s)|_{PD} = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot (1 + s \cdot T_d)$$

$$d = n - m < 0$$

possèdent plus de zéros que de pôles ( ). Cette supposition se justifie pour autant que les phénomènes parasites qui interdisent la construction d'un dérivateur pur interviennent à des fréquences nettement supérieures à la zone de travail du régulateur, ce qui est en principe le cas. On peut donc souvent les prendre telles quelles pour les tracés de réponses indicielles ou harmoniques.

En réalité, tout système physiquement réalisable possède plus de pôles que de zéros ( $d = n - m > 0$ ), ce qui se traduit concrètement par le fait que le gain de tout système finit par décroître et déphaser les signaux lorsque la fréquence est suffisamment élevée. Notons que cette affirmation rend également impossible la réalisation d'un gain pur ( $d = n - m = 0$ )!



**Figure:** Allures générales des gains de systèmes à degré relatif  $d = n - m = 0$  et  $d = n - m > 0$ . Seul ce dernier est physiquement réalisable.

Le calcul suivant montre cela pour un système dynamique linéaire d'ordre  $n$ , ayant

$m$  zéros et de type  $\alpha$  (i.e. ayant  $\alpha$  pôles en  $s = 0 [s^{-1}]$ ):

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K}{s^\alpha} \cdot \frac{1 + s \cdot b_1 + \dots + s^{m-1} \cdot b_{m-1} + s^m \cdot b_m}{1 + s \cdot a_1 + \dots + s^{n-\alpha-1} \cdot a_{n-\alpha-1} + s^{n-\alpha} \cdot a_{n-\alpha}} \\
 &= \frac{K}{(j \cdot \omega)^\alpha} \cdot \frac{1 + (j \cdot \omega) \cdot b_1 + \dots + (j \cdot \omega)^{m-1} \cdot b_{m-1} + (j \cdot \omega)^m \cdot b_m}{1 + (j \cdot \omega) \cdot a_1 + \dots + (j \cdot \omega)^{n-\alpha-1} \cdot a_{n-\alpha-1} + (j \cdot \omega)^{n-\alpha} \cdot a_{n-\alpha}} \\
 &= \frac{K \cdot \frac{b_m}{a_{n-\alpha}}}{(j \cdot \omega)^{n-m}} \Rightarrow \begin{cases} A(\omega) = |G(j \cdot \omega)| \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{K \cdot \frac{b_m}{a_{n-\alpha}}}{\omega^{n-m}} \\ \varphi(\omega) = \arg \{G(j \cdot \omega)\} \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow (n - m) \cdot (-90 [^\circ]) \end{cases}
 \end{aligned}$$

"Hit parade" des régulateurs classiques

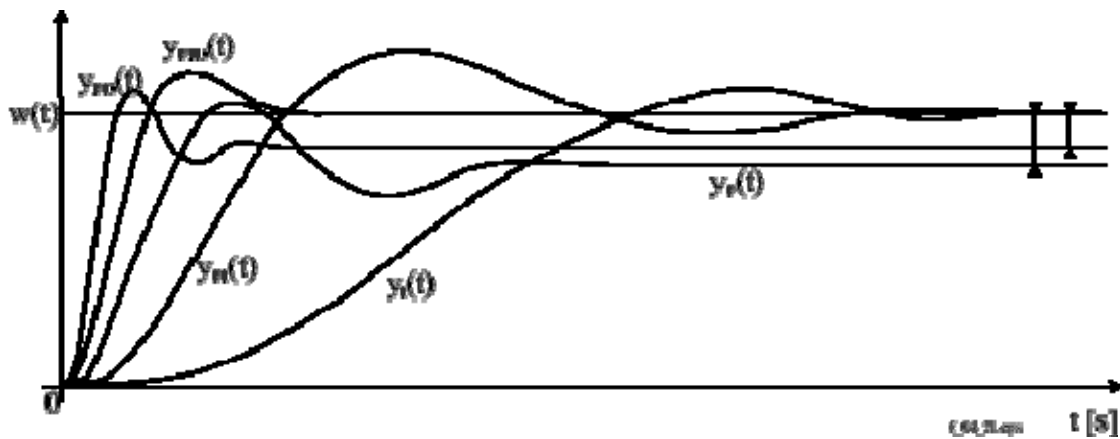


Figure: "Hit parade" des régulateurs classiques.

Tableau: Résumé des effets respectifs des actions P, I, et D.

Action	Avantage	Désavantage
P	dynamique	ne permet pas d'annuler une erreur statique
I	annulation d'erreur statique, amélioration de la robustesse	action lente, ralentit le système (effet déstabilisant)
D	action très dynamique, améliore la rapidité (effet stabilisant)	sensibilité aux bruits forte sollicitation de l'organe de commande

## Méthodes empiriques de synthèse (selon [1])

En 1942, Ziegler et Nichols ont proposé deux approches expérimentales destinées à ajuster rapidement les paramètres des régulateurs P, PI et PID. La première nécessite l'enregistrement

de la réponse indicielle du système à régler seul ( $G_o(s)$ ), alors que la deuxième demande d'amener le système en boucle fermée à sa limite de stabilité.

Il est important de souligner que ces méthodes ne s'appliquent en général qu'à des systèmes sans comportement oscillant et dont le déphasage en hautes fréquences dépasse  $-180^\circ$ . Ces systèmes possèdent souvent un retard pur et/ou plusieurs

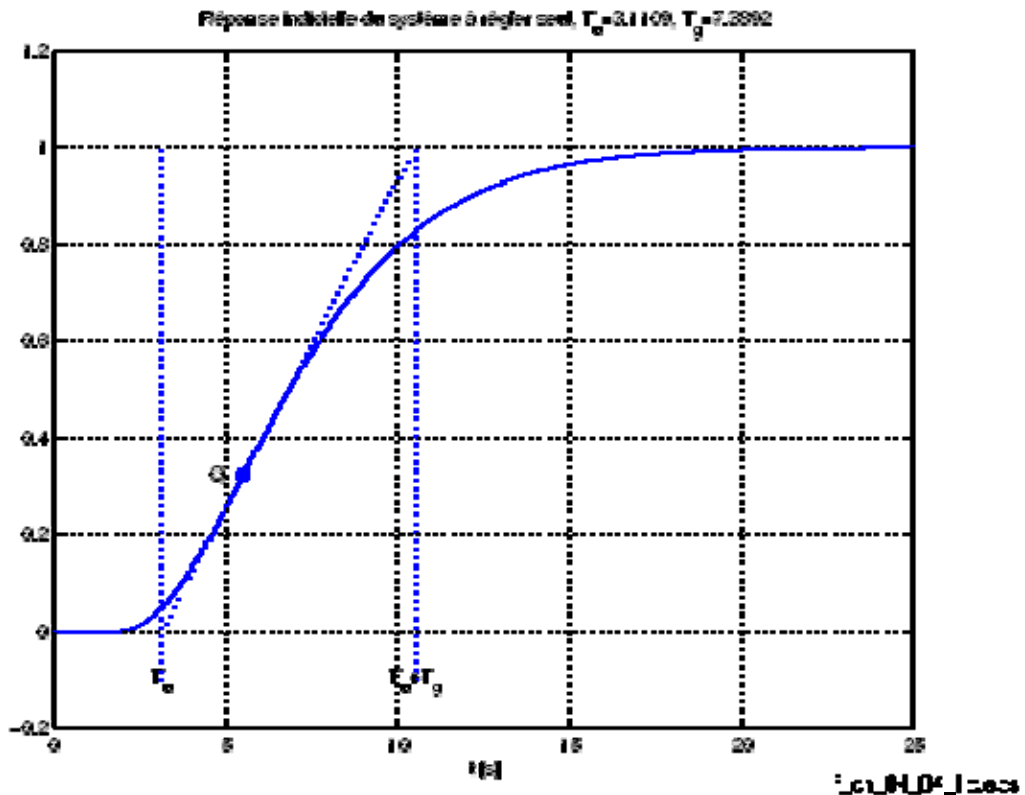


constantes de temps. On les rencontre surtout dans les processus physico-chimiques tels que les réglages de température, de niveau, de pression, etc.

## Méthode de Ziegler-Nichols en boucle ouverte (première méthode de Ziegler-Nichols)

Sur l'enregistrement de la réponse indicielle du seul système à régler (c'est-à-dire sans le régulateur), on trace la tangente au point d'inflexion Q de la courbe. On mesure ensuite les

temps  $T_u$  correspondant au point d'intersection entre l'abscisse et la tangente ainsi que le temps  $T_g$ .



**Figure:** Réponse indicielle du système à régler seul: on mesure les temps  $T_u$  et  $T_g$ .

On peut alors calculer les coefficients du régulateur choisi à l'aide du tableau 4.5.1:

**Tableau:** Ajustage de gains de régulateur P, PI et PID selon la première méthode de Ziegler-Nichols.

Type	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{T_g}{T_u}$	-	-

PI	$0.9 \cdot \frac{T_d}{T_c}$	$3.3 \cdot T_u$	-
PID	$1.2 \cdot \frac{T_d}{T_c}$	$2.0 \cdot T_u$	$0.5 \cdot T_u$

Généralement les gains proportionnels ( $K_p$ ) proposés par Ziegler-Nichols sont trop élevés et conduisent à un dépassement supérieur à **20%**. Il ne faut donc pas craindre de réduire ces gains d'un facteur **2** pour obtenir une réponse satisfaisante. Une illustration de cette démarche est donnée ci-dessous.

### Exemple

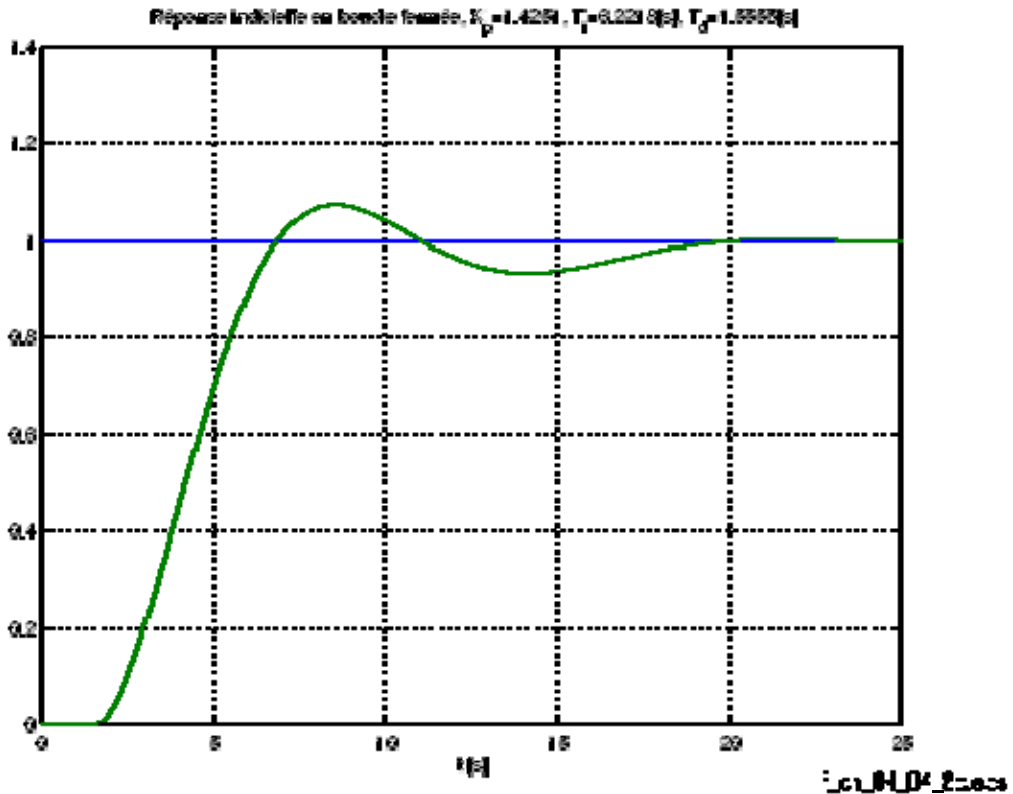
Considérant la réponse indicielle d'un système apériodique (figure [4.42](#)), on peut y mesurer:

- la pente:  $T_p = 7.4 [s]$
- le temps  $T_u$ :  $T_u = 3.1 [s]$

Du tableau de Ziegler-Nichols, on tire les trois paramètres du régulateur

- $K_p = 1.2 \cdot \frac{T_d}{T_c} = 2.8$ , réduit de **50%**, ce qui donne  $K_p = 1.4$
- $T_i = 2.0 \cdot T_u = 6.2 [s]$
- $T_d = 0.5 \cdot T_u = 1.55 [s]$

La division par **2** de la valeur du gain proportionnel permet d'obtenir une réponse indicielle tout à fait satisfaisante (deuxième graphe).



**Figure:** Réponse indicielle en boucle fermée, régulateur PID ajusté selon la première méthode de Ziegler Nichols.

## Méthode de Ziegler-Nichols en boucle fermée (seconde méthode de Ziegler-Nichols)

Cette méthode nécessite de boucler le système sur un simple régulateur proportionnel dont on augmente le gain jusqu'à amener le système à osciller de manière permanente (figure 4.44);

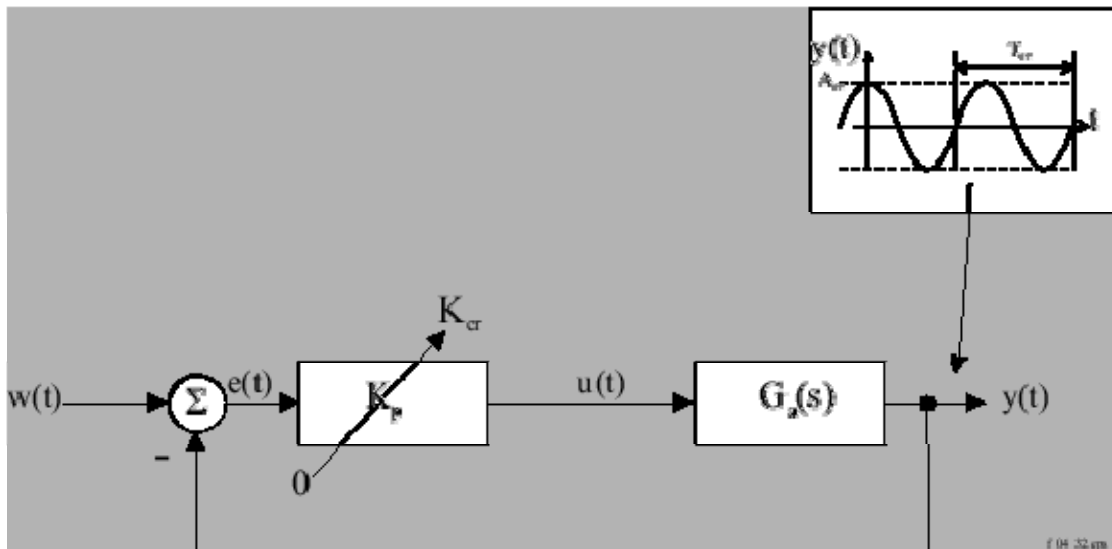
on se trouve ainsi à la limite de stabilité du système. Après avoir relevé le gain critique  $K_{cr}$

et la période d'oscillation  $T_{cr}$  de la réponse, on peut calculer les paramètres du régulateur choisi à l'aide du tableau 4.5.2:

**Tableau:** Ajustage de gains de régulateur P, PI et PID selon la seconde méthode de Ziegler-Nichols.

Type	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5 \cdot K_{cr}$	-	-
PI	$0.45 \cdot K_{cr}$	$0.83 \cdot T_{cr}$	-

PID	$0.6 \cdot K_{cr}$	$0.5 \cdot T_{cr}$	$0.125 \cdot T_{cr}$
-----	--------------------	--------------------	----------------------



**Figure:** Mise en oscillation d'un système par contre-réaction.

Les valeurs proposées par Ziegler et Nichols ont été testées dans de très nombreuses situations et il faut souligner qu'ici également elles conduisent à un temps de montée relativement court assorti d'un dépassement élevé.

Cette situation n'étant pas toujours satisfaisante, on est amené à corriger légèrement les coefficients proposés et, en particulier, à diminuer le gain  $K_p$ . Une modification possible est proposée ci-dessous.

**Tableau:** Ajustage de gains de régulateur P, PI et PID selon la seconde méthode de Ziegler-Nichols.

Type	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.4 \cdot K_{cr}$	-	-
PI	$0.4 \cdot K_{cr}$	$0.4 \cdot T_{cr}$	-
PID	$0.4 \cdot K_{cr}$	$0.4 \cdot T_{cr}$	$0.1 \cdot T_{cr}$

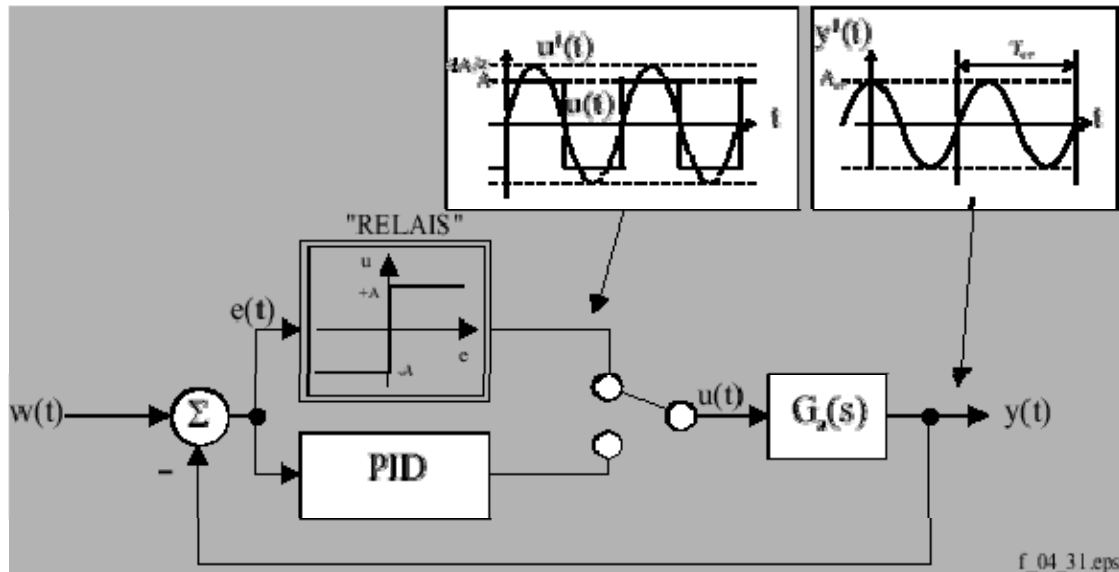
Il est important de remarquer que les paramètres  $T_i$  et  $T_d$  proposés dans les 2 méthodes de Ziegler-Nichols ont été fixés dans un rapport constant égal à 4. Cela conduit, pour le régulateur, à 2 zéros confondus en

$$-1/(2 \cdot T_d) = -2/T_i$$

# Auto-ajustement d'un régulateur PID

Une expérience telle que celle proposée ci-dessus n'est généralement pas admise en milieu industriel car la maîtrise de l'amplitude des oscillations est délicate et le risque d'une perte de stabilité est trop grand. Afin de contourner ce problème, on préfère créer les oscillations entretenues à l'aide d'un régulateur tout-ou-rien. Par le fait que l'amplitude du signal de

commande est limitée à  $\pm A$ , l'oscillation de la grandeur réglée  $y(t)$  sera également limitée (figure 4.45).



**Figure:** Mise en oscillation contrôlée d'un système asservi au moyen d'un élément non-linéaire (caractéristique de relais).

On notera qu'en régime permanent, le signal de commande  $u(t)$  est un signal carré d'amplitude  $A$  et que le signal réglé  $y(t)$  est périodique d'amplitude  $A_{cr}$ , mais non sinusoïdal. Considérant, dans une première approximation, que cette amplitude n'est

pas très éloignée de celle du premier harmonique ( $Y^1 \approx A_{cr}$ ) (on rappelle que le système à régler  $G(s)$  est typiquement de nature filtre passe-bas) et sachant que

celle d'un signal carré vaut  $U^1 = 4 \cdot \frac{A}{\pi}$ , on détermine le gain du système pour cette

fréquence en effectuant le rapport  $\frac{Y^1}{U^1}$  des harmoniques d'ordre 1.

L'inverse de ce gain n'est autre que le gain critique  $K_p = K_{cr}$  qu'il faut placer dans le régulateur pour transformer l'ensemble en un système oscillant de manière

permanente. On se trouve alors dans la situation décrite par Ziegler-Nichols dans la méthode en boucle fermée. Alors :

$$K_{cr} = \frac{1}{H_{cr}} = \left( \frac{Y^1}{U^1} \right)^{-1} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{A}{A_{cr}}$$

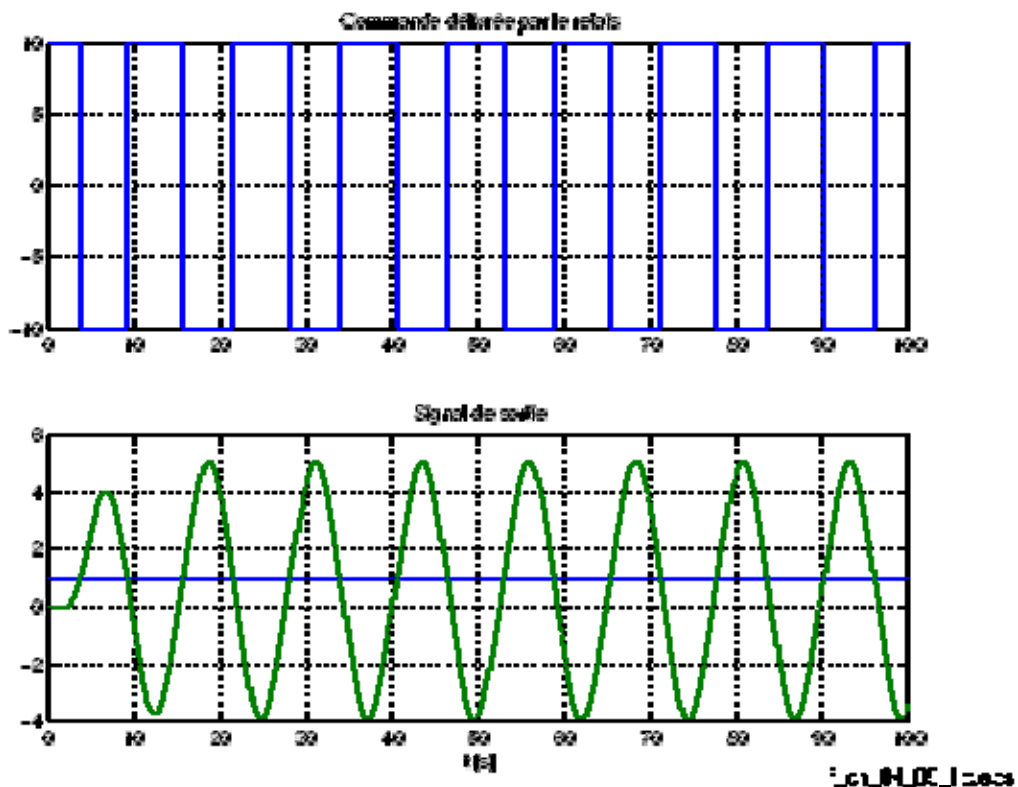
En s'aidant du tableau de Ziegler-Nichols, on a ainsi la possibilité d'obtenir expérimentalement et automatiquement les paramètres d'un régulateur PID.

Il est intéressant de souligner que cette méthode ne nécessite aucune connaissance préalable de l'installation à régler. Il suffit de lancer l'installation avec le régulateur tout-ou-rien puis, une fois les paramètres trouvés, de le commuter en réglage automatique. Cette approche, dénommée méthode du relais, a été proposée en 1984 par Åström et Hägglünd de l'université de Lund en Suède.

## Exemple

Une illustration de ces possibilités est donnée ci-dessous avec un système possédant 3 constantes de temps et un retard pur dont la fonction de transfert vaut:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-s-1.5}}{(1+s \cdot 2)^3}$$



**Figure:** Méthode du relais: on mesure la période d'oscillation  $T_{cr}$  et son amplitude  $A_{cr}$ .

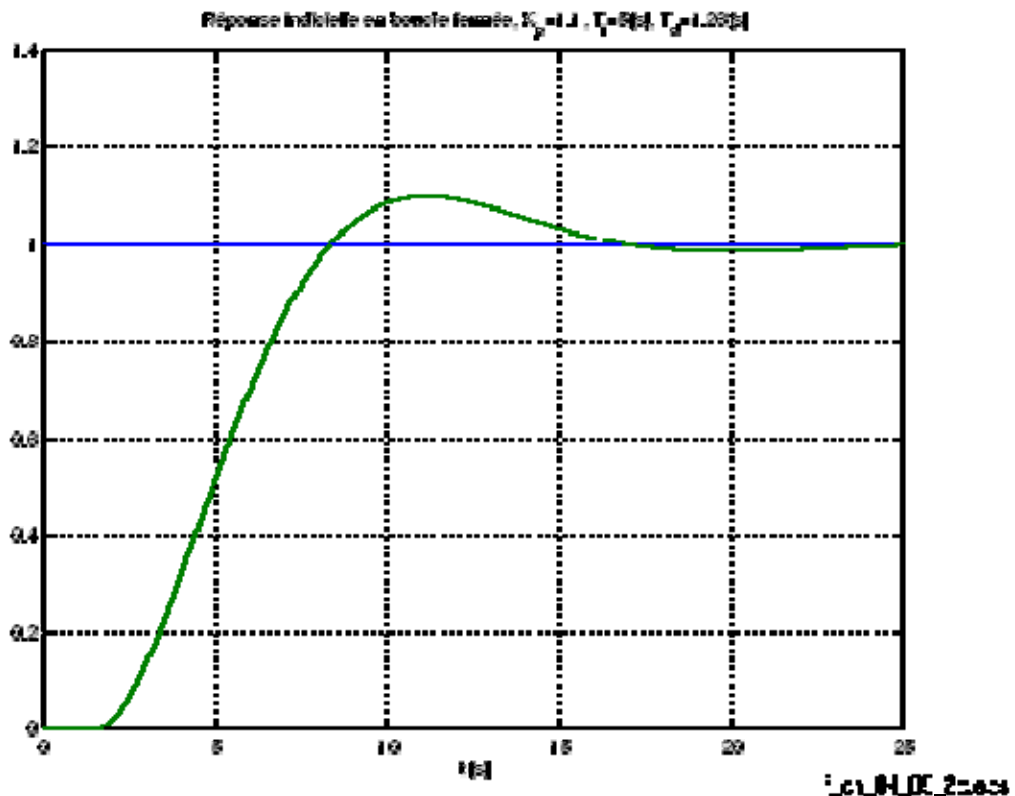
Pour ce système, la méthode du relais nous donne une période de  $T_{cr} = 12.6 [s]$  et un gain critique  $K_{cr}$

$$K_{cr} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{A}{A_{cr}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{10}{5} = 2.55$$

A partir de là et du tableau de Ziegler-Nichols modifié, on en tire:

- $K_p = 0.4 \cdot K_{cr} = 1.1 [-]$
- $T_i = 0.4 \cdot T_{cr} = 5.0 [s]$
- $T_d = 0.1 \cdot T_{cr} = 1.26 [s]$
- 

L'introduction de ces paramètres dans le régulateur conduit à la réponse indicielle en boucle fermée illustrée sur la figure 4.46.



**Figure:** Réponse indicielle en boucle fermée, régulateur PID ajusté selon la seconde méthode de Ziegler Nichols, avec l'aide de la technique du relais.

Cette réponse est pratiquement optimale et est donc tout à fait satisfaisante. Il est intéressant de comparer les réponses indicielles obtenues par les 2 méthodes de Ziegler-Nichols. Dans les 2 cas, le système était le même et on peut constater que les résultats sont assez proches malgré des paramètres PID légèrement différents.

Enfin, il est important d'insister sur le fait que la méthode de Ziegler-Nichols en boucle fermée fonctionne relativement bien pour des systèmes sans comportement oscillant et dont le déphasage en hautes fréquences franchit les  $-180^\circ$  et qu'elle n'est pas applicable dans d'autres situations.