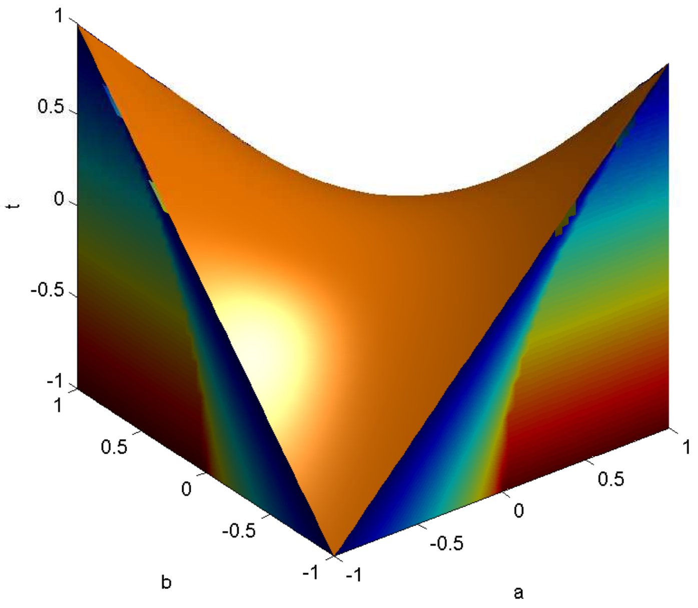
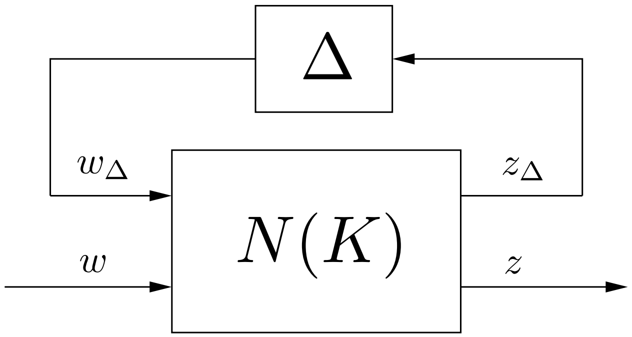
Analyse et synthèse robustes des systèmes linéaires

Cours 8

Analyse de stabilité robuste





$$z = \mathcal{L}_u(\Delta, N)w = S(K,\Delta)w$$
$$= \boxed{(N_{22} + N_{21}\Delta(\mathbf{1} - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12})w}$$

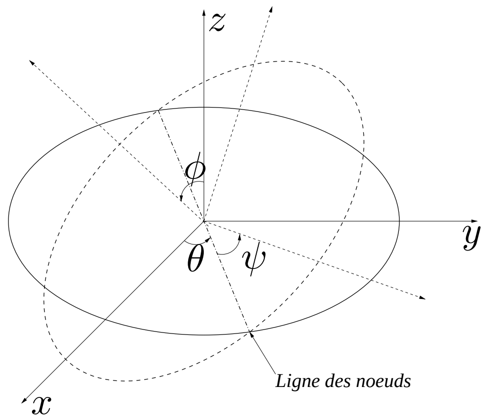
☛ **Problème 1** : *Analyse robuste*

Etant donnés :

- *un correcteur K*
- *un ensemble de modèles généralisés $\mathcal{L}_u(\Delta, N(K))$, $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}$*

déterminer si $\mathcal{L}_u(\Delta, N(K))$ est stable de manière interne pour $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}$

- Ecriture des équations d'Euler du satellite en spin Ω constante autour de l'axe z et des équations de la cinématique
- Linéarisation des équations d'Euler et de la cinématique
- $I_{xx} = I_{yy} = I_1$ et $I_{zz} = I_3$
- Découplage du mouvement autour de z / axes x et y



- Equations d'Euler linéarisées et découplées :

$$\boxed{\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\Omega(I_1 - I_3) &= T_1 \\ I_1\dot{\omega}_2 - \omega_1\Omega(I_3 - I_1) &= T_2 \end{aligned}}$$

- On pose $a = (1 - I_3/I_1)\Omega$ et $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} T_1/I_1 & T_2/I_1 \end{bmatrix}'$

- Modèle d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

- Matrice de transfert :

$$F(s) = C(s\mathbf{1} - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + a^2} \begin{bmatrix} s - a^2 & a(s+1) \\ -a(s+1) & s - a^2 \end{bmatrix}$$

Stabilisation interne nominale : $K = \mathbf{1}_2$

- Test entrée - sortie :

$$T_y(s) = T_u(s) = S_y F(s) = FK(s)(\mathbf{1} + FK(s))^{-1} = \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_y(s) = S_u(s) = KS_u(s) = (\mathbf{1} + FK(s))^{-1} = \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} s & -a \\ a & s \end{bmatrix}$$

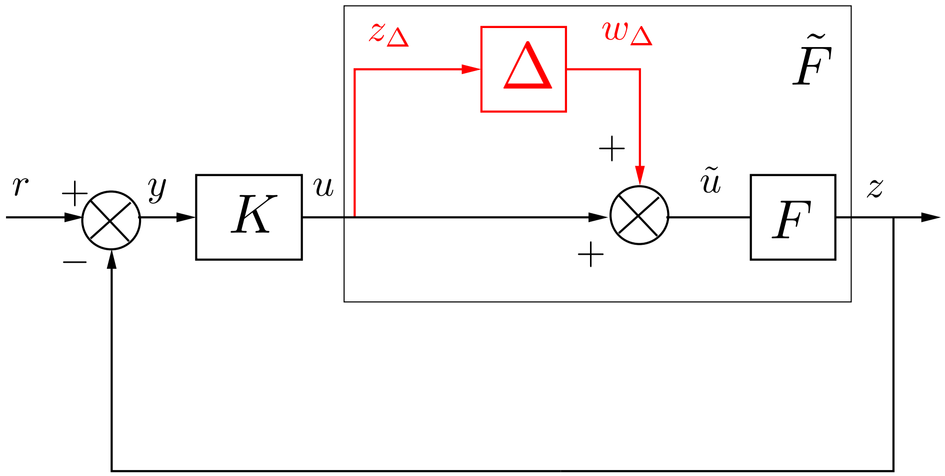
- Test d'état :

$$\tilde{A} = A - BKC = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On suppose que des dynamiques liées aux modes souples ont été négligées ou non modélisées

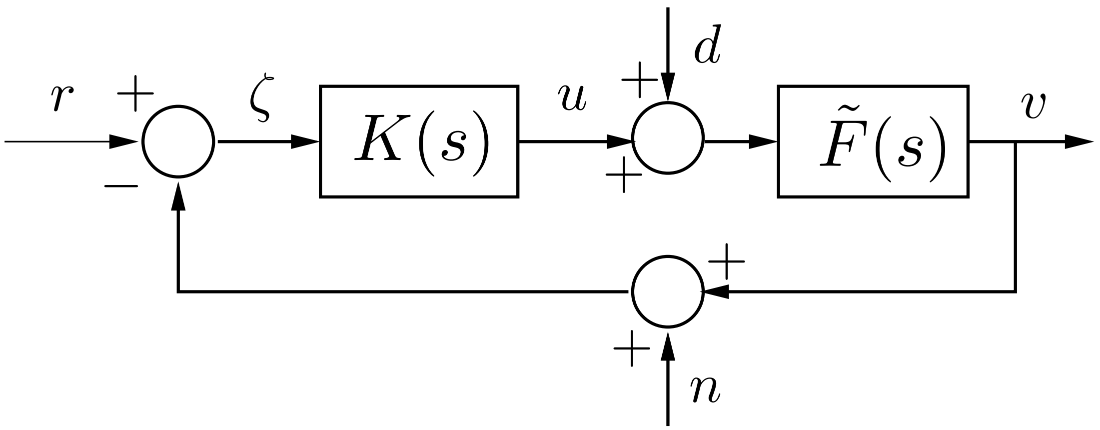
Modèle incertain multiplicatif :

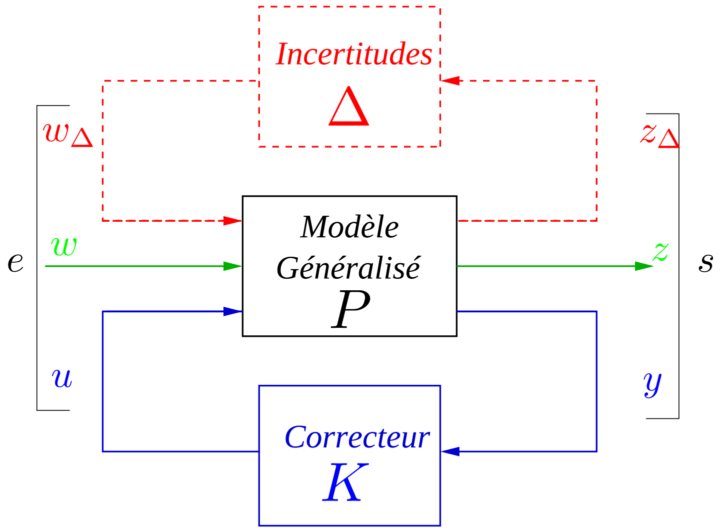
$$\tilde{F}(s) = F(s)(\mathbf{1} + \Delta) = \frac{1}{s^2 + a^2} \begin{bmatrix} s - a^2 & a(s+1) \\ -a(s+1) & s - a^2 \end{bmatrix} \left[\mathbf{1} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \right]$$

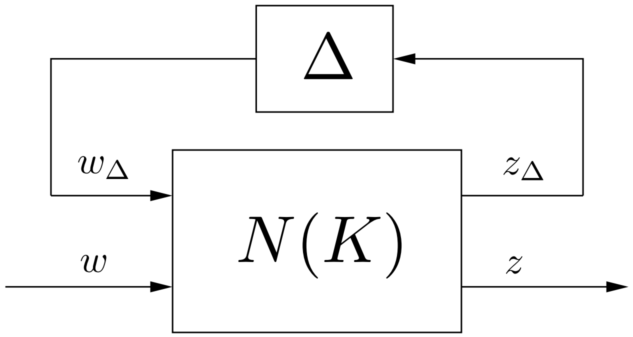


$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty \mid ||\Delta||_\infty < 1$$

Mise sous forme standard :



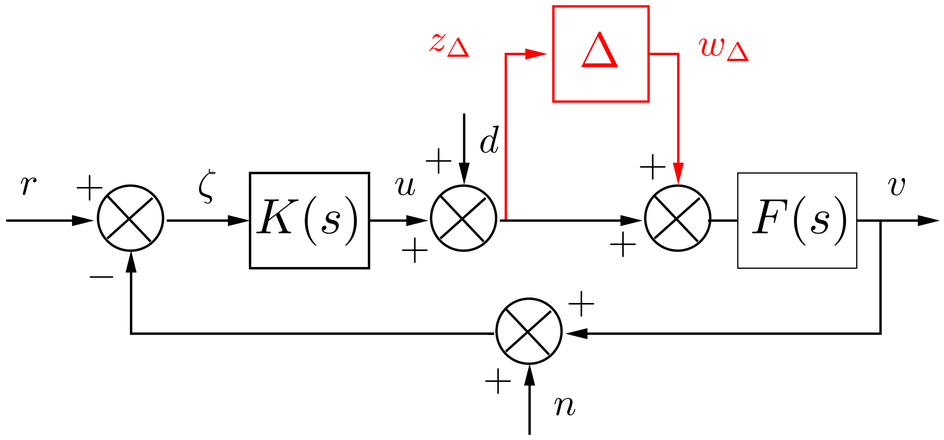




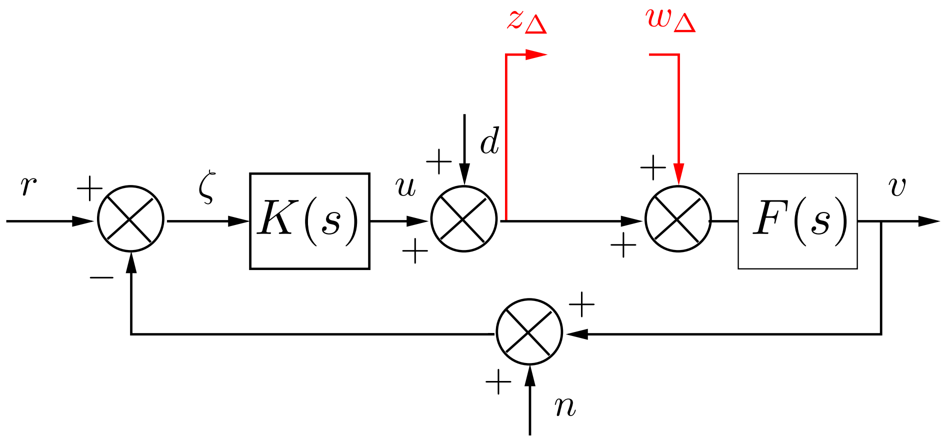
- Calcul du modèle généralisé P
- Calcul du modèle bouclé incertain $N(K) = \mathcal{L}_l(K, P)$
- Condition de stabilité de l'interconnexion $\mathcal{L}_u(\Delta, N(K))$

Calcul du modèle généralisé P :

Réécriture de l'interconnexion :



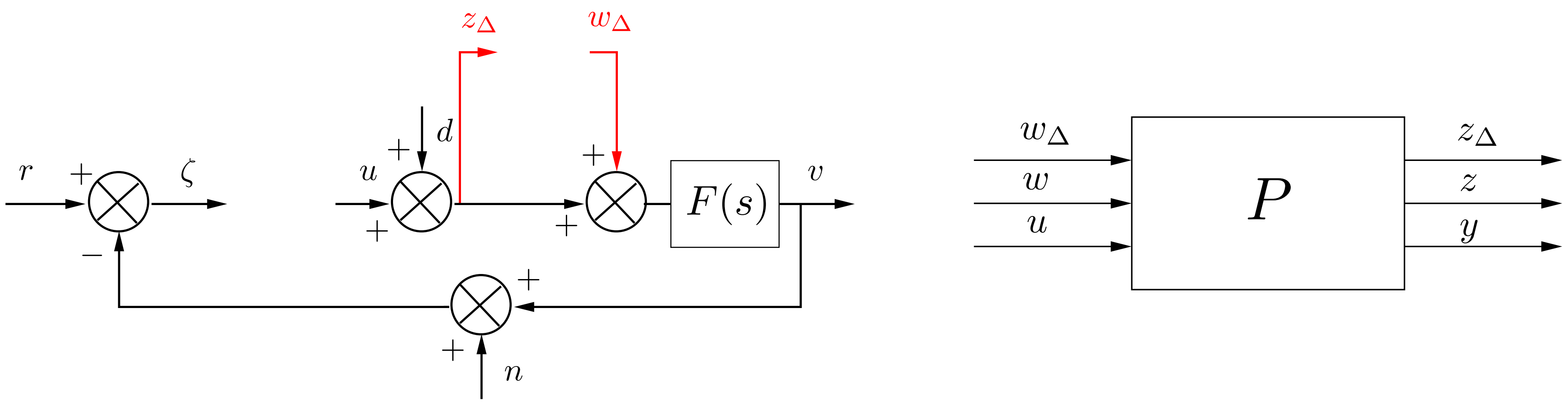
Déconnexion de l'incertitude :



Nota :

$w_\Delta \rightarrow z_\Delta$: transfert vu par l'incertitude Δ

Ecriture du modèle généralisé :



$$\begin{bmatrix} z_\Delta \\ z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w_\Delta \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} d & r & n \end{bmatrix}'$$

$$z_\Delta = d + u$$

$$z = v - r = F(s)w_\Delta + F(s)d - r + F(s)u$$

$$y = \zeta = r - v - n = -F(s)w_\Delta - F(s)d + r - n - F(s)u$$

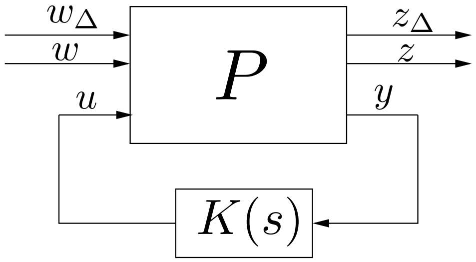
Ecriture du modèle généralisé : (suite)

$$\left[\begin{array}{c} z_\Delta \\ z \\ \hline y \end{array}\right] = P \left[\begin{array}{c} w_\Delta \\ d \\ r \\ n \\ \hline u \end{array}\right] \quad \text{et} \quad \begin{aligned} z_\Delta &= d + u \\ z &= Fw_\Delta + Fd - r + Fu \\ y &= -Fw_\Delta - Fd + r - n - Fu \end{aligned}$$

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|ccc||c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline F(s) & F(s) & -1 & 0 & F(s) \\ \hline\hline -F(s) & -F(s) & 1 & -1 & -F(s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c||c} P_{11} & P_{12} \\ \hline\hline P_{21} & P_{22} \end{array}\right]$$

Calcul du modèle incertain bouclé : rebouclage de K sur P

$$\begin{bmatrix} z_\Delta \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{L}_l(K,P) \begin{bmatrix} w_\Delta \\ w \end{bmatrix} = (P_{11} + P_{12}K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{21}) \begin{bmatrix} w_\Delta \\ w \end{bmatrix}$$

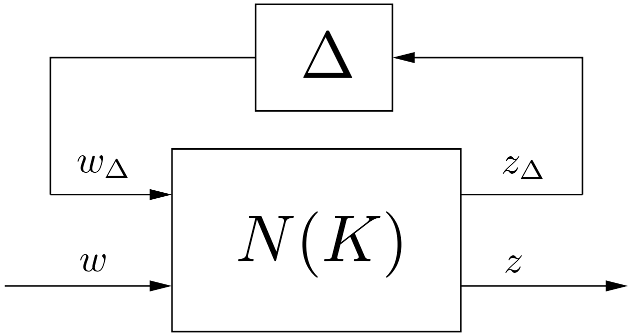


$$\begin{bmatrix} z_\Delta \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{L}_l(K,P) \begin{bmatrix} w_\Delta \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_\Delta \\ w \end{bmatrix}$$

$$N_{11} = -T_u \quad N_{12} = \begin{bmatrix} S_u & KS_y & -KS_y \end{bmatrix}$$

$$N_{21} = FS_u \quad N_{22} = \begin{bmatrix} FS_u & -S_y & -T_y \end{bmatrix}$$

Modèle incertain en boucle fermée :



$$z = \mathcal{L}_u(\Delta, \mathcal{L}_l(K,P))w = \left[N_{22} + N_{21}\Delta(\mathbf{1} - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12}\right] w$$

$\rightarrow \quad (\mathbf{1} - N_{11}\Delta)^{-1}$ est la seule source d'instabilité !

La question de stabilité robuste se résume à :

$\boxed{\mathbf{1} - N_{11}\Delta \text{ a t-il un inverse propre et stable pour tout } \Delta \mid \ ||\Delta(j\omega)||_\infty < 1\,?}$

Exemple satellite : condition de stabilité robuste

$$(1 - N_{11}\Delta)^{-1} = (\mathbf{1} + T_u\Delta)^{-1}$$

est-il propre et stable pour $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty \mid ||\Delta(j\omega)||_\infty < 1$?

Test de l'inverse d'une matrice de transfert

❒ **Théorème 1** *:*

Soit le modèle LTI carré stable $G(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$

G *a un inverse propre et stable ssi*

$$\det(G(s)) \neq 0 \ \forall \ \ s \in \ \mathbb{C}^{+} \ \cup \ \mathbb{C}^{0} \ \cup \ \infty \ \Leftrightarrow \ D^{-1} \text{ existe et } A - BD^{-1}C \text{ stable}$$

Nota :

$$G^{-1}(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ \hline -D^{-1}C & D^{-1} \end{array}\right]$$

CNS de stabilité robuste

Par construction $N_{11}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ et on suppose que

$$\Delta \in \mathbf{\Delta} = \{\Delta \in \mathcal{RH}_\infty \mid ||\Delta||_\infty < \gamma \text{ et } \forall\ \alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| < 1\ \alpha\Delta \in \mathbf{\Delta}\}$$

❒ **Théorème 2** :

$(\mathbf{1} - N_{11}\Delta)^{-1}$ *est propre et stable pour* $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ *ssi*
$\det(\mathbf{1} - N_{11}(s)\Delta(s)) \neq 0\ \forall\ s \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^0 \cup \infty$

$\forall\ \Delta \in \mathbf{\Delta}$ le lieu de Nyquist de $\det(\mathbf{1} - N_{11}(s)\Delta(s))$ ne fait pas de tours autour de 0

$\Leftrightarrow$

$$1 \notin \Lambda(N_{11}(s)\Delta(s))\ \ \forall\ s \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^0 \cup \infty \text{ et } \forall\ \Delta \in \mathbf{\Delta}$$

$\Leftrightarrow$

$$\det(\mathbf{1} - N_{11}(j\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0\ \ \forall\ \omega \in \mathbb{R} \cup \infty \text{ et } \forall\ \Delta \in \mathbf{\Delta}$$

$\Leftrightarrow$

$$\rho(N_{11}(j\omega)\Delta(j\omega)) < 1\ \ \forall\ \omega \in \mathbb{R} \cup \infty \text{ et } \forall\ \Delta \in \mathbf{\Delta}$$

Condition de stabilité robuste : théorème du faible gain

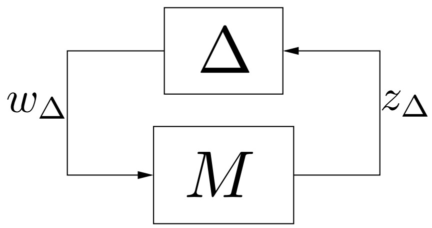
$$N_{11} = M \in \mathcal{RH}_\infty$$

$$\Delta \in \boldsymbol{\Delta} = \{\Delta \in \mathcal{RH}_\infty \mid ||\Delta||_\infty < \gamma \text{ et } \forall\ \alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| < 1\ \alpha\Delta \in \boldsymbol{\Delta}\}$$

❒ **Théorème 3** : *faible gain*

Le système (la structure $M - \Delta$) est stable de manière robuste vis-à-vis de $\boldsymbol{\Delta}$ ssi

$$\overline{\sigma}(M(j\omega)) \leq \frac{1}{\gamma}\ \ \forall\ \omega \in \mathbb{R}\ \cup\ \infty \quad \Leftrightarrow \quad \|M\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$$



Nota :

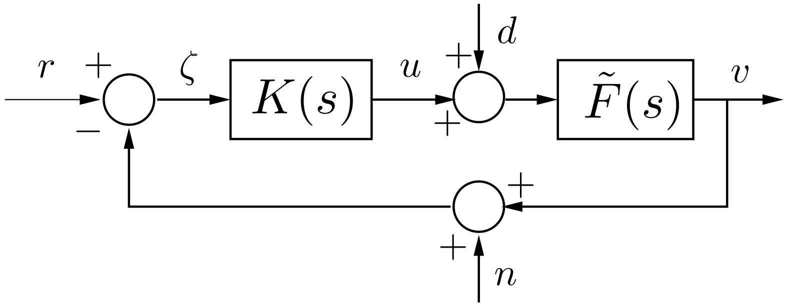
$$\sup_{\Delta \in \boldsymbol{\Delta}} \rho(M\Delta) = \sup_{\Delta \in \boldsymbol{\Delta}} \overline{\sigma}(M\Delta) = \sup_{\Delta \in \boldsymbol{\Delta}} \overline{\sigma}(M)\overline{\sigma}(\Delta) = \overline{\sigma}(M)\gamma$$

Pour $K = \mathbf{1}_2$

$$M(s) = N_{11}(s) = T_u(s) = \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

L'asservissement où $\tilde{F}(s) = F(s)(\mathbf{1} + \Delta(s))$ sera donc stable de manière robuste pour tout $\Delta \in \boldsymbol{\Delta} = \{\Delta \in \mathcal{RH}_\infty \mid ||\Delta||_\infty < \gamma \}$

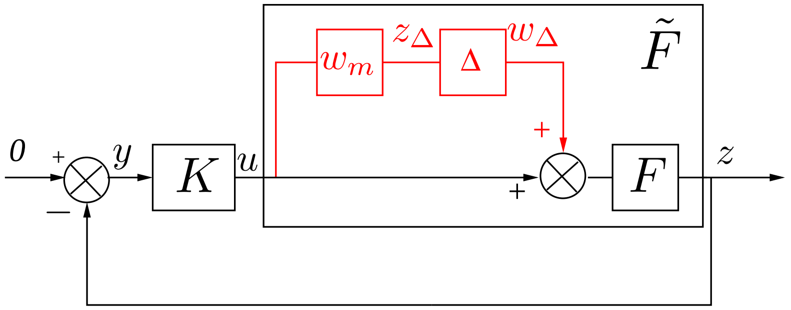
$$\boxed{\gamma \leq \frac{1}{||T_u||_\infty} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}}$$



❒ **Lemme 1** : $\Delta \in \mathbf{\Delta} = \{\Delta \in \mathcal{RH}_\infty \mid ||\Delta||_\infty < \gamma\}$

Etant donnée la stabilité nominale de $F(s)$ et un ensemble de modèles incertains alors le système en boucle fermée est robustement stable vis-à-vis de $\mathbf{\Delta}$ ssi le test est vérifié.

Ensemble de modèles incertains	Tests de stabilité robuste
$F(s) + W_1(s)\Delta(s)W_2(s)$	$\|\|W_2 K S_y W_1\|\|_\infty \leq 1/\gamma$
$(\mathbf{1} + W_1(s)\Delta(s)W_2(s))F(s)$	$\|\|W_2 T_y W_1\|\|_\infty \leq 1/\gamma$
$F(s)(\mathbf{1} + W_1(s)\Delta(s)W_2(s))$	$\|\|W_2 T_u W_1\|\|_\infty \leq 1/\gamma$
$(F_1(s) + \Delta_1(s))^{-1}(F_2(s) + \Delta_2(s))$	$\left\Vert \begin{bmatrix} K \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} S_y F_1^{-1} \right\Vert_\infty \leq 1/\gamma$
$(F_1(s) + \Delta_1(s))(F_2(s) + \Delta_2(s))^{-1}$	$\left\Vert F_2^{-1} S_u \begin{bmatrix} K & \mathbf{1} \end{bmatrix} \right\Vert_\infty \leq 1/\gamma$



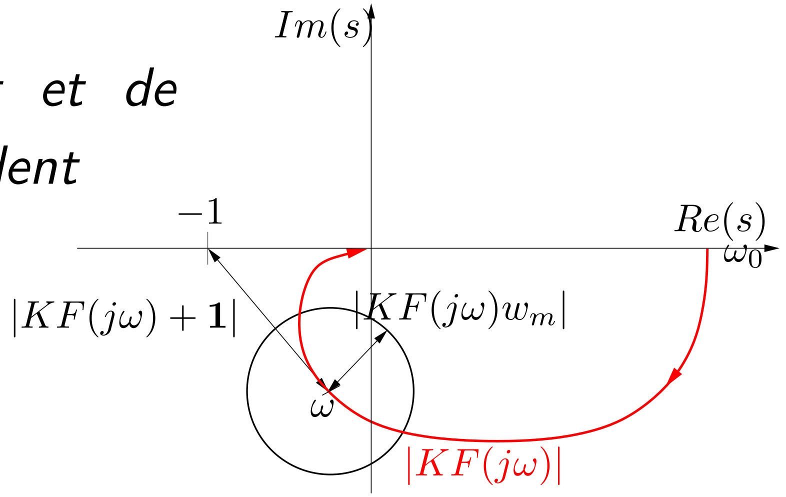
$$\tilde{F}(s) = (1 + w_m(s)\Delta(s))F(s)$$

❒ **Théorème 4** :

On suppose que K stabilise nominalement et de manière interne le schéma de régulation précédent

Ce schéma est RS ssi :

$$\boxed{|T(j\omega)| \leq \frac{1}{|w_m(j\omega)|} \quad \forall\ \omega}$$



Nota : $M = -w_m \dfrac{FK}{1+FK} = -w_m T$

Analyse de stabilité robuste

- Cadre général de travail
- Algèbre des LFT
- La matrice de transfert vue de l'incertitude N_{11} détermine la stabilité robuste
- La stabilité robuste de l'asservissement est équivalente à celle de la forme $M - \Delta$
- Construction de perturbations déstabilisantes
- Le résultat de stabilité robuste est obtenu suite à l'utilisation du théorème du faible gain
- Le résultat est exact pour les perturbations complexes non structurées
- Pour les perturbations structurées, l'outil de modélisation et d'analyse : μ