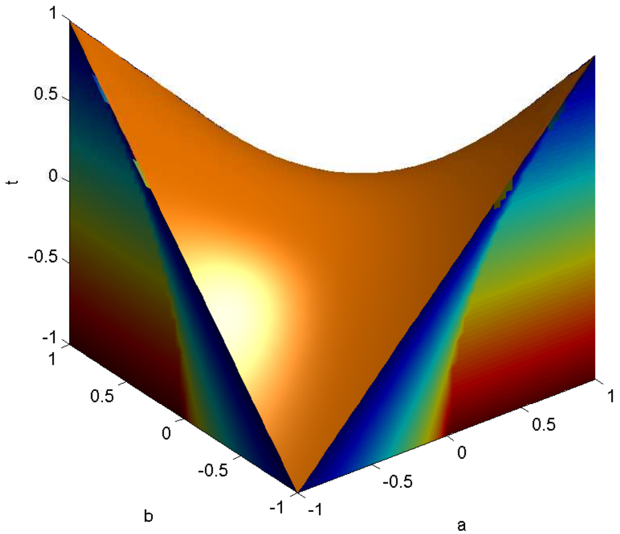
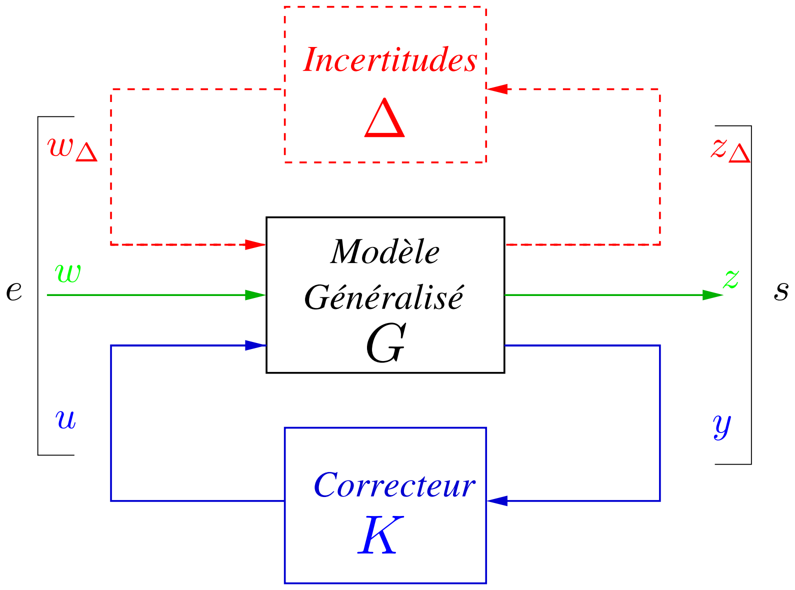
Analyse et synthèse robustes

des systèmes linéaires

Cours 7

Modélisation incertaine pour l'analyse robuste

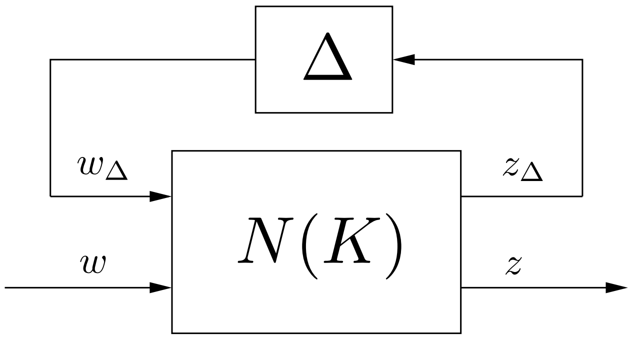




- w, z : entrées et sorties exogènes à contrôler
- w_Δ, z_Δ : entrées et sorties exogènes fictives
- u, y : signaux de commande et de mesures

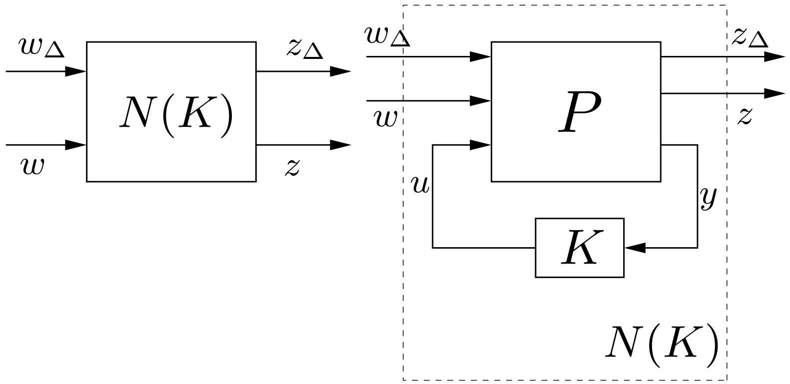
☛ **Problème 1** :

Pour K admissible donné, analyser les propriétés de la boucle pour toute réalisation de $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}$



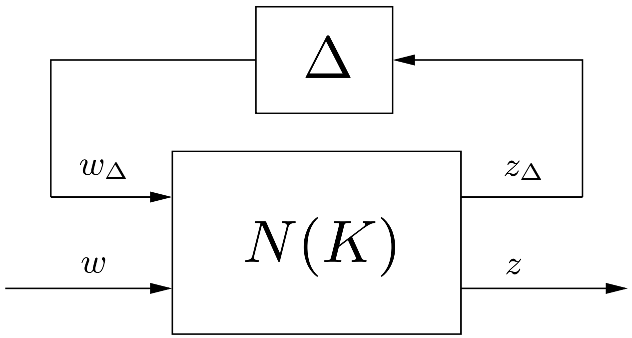
$$
\begin{aligned}
z &= \mathcal{L}_u(\Delta, N)w = S(K,\Delta)w \\
&= \boxed{(N_{22} + N_{21}\Delta(\mathbf{1} - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12})w}
\end{aligned}
$$

Modèle d'analyse robuste : boucle fermée incertaine



$$\begin{bmatrix} z_\Delta \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}(K) & N_{12}(K) \\ N_{21}(K) & N_{22}(K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_\Delta \\ w \end{bmatrix}$$

$w_\Delta = \Delta z_\Delta$ et $\mathbf{1} - N_{11}(K)\Delta$ inversible



$$\begin{aligned} z &= \mathcal{L}_u(\Delta, N)w = S(K,\Delta)w \\ &= (N_{22} + N_{21}\Delta(\mathbf{1} - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12})w \end{aligned}$$

Notation : $\mathcal{L}_u(\Delta, N)$ est la transformation fractionnaire linéaire supérieure

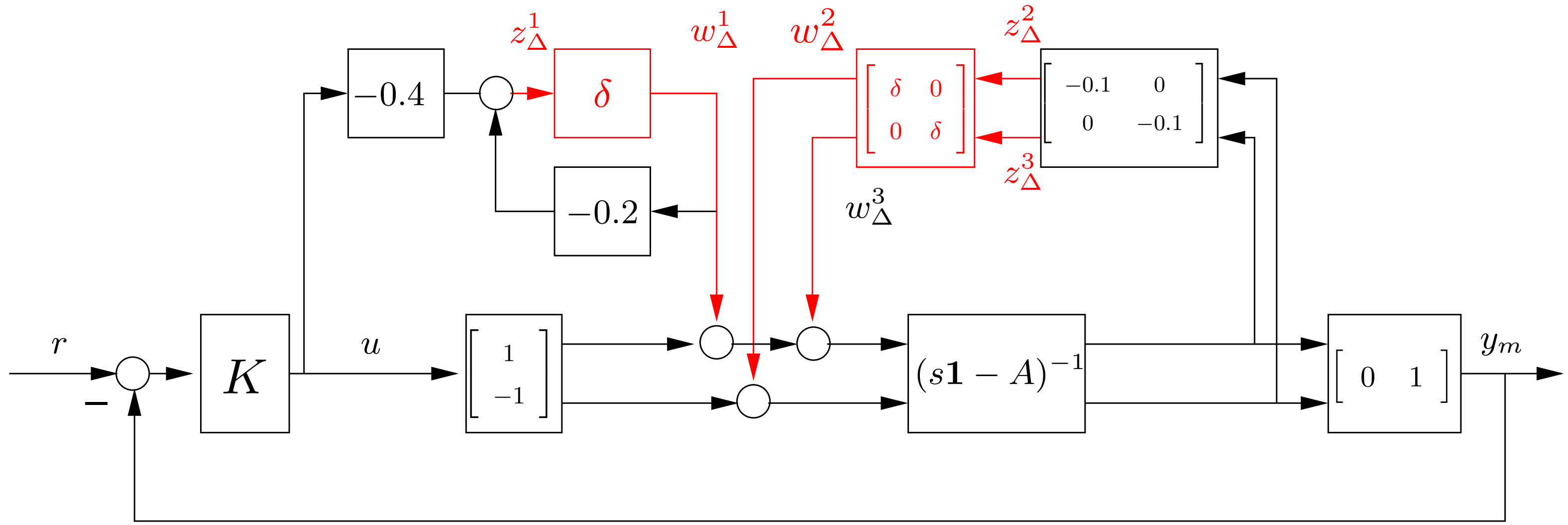
Mise sous forme standard avec incertitude paramétrique réelle :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad A = \begin{bmatrix} -(1+k) & 0 \\ 1 & -(1+k) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1-k}{k} \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

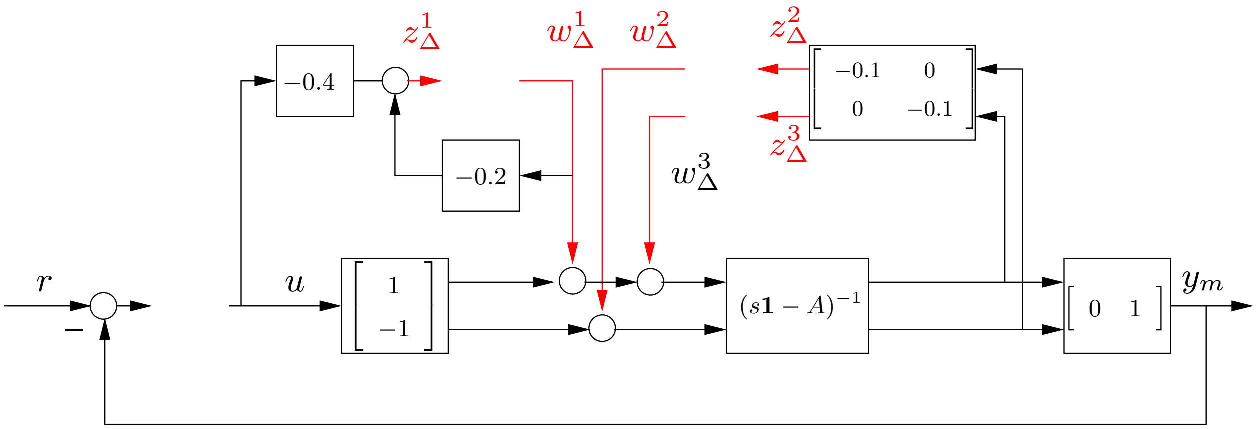
$$y_m(t) = Cx(t)$$

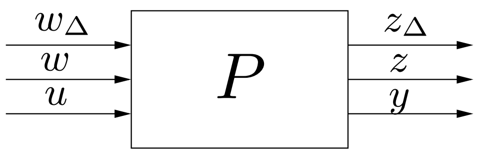
$$k = 0.5 + 0.1\delta \qquad |\delta| \leq 1$$

$$A(k) = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \qquad b_1(k) = \frac{1-0.2\delta}{1+0.2\delta}$$



Incertitude paramétrique réelle : exemple (2)





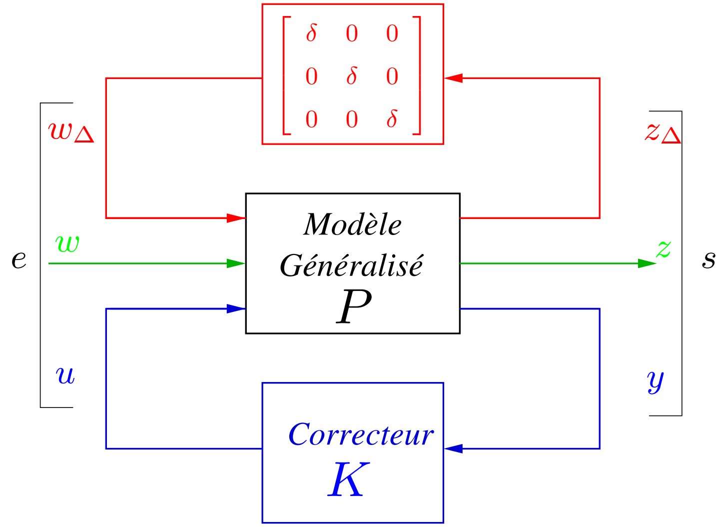
$$\begin{bmatrix} z_\Delta \\ z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w_\Delta \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

$$w = r$$

$$z_\Delta = \begin{bmatrix} z_\Delta^1 & z_\Delta^2 & z_\Delta^3 \end{bmatrix}'$$

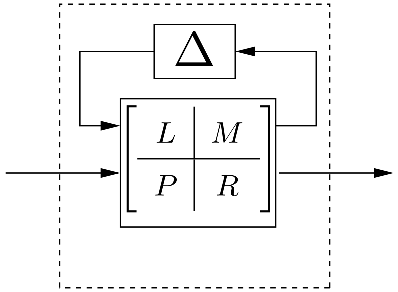
$$z = u$$

$$y = \zeta = r - y_m$$



Les matrices systèmes sont des fonctions rationnelles des paramètres :

$$\begin{bmatrix} A(\delta) & B(\delta) \\ C(\delta) & D(\delta) \end{bmatrix} = R + P\Delta(\mathbf{1} - L\Delta)^{-1}M$$



où l'incertitude structurée est $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_N) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ $\quad ||\Delta|| < 1 \Leftrightarrow |\delta_i| < 1 \ \forall\ i$

Incertitude paramétrique (nature réelle)

▼ **Définition 1** :

La structure et l'ordre du système sont connus mais certains paramètres du modèle sont incertains et bornés : $\underline{\alpha} \leq \alpha \leq \overline{\alpha}$

$$\alpha = \alpha_m(1 + r_\alpha \Delta) \quad : \quad \begin{array}{ll} \alpha_m = \dfrac{\overline{\alpha} + \underline{\alpha}}{2} & r_\alpha = \dfrac{\overline{\alpha} - \underline{\alpha}}{\overline{\alpha} + \underline{\alpha}} \\ |\Delta| \leq 1 & \Delta \in \mathbb{R} \end{array}$$

Exemple : le cas affine

$$A(k,\alpha) = \begin{bmatrix} -1+k & 2+k-\alpha \\ -1+k+2\alpha & 1+k \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{ll} k = 2 + w_k\delta_k & \alpha = 1 + w_\alpha\delta_\alpha \\ |\delta_k| \leq 1 & |\delta_\alpha| \leq 1 \end{array}$$

On écrit

$$A(k,\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \delta_k \begin{bmatrix} w_k & w_k \\ w_k & w_k \end{bmatrix} + \delta_\alpha \begin{bmatrix} 0 & -w_\alpha \\ 2w_\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Comme

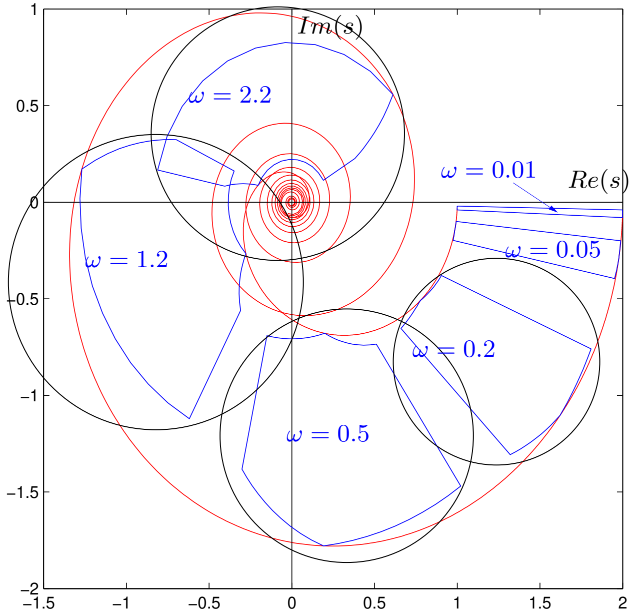
$$\text{rang} \begin{bmatrix} w_k & w_k \\ w_k & w_k \end{bmatrix} = 1 \quad \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & -w_\alpha \\ 2w_\alpha & 0 \end{bmatrix} = 2$$

on a :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_k & 0 & -w_\alpha \\ w_k & 2w_\alpha & 0 \end{bmatrix} \text{diag}(\delta_k, \delta_\alpha, \delta_\alpha) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit

$$\tilde{F}(s) = \frac{k}{Ts+1}e^{-\tau s} \qquad 1 \leq k, T, \tau \leq 2$$



- Lieux de Nyquist pour $k = 1, T = 2, \tau = 1$ et $k = 2, T = 1, \tau = 2$
- Régions d'incertitude pour $\omega = 0.01,\ 0.05,\ 0.2,\ 0.5,\ 1.2,\ 2.2$
- Approximations par un disque des régions d'incertitude

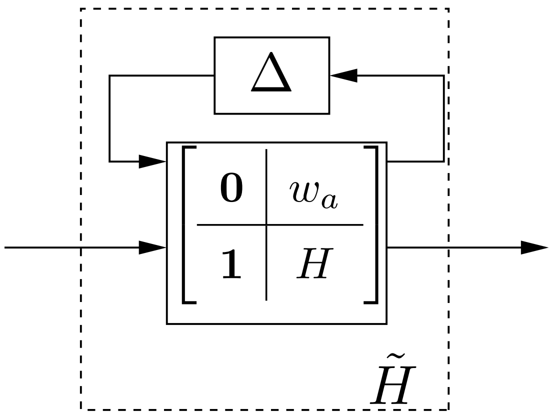
☞ Incertitude non paramétrique complexe enveloppe de l'incertitude paramétrique réelle

$$\tilde{F}(s) = F(s) + w(s)\Delta(s) \quad |\Delta(s)| \leq 1 \quad w(s) \in \mathbb{C}$$

Soit le système SISO pour lequel une série d'identifications fréquentielles donnent un ensemble de réponses $\mathcal{F}(\omega)$. Afin de décrire le modèle, on le recouvre par un modèle analytique :

$$\mathcal{F}(\omega) \subset H(j\omega) + w_a(j\omega)\mathbf{\Delta}_c$$

- $H(s)$: fraction rationnelle propre, $w_a(s)$: pondération rationnelle stable
- $\mathbf{\Delta}_c$: disque unitaire centré en 0 : $\mathbf{\Delta}_c = \{\Delta_c(s) \in \mathbb{C} \ : \ |\Delta_c| < 1\}$



$$\tilde{H}(s) = \mathcal{L}_u\left(\Delta(s), \left[\begin{array}{c|c} 0 & w_a(s) \\ \hline 1 & H(s) \end{array}\right]\right) \quad \Delta(s) \in \mathbf{\Delta}$$

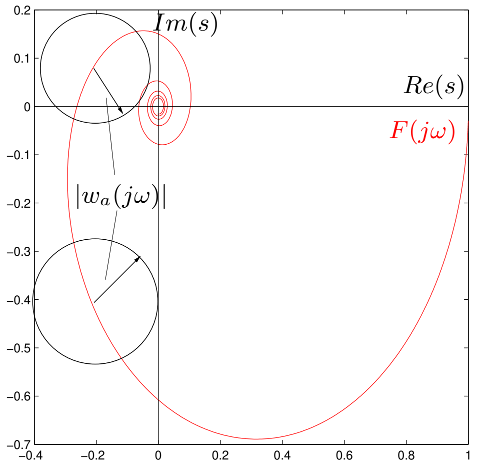
$$\mathbf{\Delta} = \{\Delta(s) \ \in \mathcal{RH}_\infty \ : \ \Delta(j\omega) \in \mathbf{\Delta}_c\}$$

$$\tilde{F}(s) = F(s) + W_1(s)\Delta(s)W_2(s) = \mathcal{L}_u\left(\Delta(s), \begin{bmatrix} \mathbf{0} & W_2(s) \\ W_1(s) & F(s) \end{bmatrix}\right)$$

avec :

- L'incertitude normalisée rationnelle propre et stable $||\Delta||_\infty < 1$
- La matrice de transfert nominale $F(s)$
- Les pondérations fréquentielles rationnelles propres, stables et à minimum de phase $W_i(s)$

Calcul dans le cas SISO : $\tilde{F}(s) = F(s) + w_a(s)\Delta(s)$



- Choix d'un modèle nominal $F(s)$
- $\forall\ \omega$, trouver le plus petit

$$l_a(\omega) = \max_{\tilde{F}\in\Pi} |\tilde{F}(j\omega) - F(j\omega)|$$

- Choisir une fonction rationnelle

$$|w_a(j\omega)| \geq l_a(\omega) \quad \forall\ \omega$$

Soit le modèle incertain de fonction de transfert $\tilde{F}(s) = F_0(s)f(s) \in \Pi_F$

- $F_0(s)$ modèle nominal
- $f(s) \in \Pi_f$ terme à négliger

L'amplitude relative occasionnée par le fait de négliger $f(s)$ est donnée par :

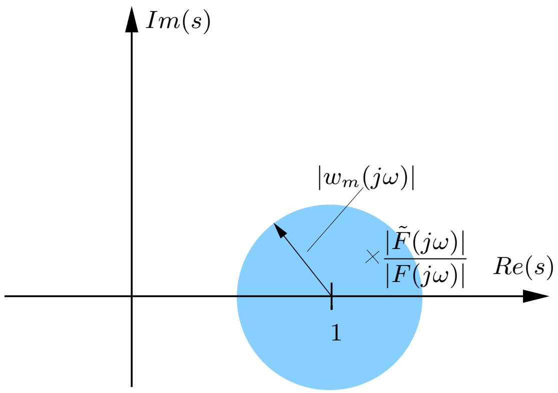
$$l_m(\omega) = \max_{\tilde{F} \in \Pi_F} \left| \frac{\tilde{F}(j\omega) - F_0(j\omega)}{F_0(j\omega)} \right| = \max_{f(s) \in \Pi_f} |f(j\omega) - 1|$$

Exemple : premier ordre $f(s) = \dfrac{1}{\tau s + 1} \qquad 0 \leq \tau \leq \tau_{max}$

$$w_m(s) = l_m(s) = 1 - \frac{1}{\tau_{max} s + 1} = \frac{\tau_{max} s}{\tau_{max} s + 1}$$

Incertitude fréquentielle multiplicative

$$\begin{aligned}\tilde{F}(s) &= (\mathbf{1} + W_1(s)\Delta_1(s))F(s)(\mathbf{1} + W_2(s)\Delta_2(s)) \\ &= \mathcal{L}_u\left(\begin{pmatrix}\Delta_1(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_2(s)\end{pmatrix}, \left[\begin{array}{cc|c}\mathbf{0} & F(s)W_2(s) & F(s) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline W_1(s) & F(s)W_2(s) & F(s)\end{array}\right]\right)\end{aligned}$$



Calcul dans le cas SISO : $\tilde{F}(s) = (\mathbf{1} + w_m(s)\Delta_m(s))F(s)$

- Choisir un modèle nominal $F(s)$
- Calculer la pondération fréquentielle $w_m(s)$

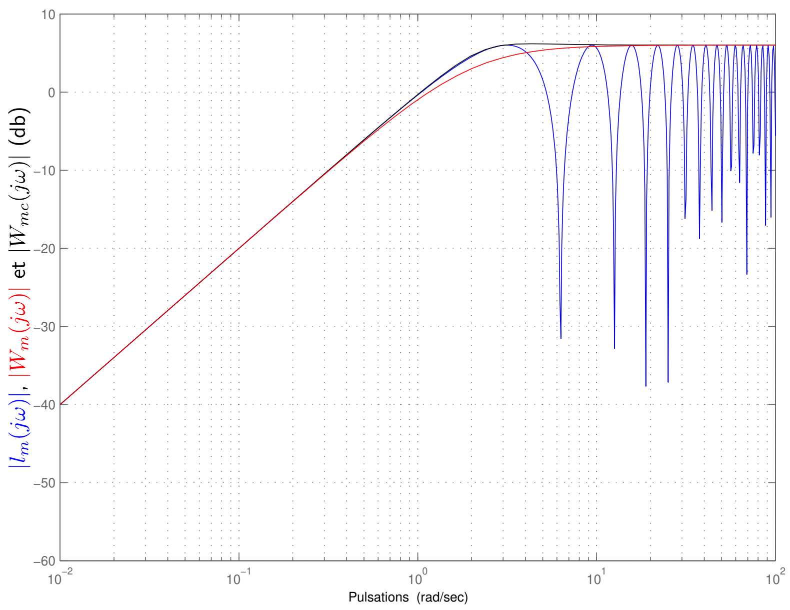
$$|l_m(j\omega)| = \max_{\tilde{F}\in\Pi}\left|\frac{\tilde{F}(j\omega)}{F(j\omega)} - 1\right| \leq |w_m(j\omega)| \quad \forall\ \omega$$

Nota : équivalence entre incertitudes additives et multiplicatives

$$|w_m(j\omega)| = \frac{|w_a(j\omega)|}{|F(j\omega)|}$$

Soit $f(s) = e^{-\tau s}$ où $0 \leq \tau \leq \tau_{max}$

- On trace le Bode de $|1 - e^{-j\omega\tau_{max}}| = \sqrt{2(1 - \cos\omega\tau_{max})}$
- $\Pi_f = \left\{e^{-j\omega\tau} \;\; : 0 \leq \tau \leq \tau_{max}\right\}$



- Calcul de la pondération :

$$l_m(\omega) = \begin{cases} |1 - e^{-j\omega\tau_{max}}| & \omega < \frac{\pi}{\tau_{max}} \\ 2 \quad \omega \geq \frac{\pi}{\tau_{max}} \end{cases}$$

- Approximation rationnelle :

$$\boxed{w_m(s) = \frac{\tau_{max}s}{\frac{\tau_{max}}{2}s + 1}}$$

Nota :

$$w_{mc}(s) = \frac{\tau_{max}s}{\frac{\tau_{max}}{2}s + 1} \frac{\left(\frac{\tau_{max}}{2.363}\right)^2 s^2 + 2 * 0.838 \left(\frac{\tau_{max}}{2.363}\right) s + 1}{\left(\frac{\tau_{max}}{2.363}\right)^2 s^2 + 2 * 0.685 \left(\frac{\tau_{max}}{2.363}\right) s + 1}$$

Hypothèse : $F_2^{-1}(s)$ propre

$$\begin{aligned}\tilde{F}(s) &= (F_1(s)+\Delta_1(s))(F_2(s)+\Delta_2(s))^{-1} \\ &= \mathcal{L}_u\left(\left(\begin{array}{c}\Delta_1(s)\\ \Delta_2(s)\end{array}\right), \left[\begin{array}{cc|c}\mathbf{0} & -F_2^{-1}(s) & F_2^{-1}(s)\\ \hline \mathbf{1} & -F_1(s)F_2^{-1}(s) & F_1(s)F_2^{-1}(s)\end{array}\right]\right)\end{aligned}$$

Exemple SISO : incertitude sur un coefficient du polynôme caractéristique

$$G(s) = \frac{1}{s^2+as+1} \qquad \text{pour } 0.4 \leq a \leq 0.8 \qquad a = 0.6 + 0.2\Delta \quad |\Delta| \leq 1$$

$$\tilde{G}(s) = \frac{G(s)}{1+\Delta w_i(s)G(s)} \quad G(s) = \frac{1}{s^2+0.6s+1} \quad w_i(s) = 0.2s$$

- Dynamiques inconnues et ordre inconnu (possiblement infini)
- Représentation par des incertitudes multiplicatives :

$$\tilde{F}(s) = (\mathbf{1} + w_m(s)\Delta_m(s))F(s)$$

où

$$\boxed{w_m(s) = \frac{\tau s + r_0}{(\tau/r_\infty)s + 1}}$$

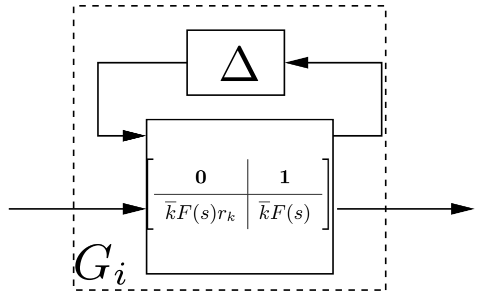
avec :

- $r_0 = \epsilon_{r0}$: incertitude relative en régime permanent
- $\frac{1}{\tau}$: pulsation pour laquelle l'incertitude relative $\epsilon_r = 100\%$
- r_∞ : amplitude de la pondération aux hautes fréquences $(r_\infty \geq 2)$

Exemple 1 : incertitude sur un gain $\tilde{F}(s) = kF(s) \quad k_{min} \leq k \leq k_{max}$

On écrit $k = \overline{k}(1 + r_k\Delta) \quad \Delta \in \mathbb{R} \quad |\Delta| \leq 1$ avec $\overline{k} = \dfrac{k_{max} + k_{min}}{2}$ et $r_k = \dfrac{k_{max} - k_{min}}{k_{max} + k_{min}}$

$$\tilde{F}(s) = \underbrace{\overline{k}F(s)}_{F_n(s)\ nominal} \quad [1 + r_k\Delta] \quad |\Delta| \leq 1$$



Exemple 2 : incertitude sur une constante de temps

$$\tilde{F}(s) = \frac{1}{\tau s + 1}F(s) \quad \tau_{min} \leq \tau \leq \tau_{max}$$

On écrit $\tau = \overline{\tau}(1 + r_\tau\Delta) \quad \Delta \in \mathbb{R} \quad |\Delta| \leq 1$ avec $\overline{\tau} = \dfrac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2}$ et $r_\tau = \dfrac{\tau_{max} - \tau_{min}}{\tau_{max} + \tau_{min}}$

$$\tilde{F}(s) = \frac{F(s)}{1 + \overline{\tau}s + r_\tau\overline{\tau}s\Delta} = \underbrace{\frac{F(s)}{1 + \overline{\tau}s}}_{F_n(s)\ nominal} \quad \frac{1}{1 + w_i(s)\Delta} \quad w_i(s) = \frac{r_\tau\overline{\tau}s}{1 + \overline{\tau}s}$$

- Incertitude non structurée $\neq$ structurée :

$$\left\| \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ \mathbf{0} & \Delta_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \neq ||\Delta||_\infty < 1$$

- Incertitude réelle et incertitude complexe : incertitude mixte

$$\tilde{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1+w_1\Delta_1}{s+2} & \frac{1+w_2(s)\Delta_2(s)}{s+1} \end{bmatrix} = G(s) + W(s) \begin{bmatrix} \Delta_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_2(s) \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad W(s) = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{s+2} & \frac{w_2(s)}{s+1} \end{bmatrix} \quad \Delta_1 \in \mathbb{R} \quad \Delta_2 \in \mathbb{C}$$

- Approximation pessimiste : recouvrement de l'incertitude paramétrique par de l'incertitude dynamique : $|\Delta| < 1 \ \rightarrow \ |\Delta(j\omega)| < 1$