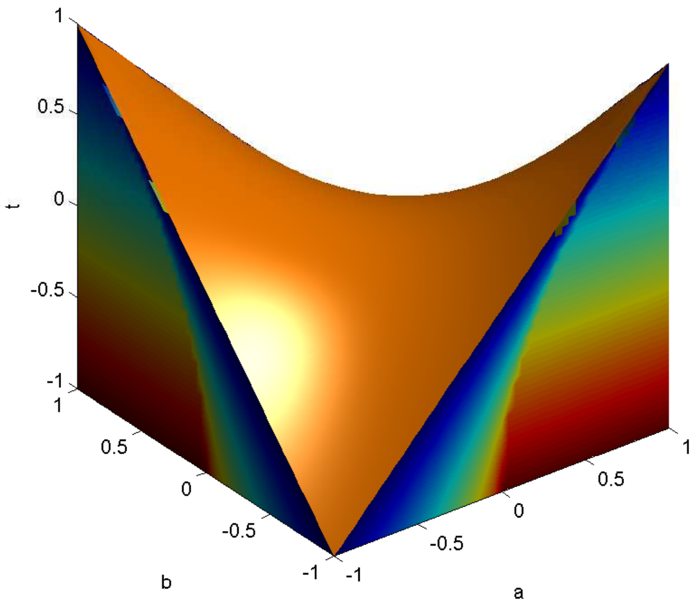
Analyse et synthèse robustes des systèmes linéaires

Cours 6

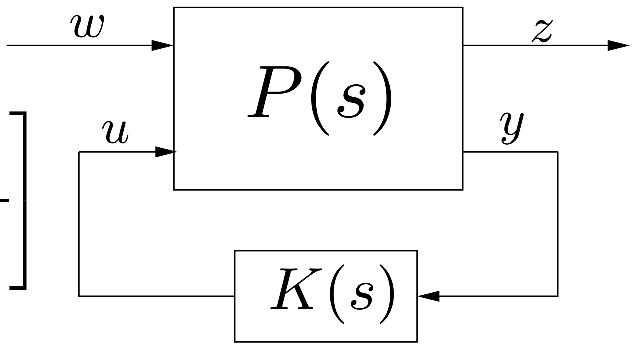
La synthèse optimale standard $\mathcal{H}_\infty$



La synthèse optimale standard $\mathcal{H}_\infty$ (I)

Modèle généralisé :

$$P(s) \sim \left[\begin{array}{cc|c} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & \mathbf{0} & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & \mathbf{0} \end{array}\right] \qquad K(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array}\right]$$



➥ **Hypothèses 1** :

1- (A, B_1) *et* (A, B_2) *stabilisables,* (C_1, A) *et* (C_2, A) *détectables*

2- $D_{12}'[C_1 \quad D_{12}] = [\mathbf{0} \quad \mathbf{1}]$ *et* $[B_1' \quad D_{21}']'D_{21}' = [\mathbf{0} \quad \mathbf{1}]'$

3- P, K *sont rationnelles, réelles et propres*

4- $\begin{bmatrix} A - j\omega\mathbf{1} & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} A - j\omega\mathbf{1} & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ *sont de rang plein* $\forall\ \omega$

Nota : $\mathcal{K}$ est l'ensemble des correcteurs admissibles :

$$\mathcal{K} = \{K \in \mathbb{C}^{m \times r} \mid T_{zw}(s) \in \mathcal{RH}_\infty\}$$

☛ **Problème 1** : **Synthèse optimale et sous-optimale $\mathcal{H}_\infty$**

1- $\gamma > 0$ *et* P *étant donnés, déterminer un correcteur* K^{sub} *tel que* $\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma$

2- Déterminer $\gamma^*_\infty = \arg\left[\min_{K \in \mathcal{K}} ||T_{zw}||_\infty\right]$

3- Déterminer le correcteur K *minimisant une norme* $\mathcal{H}_\infty$ *du transfert entre les sorties exogènes* z *et les entrèes exogènes* w *:*

$$\min_{K \in \mathcal{K}} ||T_{zw}||_\infty = \gamma^*_\infty$$

Soient les deux matrices hamiltoniennes et les équations de Riccati associées :

$$H_\infty(\gamma) = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1' - B_2B_2' \\ -C_1'C_1 & -A' \end{bmatrix} \quad J_\infty(\gamma) = \begin{bmatrix} A' & \gamma^{-2}C_1'C_1 - C_2'C_2 \\ -B_1B_1' & -A \end{bmatrix}$$

$$A'X_\infty + X_\infty A + X_\infty[\gamma^{-2}B_1B_1' - B_2B_2']X_\infty + C_1'C_1 = \mathbf{0} \qquad AY_\infty + Y_\infty A' + Y_\infty[\gamma^{-2}C_1'C_1 - C_2'C_2]Y_\infty + B_1B_1' = \mathbf{0}$$

❒ **Théorème 1** :

1- $K^{sub}(s)$ *stabilise* T_{zw} *de manière interne et de plus* $||T_{zw}||_\infty < \gamma$ *ssi les trois conditions suivantes sont simultanément vérifiées :*

i- $\Lambda(H_\infty(\gamma)) \cap \mathbb{C}^0 = \emptyset$ *et* $\exists\ X_\infty = X_\infty' \geq \mathbf{0}$ *solution unique de l'équation de Riccati*

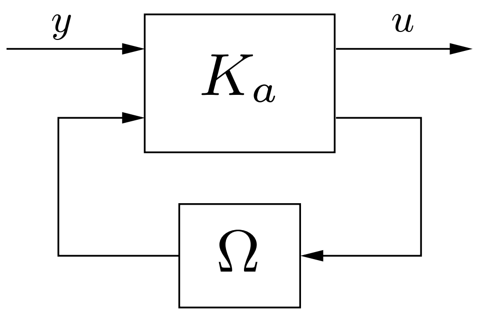
ii- $\Lambda(J_\infty(\gamma)) \cap \mathbb{C}^0 = \emptyset$ *et* $\exists\ Y_\infty = Y_\infty' \geq \mathbf{0}$ *solution unique de l'équation de Riccati*

iii- $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

L'ensemble de tous les correcteurs $K(s)^{sub}$ $\mathcal{H}_\infty$-sous-optimaux sont donnés par :

$$\boxed{K_{\mathcal{H}_\infty} = \mathcal{L}_l(K_a, \Omega)}$$

$$K_a \sim \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{m_2} \\ -C_2 & \mathbf{1}_{p_2} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$



où

$$||\Omega||_\infty < \gamma \qquad \Omega \in \mathcal{RH}_\infty^{m_2 \times p_2} \qquad \hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1' X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$$

$$L_\infty = -Y_\infty C_2' \qquad F_\infty = -B_2' X_\infty \qquad Z_\infty = \mathbf{1} - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty$$

La synthèse optimale standard $\mathcal{H}_\infty$ (IV)

❒ **Théorème 2** : *(suite)*

2- Pas de formule explicite pour γ_∞^* *mais calcul par bissection à la précision voulue*

$$\gamma_\infty^* = \inf_{i,ii,iii} \gamma$$

3- Si en γ_∞^**, la condition iii n'est pas vérifiée alors le correcteur optimal est donné sous forme descripteur par*

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{1} - \gamma_\infty^{*-2} Y_\infty X_\infty)\dot{x}_K & = & A_s x_K - L_\infty y \\ u & = & F_\infty x_K \end{array}$$

où $A_s = A + B_2 F_\infty + L_\infty C_2 + \gamma_\infty^{*-2} Y_\infty A' X_\infty + \gamma_\infty^{*-2} B_1 B_1' + \gamma_\infty^{*-2} Y_\infty C_1' C_1$

Nota : Si $\gamma_2 \geq \gamma_1 > \gamma_\infty^*$ alors

$$\begin{array}{rcl} X_\infty(\gamma_1) & \geq & X_\infty(\gamma_2) \\ Y_\infty(\gamma_1) & \geq & Y_\infty(\gamma_2) \\ \rho(X_\infty(\gamma_1) Y_\infty(\gamma_1)) & \geq & \rho(X_\infty(\gamma_2) Y_\infty(\gamma_2)) \end{array}$$

- Résolution de deux équations de Riccati paramétrées par γ
- L'ensemble des correcteurs est paramétré par la matrice de transfert $\Omega(s)$ à travers la $\mathcal{LFT}$ $\mathcal{L}_l(\Omega, K_a)$:
- Le correcteur tel que $\Omega = 0$ est appelé correcteur central défini par :

$$K_c \sim \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

- Structure du correcteur central : ($\sim \mathcal{H}_2$, $\gamma \to \infty$)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_1\hat{w} + B_2 u + Z_\infty L_\infty (C_2\hat{x} - y) \\ u &= F_\infty \hat{x} \\ \hat{w} &= \gamma^{-2} B_1' X_\infty \hat{x} \end{aligned}$$

- Difficultés numériques pour γ_∞^* et $\gamma \to \gamma_\infty^*$ (γ-itération)
- Structure identique au problème de synthèse H_2 avec principe de séparation (FI+OE)

Réalisation minimale d'état du modèle généralisé :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{22} = 0$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_{12} = 1 \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Modèle généralisé :

$$P(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{s-1} & 1 & \dfrac{3}{s^2-1} \end{bmatrix}$$

```
>> A=[1 1;0 -1];B1=[1 0;0 0];B2=[0;3];C1=[0 0];C2=[1 0];D11=[0 0];D12=1;
>> D21=[0 1];D22=0;
>> P=ss(A,[B1 B2],[C1;C2],[D11 D12;D21 D22]);
```

Synthèse $\mathcal{H}_\infty$:

```
>> [k,N,g] =hinfsyn(P,1,1,'GMIN',1.6,'GMAX',1.7,'TOLGAM',0.001,'METHOD',...
'ric','DISPLAY','on')

Test bounds:       1.6000 <  gamma  <=      1.7850
  gamma    hamx_eig  xinf_eig  hamy_eig   yinf_eig   nrho_xy   p/f
    1.785  1.0e+000  1.1e-016  1.0e+000   0.0e+000    0.7827    p
    1.692  1.0e+000  0.0e+000  1.0e+000   0.0e+000    0.8867    p
    1.646  1.0e+000  0.0e+000  1.0e+000   0.0e+000    0.9472    p
    1.623  1.0e+000  1.1e-016  1.0e+000   0.0e+000    0.9799    p
    1.612  1.0e+000  0.0e+000  1.0e+000   0.0e+000    0.9969    p
    1.606  1.0e+000  0.0e+000  1.0e+000   0.0e+000    1.0056#   f
    1.609  1.0e+000  0.0e+000  1.0e+000   0.0e+000    1.0012#   f
    1.610  1.0e+000  1.1e-016  1.0e+000   0.0e+000    0.9990    p
    1.609  1.0e+000  0.0e+000  1.0e+000   0.0e+000    1.0001#   f

 Gamma value achieved:     1.6101
```

Calcul du compensateur central :

```
>> gamma=1.7;
>> Hinf=[A (gamma^(-2)*B1*B1')-(B2*B2');-C1'*C1 -A'];
>> [x1,x2,flag]=ric_schr(Hinf);
>> Xinf=x2/x1;
>> Jinf=[A' (gamma^(-2)*C1'*C1-C2'*C2);-B1*B1' -A];
>> [x1,x2,flag]=ric_schr(Jinf);
>> Yinf=x2/x1;
>> Finf=-B2'*Xinf;
>> Linf=-Yinf*C2';
>> Zinf=(eye(2)-gamma^(-2)*Yinf*Xinf)^(-1);
>> Ainf=A + gamma^(-2)*B1*B1'*Xinf + B2*Finf + Zinf*Linf*C2;
>> Kc=ss(Ainf,-Zinf*Linf,Finf,zeros);
```

Réalisation minimale d'état :

$$K_c = K_{1.7} \sim \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 18.34 & 1.18 & 19.7074 \\ -4.73 & -3.36 & 0 \\ \hline -1.58 & -0.79 & 0 \end{array}\right]$$

```
>> [num,den]=ss2tf(Ainf,-Zinf*Linf,Finf,0);
```

Fonction de transfert :

$$K_c = K_{1.7}(s) = -31.05 \frac{s+1}{s^2 + 21.7s + 67.29}$$

$$||T_{zw}||_\infty = 1.698$$

Pôles en boucle fermée :

$$\Lambda = \{-1,\ -1,\ -1.41,\ -18.29\}$$

Pour $\gamma \to \gamma^*$

$$\gamma = 1.65 \quad \to \quad K_c(s) = -\frac{s+1}{0.015s^2 + 0.66s + 2.14}$$

$$\gamma = 1.61 \quad \to \quad K_c(s) = -\frac{s+1}{0.0004s^2 + 0.62s + 2.12}$$

$$\gamma = 1.60949 \quad \to \quad K_c(s) = -\frac{s+1}{3 \times 10^{-7}s^2 + 0.62s + 2.14}$$

$$\boxed{K_{opt}(s) = -\frac{s+1}{0.62s + 2.12}}$$

Nota :

Le compensateur central subit une réduction d'ordre à l'optimum γ_∞^*

Pour $\gamma \to \infty$

$$\gamma = 2.9 \quad \to \quad K_c(s) = -\frac{-4.651s - 4.651}{s^2 + 5.304s + 11.28}$$

$$\gamma = 10 \quad \to \quad K_c(s) = -\frac{-3.305s - 3.305}{s^2 + 4.467s + 8.424}$$

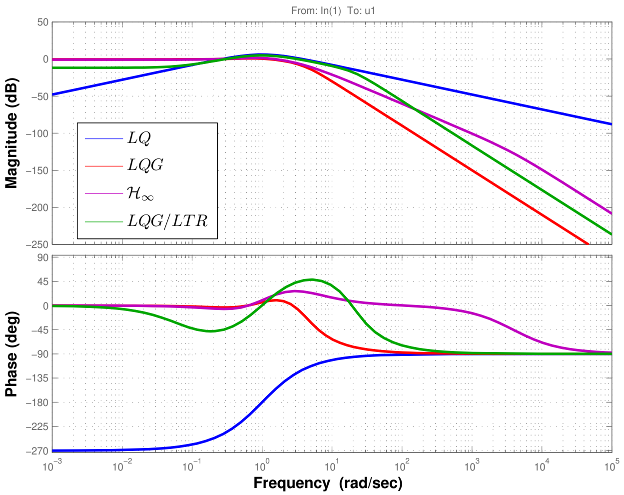
$$\gamma = 100 \quad \to \quad K_c(s) = -\frac{-3.225s - 3.225}{s^2 + 4.415s + 8.244}$$

$$\boxed{K_{\gamma=\infty}(s) = K^*_{\mathcal{H}_2} = -\frac{-3.219s - 3.219}{s^2 + 4.414s + 8.243}}$$

Nota :

Le compensateur central tend vers le compensateur $\mathcal{H}_2$ optimal quand $\gamma \to \infty$

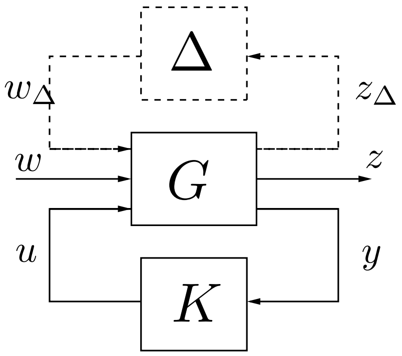
Retour à l'exemple de [Doyle 78]



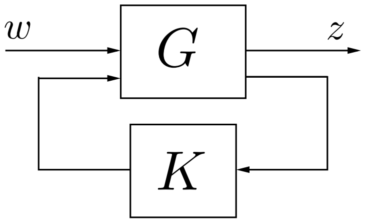
$$K_{lqg}(s) = 32\frac{(s-0.5)}{(s^2+6s+17)}$$

$$K_{lqg/ltr}(s) = 525.7\frac{(s-0.12)}{(s^2+18.21s+164.9)}$$

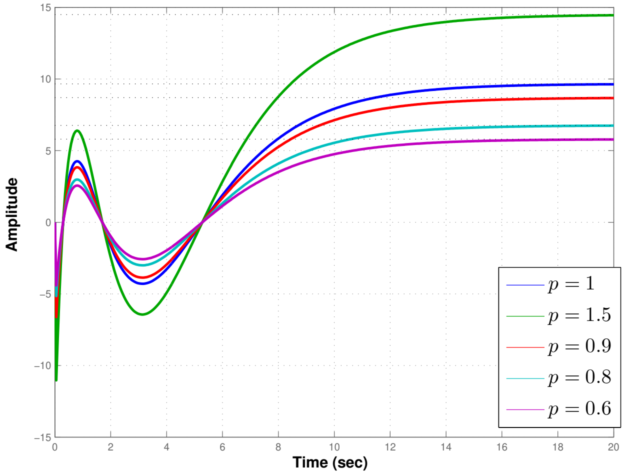
$$K_{\infty}(s) = 37490\frac{s-0.41}{(s+4.42)(s+3880)}$$



$$\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$$



$$\|T_{zw}(K)\|_\infty \leq \gamma$$



– Suivi de référence et réjection de perturbations :

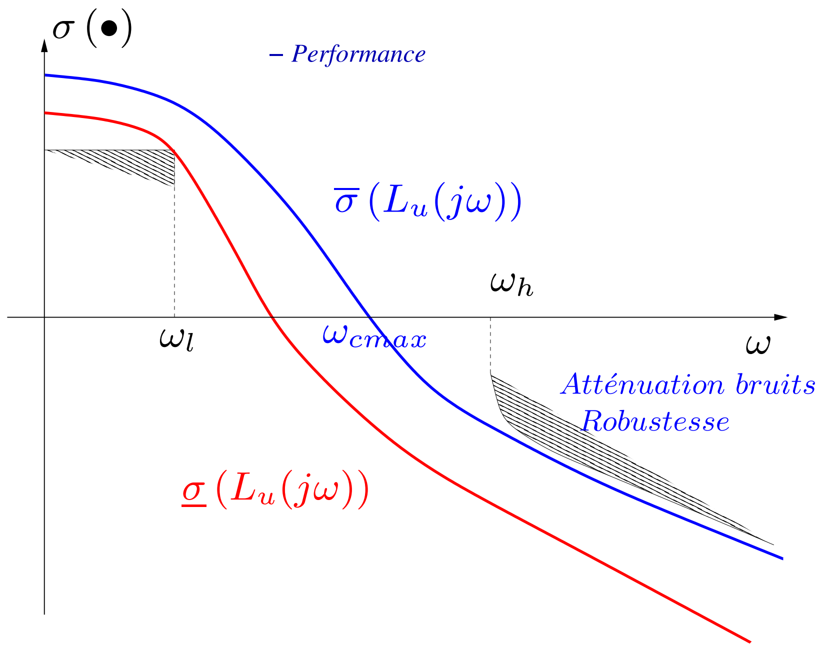
$$\underline{\sigma}(L_y) \text{ grand } \quad 0 \leq \omega \leq \omega_B$$

– Réduction d'énergie de commande :

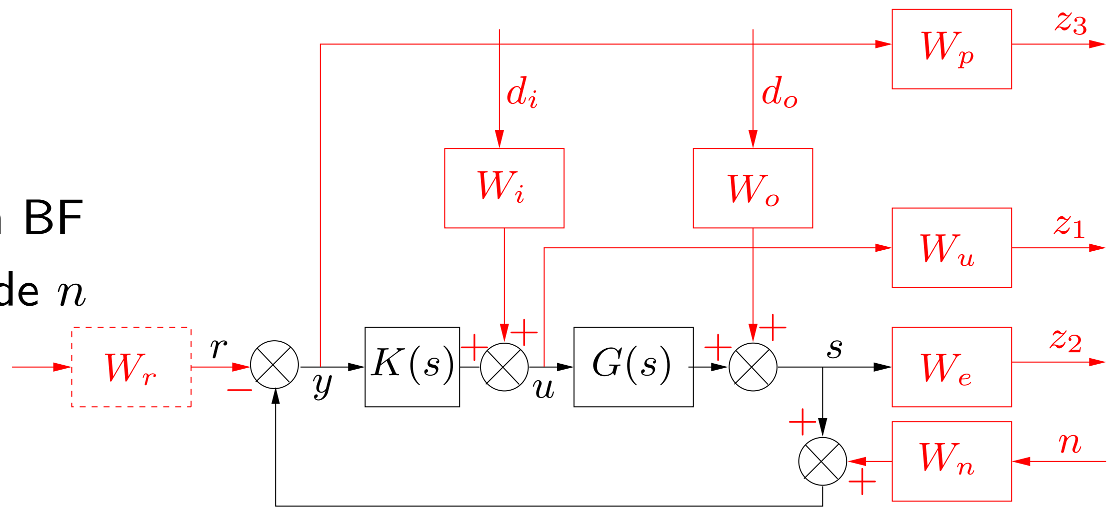
$$\overline{\sigma}(K) \text{ faible } \quad 0 \leq \omega_B \leq \omega$$

– Filtrage des bruits de mesure :

$$\overline{\sigma}(L_y) \text{ faible } \quad 0 \leq \omega_B \leq \omega$$

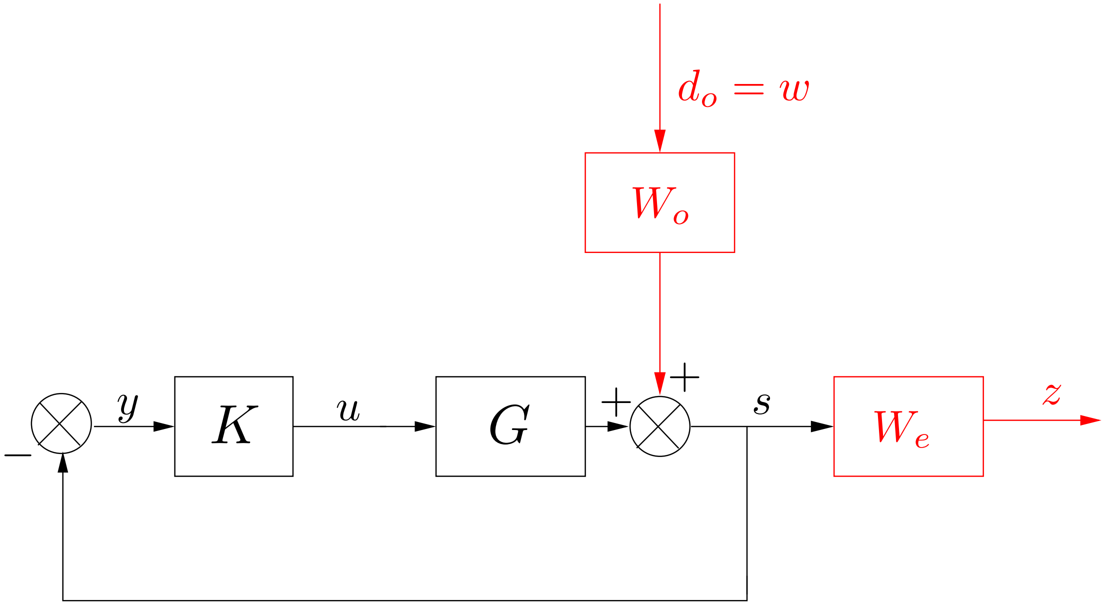


- W_u : restriction sur u
- W_e, W_p : spécif. sur des transferts en BF
- W_i, W_o, W_n : contenu fréq. de d et de n
- W_r : modelage de la consigne



1- Robustesse vis-à-vis des incertitudes :

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \quad \|W_e S_y W_o\|_\infty$$

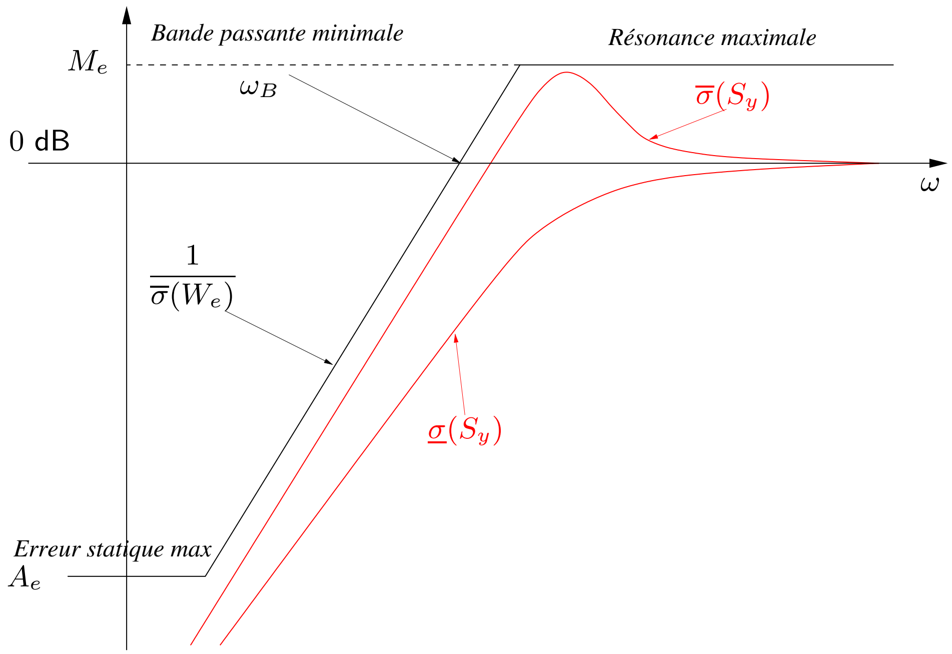


$$\begin{bmatrix} z \\ \hline y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_e W_o \\ \hline -W_o \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} W_e G \\ \hline -G \end{bmatrix} u$$

Modèle généralisé :

$$\boxed{\begin{array}{ll} P_{11} = W_e W_o & P_{12} = W_e G \\ P_{21} = -W_o & P_{22} = -G \end{array}}$$

Choix du filtre de pondération W_e



$$W_e = \mathrm{diag}(w_{e_i}) \text{ et } \boxed{w_{e_i} = \frac{s/M_{ei} + \omega_{Bi}}{s + \omega_{Bi} A_{ei}}}$$

avec

- $A_{ei} \ll 1$ pour une action intégrale
- $M_{ei} \simeq 2$
- ω_{Bi} la bande passante en BF

Nota :

- pour les systèmes MIMO, on définit une région de bande passante

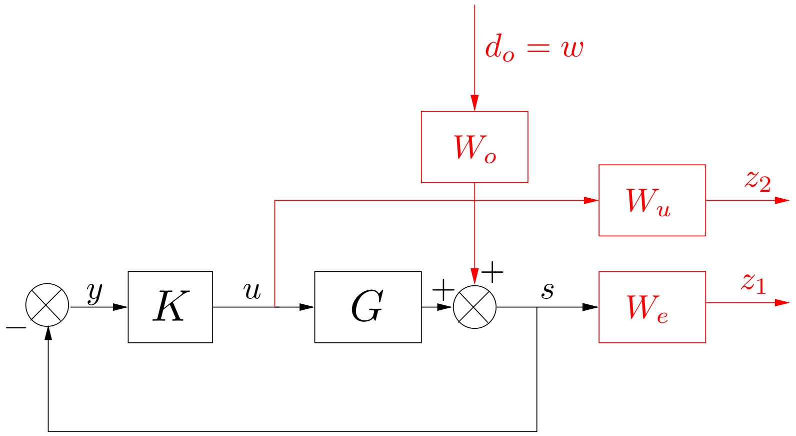
$$\omega_{\underline{\sigma}(S)=0.7} \leq \omega_B \leq \omega_{\overline{\sigma}(S)=0.7}$$

- Pour une transition plus raide entre BF et HF

$$w_{e_i} = \left(\frac{s/\sqrt[k]{M_{ei}} + \omega_{Bi}}{s + \omega_{Bi} \sqrt[k]{A_{ei}}} \right)^k$$

2- Robustesse vis-à-vis des incertitudes + restrictions sur u :

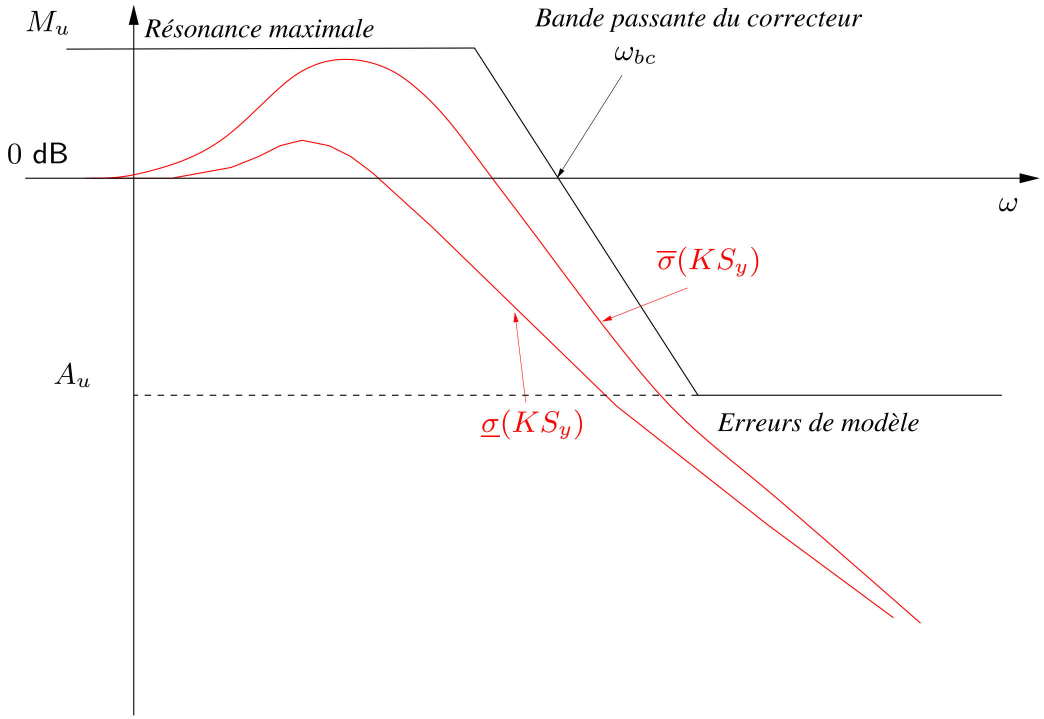
$$\min_{K \in \mathcal{K}} \left\| \begin{array}{c} W_e S_y W_o \\ \rho W_u K S_y W_o \end{array} \right\|_\infty$$



$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \hline y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_e W_o \\ \mathbf{0} \\ \hline -W_o \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} W_e G \\ W_u \\ \hline -G \end{bmatrix} u$$

Modèle généralisé :

$$\boxed{\begin{array}{ll} P_{11} = \begin{bmatrix} W_e W_o \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & P_{12} = \begin{bmatrix} W_e G \\ W_u \end{bmatrix} \\ P_{21} = -W_o & P_{22} = -G \end{array}}$$



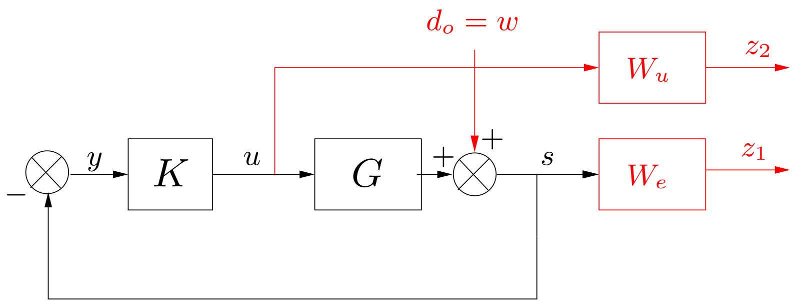
$$W_u = \mathrm{diag}(w_{u_i}) \text{ et } \boxed{w_{u_i} = \frac{s + \omega_{bc}/M_{ui}}{A_{ui}s + \omega_{bc}}}$$

avec

- $A_{ui} > 0$ et faible afin d'ajouter un pôle rapide
- M_{ui} : gain maximal de KS_y
- ω_{bc} la bande passante du correcteur

Nota : pour un effet de roll-off plus important

$$w_{u_i} = \left(\frac{s + \omega_{bc}/\sqrt[k]{M_{ui}}}{\sqrt[k]{A_{ui}}s + \omega_{bc}} \right)^k$$



Problème de sensibilité mixte

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \left\| \begin{matrix} W_e S_y \\ W_u K S_y \end{matrix} \right\|_\infty$$

❒ **Théorème 3** :

Sous les hypothèses :

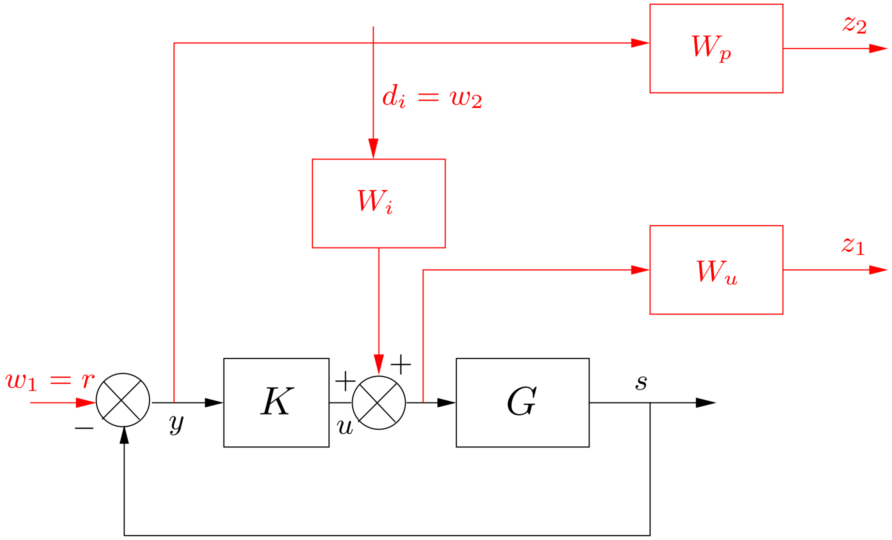
- W_u, W_e, W_u^{-1} *et* W_e^{-1} *sont stables*
- $G(s)$ *n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire*
- W_u *et* W_e *n'ont pas de zéros sur l'axe imaginaire*
- $W_u(\infty)$ *et* $W_e(\infty)$ *sont carrées et inversibles*

alors la solution du problème de sensibilité mixte a les propriétés suivantes :

- *Tout pôle stable de* $G(s)$ *est un zéro de transmission de* K
- *Si* p_0 *est un pôle instable de* $G(s)$ *alors* $-p_0^*$ *est un pôle de* S_y
- *Tout pôle de* $W_e(s)$ *est un pôle de* $K(s)$ *et tout pôle de* $W_u(s)$ *est un zéro de transmission de* K

Le problème de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ à 4 blocs

$$\min_{K \in \mathcal{RH}_\infty} \left\| \begin{array}{cc} W_u K S_y & W_u S_u W_i \\ W_p S_y & -W_p G S_u \end{array} \right\|_\infty$$



$$z = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & W_u W_i \\ W_p & -W_p G W_i \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} W_u \\ -W_p G \end{bmatrix} u$$

$$y = r - G W_i - G u$$

Modèle généralisé :

$$\boxed{P = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0} & W_u W_i & W_u \\ W_p & -W_p G W_i & -W_p G \\ \hline \mathbf{1} & -G W_i & -G \end{array}\right]}$$

- Généralisation au cas multivariable des concepts SISO (BP, précision...)
- Prise en compte du concept de robustesse en stabilité / incertitudes en H.F.
- Comportement du système bouclé / perturbations en sortie et en entrée
- Pb. de compensation zéros de K / pôles stables de G pour les structures flexibles
- Restrictions sur les performance (pôles et/ou zéros instables dans G ou L)

Intégrale de sensibilité de Bode et waterbed effects

$$\int_0^\infty \ln|\det S(j\omega)|d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} \mathrm{Re}(p_i)$$

Contraintes sur les valeurs crêtes en sensibilité et sur la Bande Passante

$$\|W_e S\|_\infty \geq |W_e(z)| \prod_{i=1}^{N_p} \frac{|z+p_i|}{|z-p_i|} \qquad \omega_{co} < \frac{z}{2}$$

Contraintes algébriques d'interpolation

$$T(p) = 1 \quad S(p) = 0 \quad T(z) = 0 \quad S(z) = 1$$