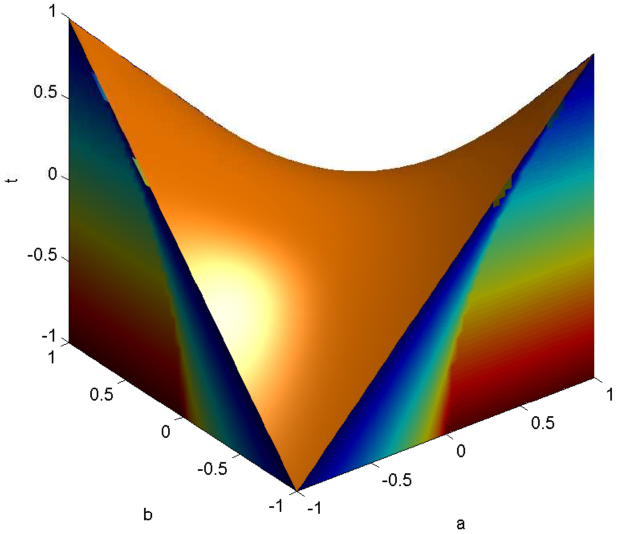
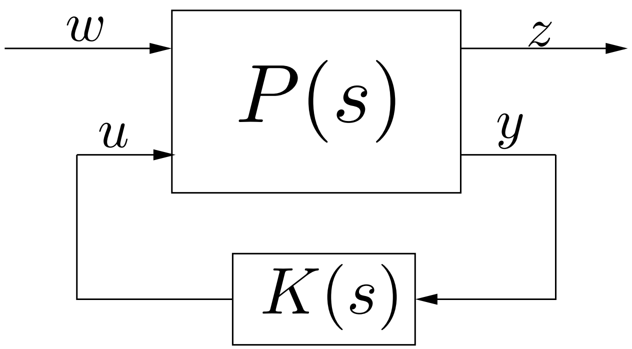
Analyse et synthèse robustes des systèmes linéaires

Cours 4

Problème de synthèse standard

Synthèse LQ





- w : entrées exogènes de perturbation
- z : sorties exogènes à contrôler
- u : signaux de commande
- y : signaux de mesures

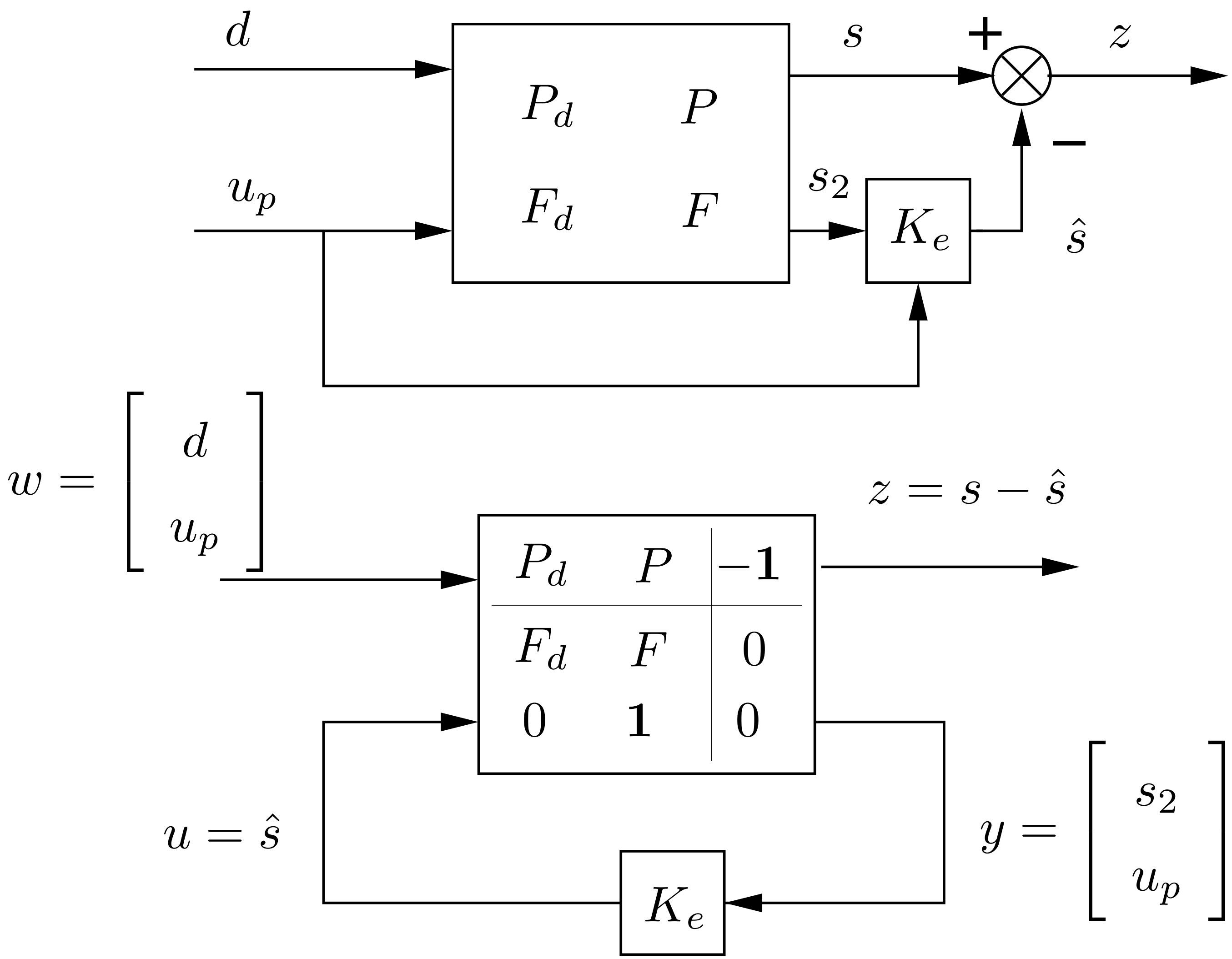
☛ **Problème 1** *:*

Déterminer K admissible minimisant l'influence de w sur z au sens d'une certaine norme de système

Nota :

- P, K : modèle et contrôleur augmentés
- La majorité des problèmes linéaires de commande robuste peuvent être formulés ainsi

Estimateur : [Skogestad96]



▼ **Définition 1** : *modèle généralisé*

P est appelé modèle généralisé s'il existe au moins un correcteur K, $u = Ky$ qui stabilise l'interconnexion

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

Nota :

- Si P n'est pas un modèle généralisé, certaines composantes de l'interconnexion sont instables et ne peuvent être stabilisées
- Dans ce dernier cas, changer les actionneurs, les composants, les interconnexions, les capteurs du système

Modèle généralisé : contre-exemple

Considérons l'interconnexion standard avec

$$P(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/s & 1/(s+2) \end{bmatrix}$$

- $K(s) = \dfrac{N(s)}{sD(s)}$ avec $N(0) \neq 0$ et $D(0) \neq 0$ alors

$$K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{21} = \frac{K(s)}{s(1 - \dfrac{K(s)}{s+2})} = \frac{(s+2)N(s)}{s(s(s+2)D(s) - N(s))}$$

- $K(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ avec $N(0) \neq 0$ et $D(0) \neq 0$ alors

$$(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{21} = \frac{1}{s(1 - \dfrac{K(s)}{s+2})} = \frac{(s+2)D(s)}{s((s+2)D(s) - N(s))}$$

Soit

$$P(s) \sim \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right]$$

avec $(A, \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix})$ stabilisable et $(\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, A)$ détectable

❒ **Théorème 1** : *test espace d'état*

$P(s)$ est un modèle généralisé ssi (A, B_2) est stabilisable et (A, C_2) est détectable

Nota : si w et z sont supprimés alors la condition est toujours vérifiée puisque

$$\left[\begin{array}{c} \dot{x} \\ \hline y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B_2 \\ \hline C_2 & D_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ \hline u \end{array}\right]$$

Soit K un correcteur généralisé qui stabilise P_{22}

❒ **Théorème 2** : *test I/O*

$P(s)$ est un modèle généralisé ssi ce correcteur K stabilise l'interconnexion standard définie par $P(s)$

Nota : afin de tester les propriétés de stabilisation de K, 4 fonctions de transfert à vérifier

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{1}-KP_{22})^{-1} & K(\mathbf{1}-P_{22}K)^{-1} \\ (\mathbf{1}-P_{22}K)^{-1}P_{22} & (\mathbf{1}-P_{22}K)^{-1} \end{bmatrix}$$

ou test espace d'état

$$\begin{bmatrix} A_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -D_K \\ -D_{22} & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C_K \\ C_{22} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ est stable}$$

Soit $P(s) \sim \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right]$ avec (A, B_2) stabilisable et (C_2, A) détectable alors $\exists\ F$ et $\exists\ L$ t.q. $A + B_2F$ et $A + LC_2$ sont stables.

Un correcteur stabilisant P est donné par :

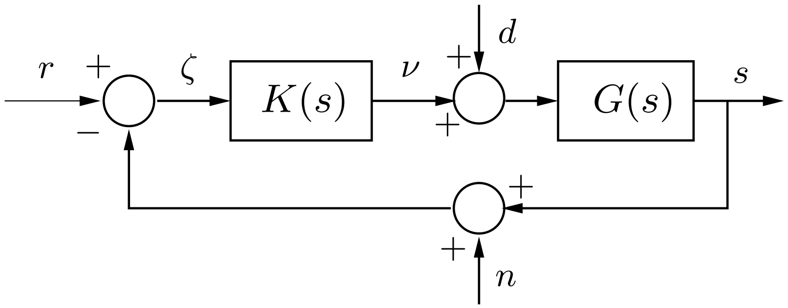
$$\dot{x}_K = (A + B_2F + LC_2 + LD_{22}F)x_K - Ly$$
$$u = Fx_K$$

$$K \sim \left[\begin{array}{c|c} A + B_2F + LC_2 + LD_{22}F & -L \\ \hline F & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

Test espace d'état :

$$A_{bf} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -D_K \\ -D_{22} & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C_K \\ C_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$A_{bf} = \begin{bmatrix} A & B_2F \\ -LC_2 & A + B_2F + LC_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + B_2F & B_2F \\ \mathbf{0} & A + LC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$



$$P(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} -\mathbf{1} & G(s) & \mathbf{0} & G(s) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} & -G(s) & -\mathbf{1} & -G(s) \end{array}\right]$$

Test I/O : on suppose que $K(s)$ stabilise $P_{22}(s) = -G(s)$ donc

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{1}+KG)^{-1} & K(\mathbf{1}+GK)^{-1} \\ -(\mathbf{1}+GK)^{-1}G & (\mathbf{1}+GK)^{-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty$$

On teste

$$P_{bf}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} P_{11}+P_{12}K(\mathbf{1}-P_{22}K)^{-1}P_{21} & P_{12}(\mathbf{1}-KP_{22})^{-1} & P_{12}K(\mathbf{1}-P_{22}K)^{-1} \\ \hline K(\mathbf{1}-P_{22}K)^{-1}P_{21} & (\mathbf{1}-KP_{22})^{-1} & K(\mathbf{1}-P_{22}K)^{-1} \\ (\mathbf{1}-P_{22}K)^{-1}P_{21} & (\mathbf{1}-P_{22}K)^{-1}P_{22} & (\mathbf{1}-P_{22}K)^{-1} \end{array}\right]$$

Nota : l'ensemble des matrices de transfert stables est stable par rapport aux opérations $+$, $\times$ et multiplication externe sur les réels

$$P_{bf}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} P_{11} + P_{12}K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{21} & P_{12}(\mathbf{1} - KP_{22})^{-1} & P_{12}K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1} \\ \hline K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{21} & (\mathbf{1} + KG)^{-1} & K(\mathbf{1} + GK)^{-1} \\ (\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{21} & -(\mathbf{1} + GK)^{-1}G & (\mathbf{1} + GK)^{-1} \end{array}\right]$$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & G(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad P_{12}(s) = \begin{bmatrix} G(s) \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -G(s) & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{21} = \begin{bmatrix} K(\mathbf{1} + GK)^{-1} & -K(\mathbf{1} + GK)^{-1}G & -K(\mathbf{1} + GK)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{21} = \begin{bmatrix} (\mathbf{1} + GK)^{-1} & -(\mathbf{1} + GK)^{-1}G & -(\mathbf{1} + GK)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_{12}(\mathbf{1} - KP_{22})^{-1} = \begin{bmatrix} G(\mathbf{1} + KG)^{-1} \\ (\mathbf{1} + KG)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{1} + GK)^{-1}G \\ (\mathbf{1} + KG)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$P_{12}K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1} = \begin{bmatrix} GK(\mathbf{1} + GK)^{-1} \\ K(\mathbf{1} + GK)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} - (\mathbf{1} + GK)^{-1} \\ K(\mathbf{1} + GK)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{P} &= P_{11} + P_{12}K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{21} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & G(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} G(s) \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} K(\mathbf{1} + GK)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -G(s) & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\mathbf{1} + GK(\mathbf{1} + GK)^{-1} & (\mathbf{1} - GK(\mathbf{1} + GK)^{-1})G & -GK(\mathbf{1} + GK)^{-1} \\ K(\mathbf{1} + GK)^{-1} & -K(\mathbf{1} + GK)^{-1}G & -K(\mathbf{1} + GK)^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -(\mathbf{1} + GK)^{-1} & (\mathbf{1} + GK)^{-1}G & (\mathbf{1} + GK)^{-1} - \mathbf{1} \\ K(\mathbf{1} + GK)^{-1} & (\mathbf{1} + KG)^{-1} - \mathbf{1} & -K(\mathbf{1} + GK)^{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Soit le modèle d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \ , \ x_0 \\ y(t) &= x(t) \\ z(t) &= Nx(t) \end{aligned}$$

☛ **Problème 2** : *LQR*

Déterminer la commande par retour d'état $u(t)$ minimisant le critère de performance

$$J = \int_0^{\infty} (z'Qz + u'Ru)dt$$

➥ **Hypothèses 1** :

- (A, B) *est stabilisable*
- $R = R' > 0$ *et* $Q = Q' \geq 0$

- Loi de commande optimale :

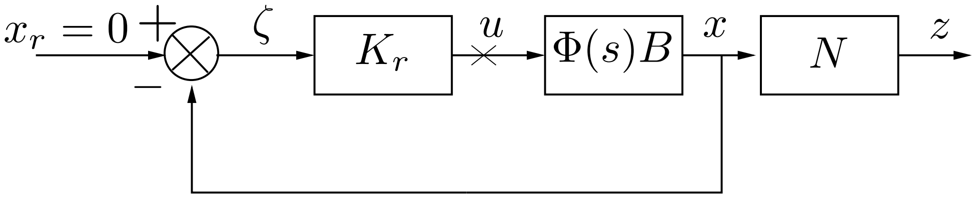
$$\boxed{u(t) = -K_r x(t) = -R^{-1}B'Px(t)}$$

- $P = P' > 0$ solution de l'équation de Riccati :

$$\boxed{A'P + PA - PBR^{-1}B'P + N'QN = 0}$$

- Coût optimal :

$$\boxed{J^* = x_0' P x_0}$$



$$\boxed{L_u(s) = -K_r\Phi(s)B = R^{-1}B'P(s\mathbf{1} - A)^{-1}B}$$

❒ **Théorème 3** *Egalité de Kalman ou return-difference equation*

Si K_r est la solution du problème LQR

$$\boxed{\left[\mathbf{1}+K_r(-s\mathbf{1}-A')^{-1}\right]' R \left[\mathbf{1}+K_r(s\mathbf{1}-A)^{-1}B\right] = \mathbf{1}+B'(-s\mathbf{1}-A')^{-1}N'QN(s\mathbf{1}-A)^{-1}B}$$

✍ **Preuve 1**

$$A'P+PA-PBR^{-1}B'P+N'QN=0 \quad K=R^{-1}B'P \quad R^{\frac{1}{2}}K_r=R^{-\frac{1}{2}}B'P$$

$$(\times R^{-\frac{1}{2}}B'(-s\mathbf{1}-A')^{-1}) \quad N'QN=(-s\mathbf{1}-A')P+P(s\mathbf{1}-A)+K_r'RK_r \quad (\times(s\mathbf{1}-A)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{1}+) \quad R^{-\frac{1}{2}}B'(-s\mathbf{1}-A')^{-1}N'QN(s\mathbf{1}-A)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}} \quad = \quad & (\mathbf{1}+) \quad R^{-\frac{1}{2}}K_r(s\mathbf{1}-A)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}+ \\ & R^{-\frac{1}{2}}B'(-s\mathbf{1}-A')^{-1}K_r'R^{-\frac{1}{2}}+ \\ & R^{-\frac{1}{2}}B'(-s\mathbf{1}-A')^{-1}K_r'RK_r(s\mathbf{1}-A)^{-1}BR^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\left[\mathbf{1}+K_r(-s\mathbf{1}-A')^{-1}\right]' R \left[\mathbf{1}+K_r(s\mathbf{1}-A)^{-1}B\right] = \mathbf{1}+B'(-s\mathbf{1}-A')^{-1}N'QN(s\mathbf{1}-A)^{-1}B$$

Quelques résultats de Kalman II

Pour les matrices de pondération données $Q = H'H \geq 0$ et $R = \rho \mathbf{1},\ \rho > 0$

❒ **Théorème 4** *Inégalité de Kalman*

Si $L_u(s) = K_r \Phi(s) B$ *où* K_r *est la solution du problème LQR*

$$\underline{\sigma}(\mathbf{1} + L_u(j\omega)) \geq 1$$

✍ **Preuve 2** *Egalité de Kalman avec* $s = j\omega$

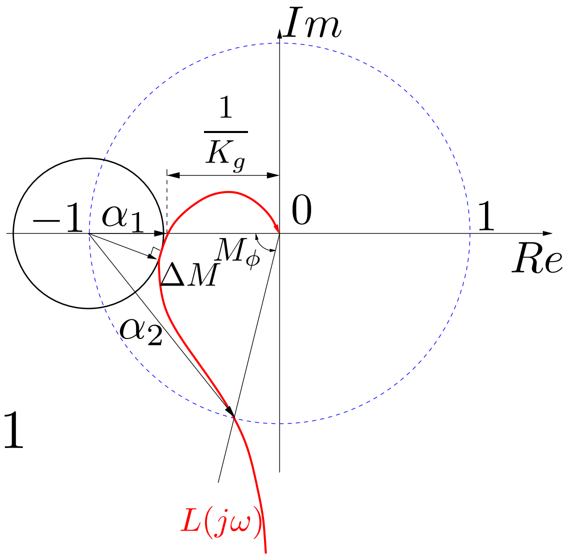
$$[\mathbf{1} + L_u(j\omega)]^H [\mathbf{1} + L_u(j\omega)] = \mathbf{1} + \frac{1}{\rho} [NH\Phi(j\omega)B]^H [NH\Phi(j\omega)B] \geq \mathbf{1}$$

$$\lambda_i \left([\mathbf{1} + L_u(j\omega)]^H [\mathbf{1} + L_u(j\omega)] \right) = 1 + \lambda_i \left(\frac{1}{\rho} [NH\Phi(j\omega)B]^H [NH\Phi(j\omega)B] \right) \geq 1$$

$$\sigma_i (\mathbf{1} + L_u(j\omega)) = \sqrt{1 + \sigma_i^2 \left(\frac{1}{\rho} NH\Phi(j\omega)B \right)} \geq 1$$

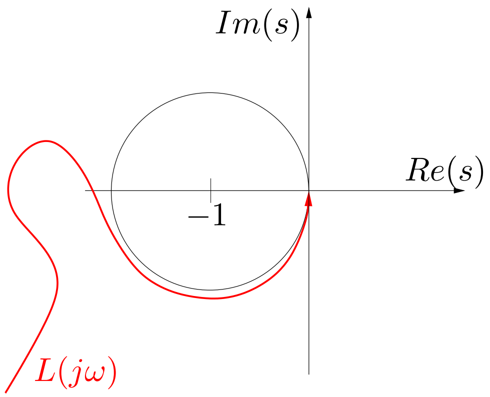
Marge de module

$$\boxed{\Delta M = \frac{1}{M_S} = \frac{1}{\max_{\omega} \overline{\sigma}(S(j\omega))} \geq 1}$$



$$\underline{\sigma}(\mathbf{1} + L_u(j\omega)) = \underline{\sigma}(S^{-1}(j\omega)) = \overline{\sigma}^{-1}(S(j\omega)) \geq 1$$

Interprétation SISO : marges de gain et de phase



$$|1 + L_u(j\omega)| \geq 1 \ \forall \ \omega \quad \Leftrightarrow \quad |S_u(j\omega)| \leq 1 \ \forall \ \omega$$

$$|D^{-1} - 1| < 1 \leq |1 + L_u(j\omega)| \ \forall \ \omega$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} 0.5 & \leq & M_G & \leq & +\infty \\ -60^o & \leq & M_\Phi & \leq & 60^o \end{array}}$$

$$D = \mathrm{diag}\{k_i e^{j\theta_i}\}$$

$$\theta_i = 0, \ 0.5 \leq k_i \leq \infty$$

$$k_i = 1 \quad |\theta_i| \leq 60^o$$

Synthèse LQR et loop shaping

Le calcul de la loi de commande optimale K_r est donné par le choix des matrices de pondération $Q = H'H$ et $R = \rho 1$

$$\underline{\sigma}\left(L_u(j\omega)\right) \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}}\underline{\sigma}\left(NH\Phi(j\omega)B\right) \quad \overline{\sigma}\left(L_u(j\omega)\right) \sim \frac{\overline{\sigma}\left(NHB\right)}{j\omega\sqrt{\rho}}$$

Loop shaping

- Faible roll-off (-20 dB/decade) / modélisation de l'incertitude et bruit de mesure
- Gain en boucle ouverte aux BF

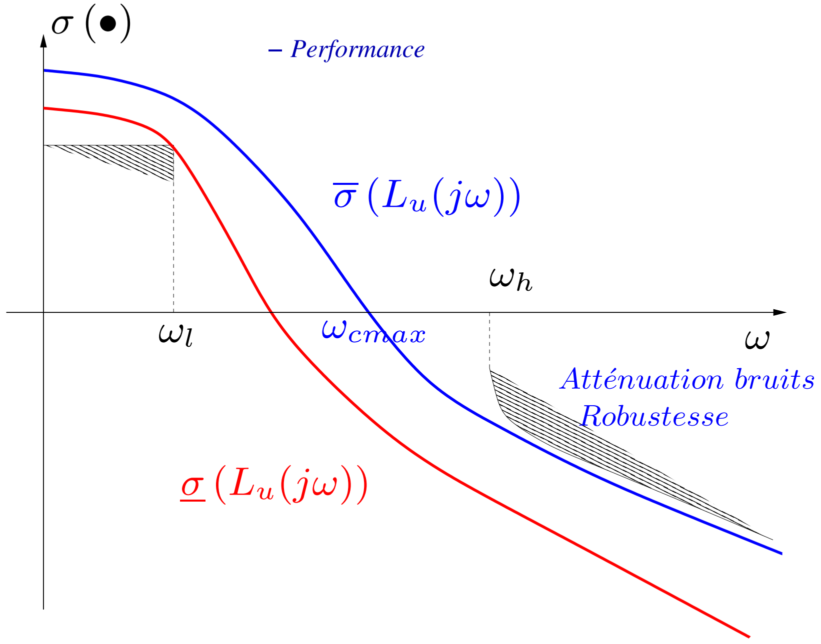
$$\underline{\sigma}(L_u(j\omega) > |w_1(j\omega)| > 1 \qquad \omega < \omega_l$$

- Gain en boucle ouverte aux HF

$$\overline{\sigma}(L_u(j\omega) < \frac{1}{|w_2(j\omega)|} < 1 \quad \omega > \omega_h$$

- Pulsation de coupure

$$\omega_{cmax} \sim \frac{\overline{\sigma}\left(NHB\right)}{\sqrt{\rho}}$$



Modèle d'état :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{1-s}{s^2}$$

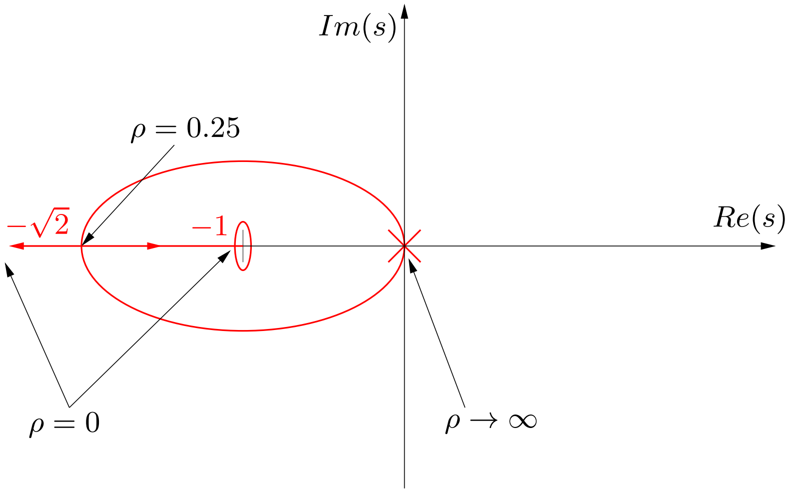
Régulateur ($e = 0$) minimisant :

$$J = \int_0^\infty [z^2 + \rho u^2] dt \quad \rho > 0$$

Solution analytique :

$$P = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{\rho}} & \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} & \sqrt{\rho(1 + 2\sqrt{\rho})} \end{bmatrix}$$

$$K_r = -\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\rho}} & \frac{\sqrt{1+2\sqrt{\rho}}}{\sqrt{\rho}} \end{bmatrix}$$



- Pour $\rho < 0.25$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sqrt{1 + 2\sqrt{\rho}} \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{\rho}}}{2\sqrt{\rho}}$$

- Pour $\rho > 0.25$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sqrt{1 + 2\sqrt{\rho}} \pm j\sqrt{-1 + 2\sqrt{\rho}}}{2\sqrt{\rho}}$$

Un exemple simple de [Doyle78]

Soit

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad x_0$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

où $Q = \rho > 0 \quad R = 1$. La solution optimale LQR est donnée par

$$\boxed{P = \alpha \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad K_r = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_u(s) = \frac{\alpha s}{(s-1)^2} \quad \alpha = 2 + \sqrt{4 + \rho}}$$

Nota : $\tilde{L}_u(s) = pL_u(s) = \dfrac{p\alpha s}{(s-1)^2}$

```
>> G=ss(A,B,eye(2),zeros(2,1));Q=rho*[1 1]'*[1 1],R=1;[K,P]=lqr(G,Q,R);
```