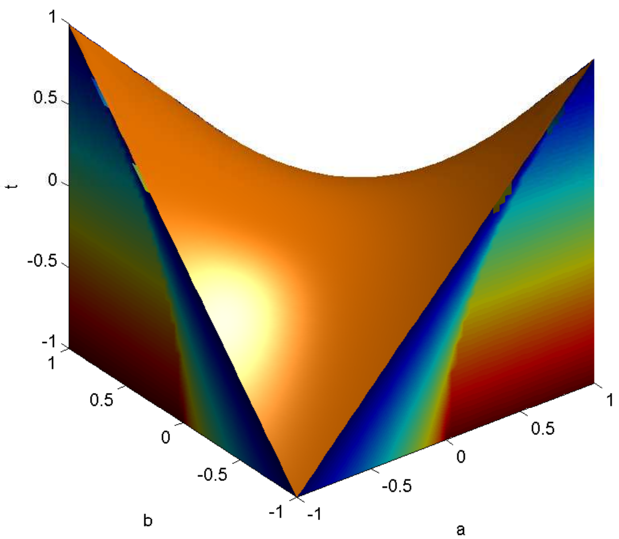
Analyse et synthèse robustes
des systèmes linéaires
Cours 3
Stabilité interne des systèmes interconnectés



Soit $G(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$, deux notions de stabilité peuvent être définies :

- Stabilité interne :

▼ **Définition 1** :

Le modèle LTI est stable de façon interne ssi

- A *est stable asymptotiquement* ($\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$) *ssi les valeurs propres de* A *sont telles que* $Re(\lambda_i(A)) < 0$

- Stabilité externe ou entrées/sorties (I/O) :

▼ **Définition 2** :

$G(s)$ *est stable I/O ssi*

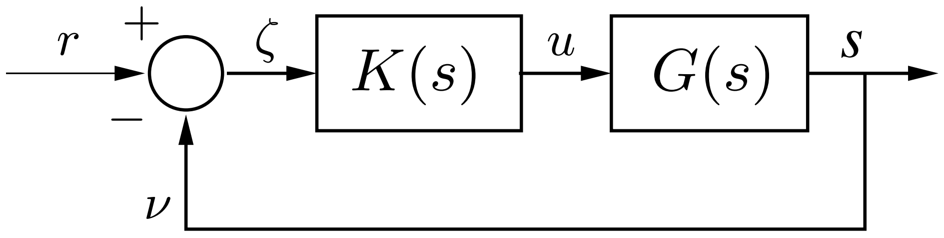
- $G(s)$ *est analytique (tous ses éléments sont bornés) dans* $\mathbb{C}^0 \cup \mathbb{C}^+$ *ou* $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$

ssi

- $G(s)$ *est BIBO stable*

❒ **Théorème 1** *Si* $G(s) \simeq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ *alors la stabilité I/O est équivalente à la stabilité interne*

Stabilité externe des Systèmes bouclés



- Le modèle LTI du système :

$$G(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

$$\Phi(s) = \det(s\mathbf{1} - A)$$

- Le gain de boucle :

$$G_{bo}(s) = L(s) = G(s)K(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A_{bo} & B_{bo} \\ \hline C_{bo} & D_{bo} \end{array}\right]$$

$$\Phi_{bo}(s) = \det(s\mathbf{1} - A_{bo})$$

- La boucle fermée :

$$G_{bf}(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A_{bf} & B_{bf} \\ \hline C_{bf} & D_{bf} \end{array}\right]$$

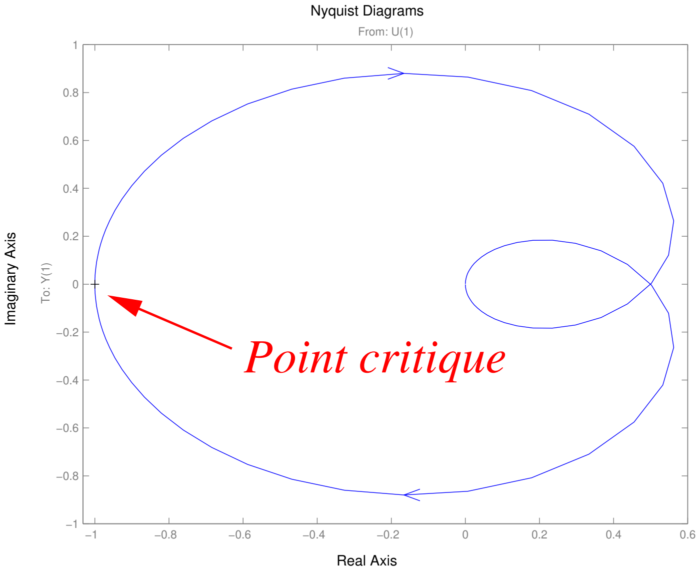
$$\Phi_{bf}(s) = \det(s\mathbf{1} - A_{bo} + B_{bo}(\mathbf{1} + D_{bo})^{-1}C_{bo})$$

Nota :

$$\det(\mathbf{1} + L(s)) = \frac{\Phi_{bf}(s)}{\Phi_{bo}(s)}\det(\mathbf{1} + D_{bo})$$

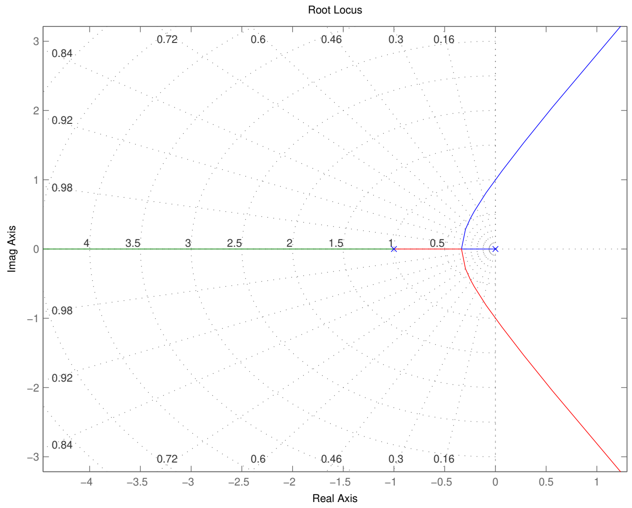
- Critère de Routh-Hurwitz sur le polynôme caractéristique en BF $\Phi_{bf}(s)$

- Condition nécessaire et suffisante fréquentielle de Nyquist



- Condition suffisante du faible gain : $||L||_\infty = \max\limits_{\omega} |L(j\omega)| < 1 \;\; \forall\ \omega$

- Lieu des racines



❒ **Théorème 2** : *critère de Nyquist multivariable*

Soit P_{bo} le nombre de pôles instables en B.O. dans $L(s)$. L'asservissement à retour unitaire est stable de manière externe en boucle fermée ssi

le lieu de Nyquist de $\det(\mathbf{1} + L(s))$:

- fait P_{bo} tours dans le sens trigonométrique autour de l'origine

- ne passe pas par l'origine

Si le système est instable alors le nombre de pôles instables en boucle fermée est

$$\boxed{P_{bf} = \overset{\circlearrowright}{N} + P_{bo}}$$

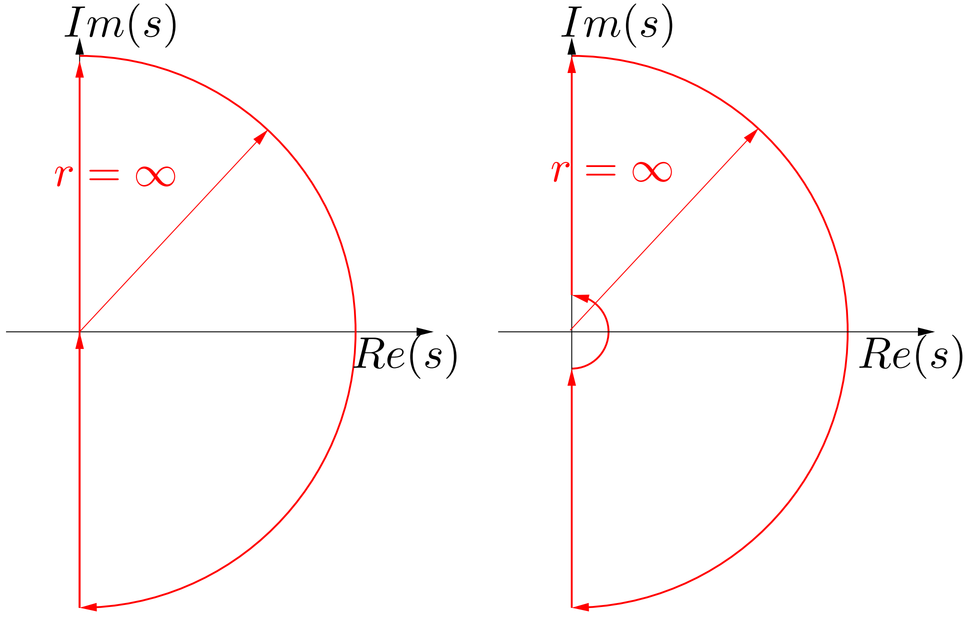
où $\overset{\circlearrowright}{N}$ est le nombre de tours dans le sens antitrigonométrique autour de 0 du lieu de Nyquist de $\det(\mathbf{1} + L(s))$

Nota :

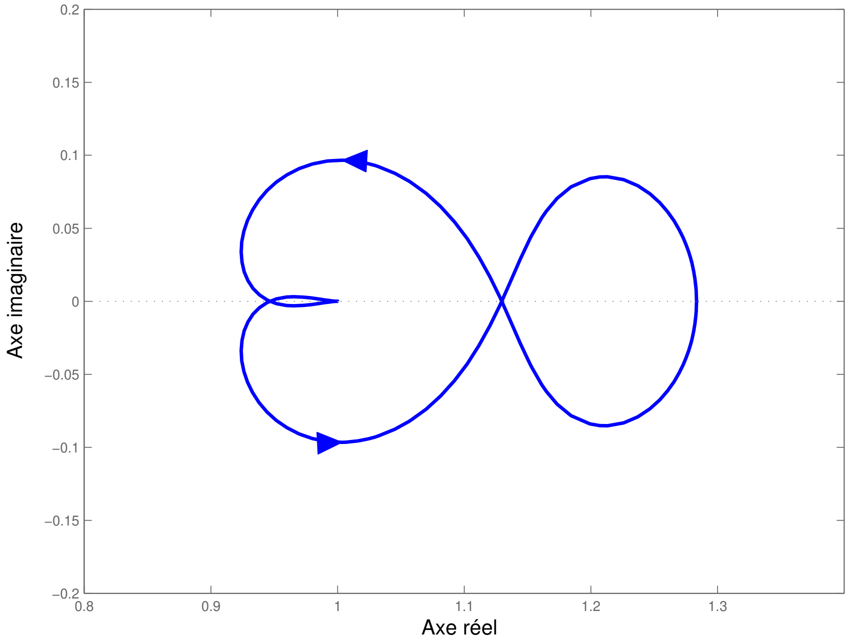
Le lieu de Nyquist de $\det(\mathbf{1} + L(s))$ correspond à l'image de $\det(\mathbf{1} + L(s))$ quand s parcourt le contour de Nyquist dans le sens antitrigonométrique

Contour de Nyquist

Contour de Nyquist modifié : système avec 1 intégration



Exemple : soit $L(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{s}{(s-1)(s+2)} \\ 0 & \dfrac{1}{s^2-2s+10} \end{bmatrix}$



$$\begin{aligned} \det(\mathbf{1}+L(s)) &= \frac{(s^2+5s+7)(s^2-2s+11)}{(s+2)(s+3)(s^2-2s+10)} \\ &= \frac{\Phi_{bf}(s)}{\Phi_{bo}(s)} \end{aligned}$$

$s = 1 \pm 3j$ instables $\quad P_{bo} = 2$

$\overset{\circlearrowleft}{N} = 0 \quad P_{bf} = 2$

Le système bouclé par retour unitaire est instable

▼ **Définition 3** : *rayon spectral*

Le rayon spectral de $L(j\omega) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ *est défini à chaque pulsation par*

$$\boxed{\rho(L(j\omega)) = \max_i |\lambda_i(L(j\omega))|}$$

❒ **Théorème 3** : *condition suffisante de stabilité*

Etant donné un asservissement à retour unitaire stable I/O en boucle ouverte ($L(s)$ est stable I/O) alors le système en boucle fermée est stable I/O si :

$$\rho(L(j\omega)) < 1 \quad \forall\, \omega$$

Nota :

- Condition suffisante puisque pas d'information sur la phase. Pour les systèmes SISO $\rho(L(j\omega)) = |L(j\omega)|$

$$L(s) = \frac{1}{s + \epsilon}$$

- Preuve par le critère de Nyquist MIMO + contraposée

❒ **Théorème 4** : *théorème du faible gain*

Etant donné un asservissement à retour unitaire stable I/O en boucle ouverte ($L(s)$ est stable I/O) alors le système en boucle fermée est stable I/O si :

$$\boxed{||L||_\infty = \max_\omega \overline{\sigma}(L(j\omega)) < 1 \quad \forall\ \omega}$$

où $\overline{\sigma}$ est la valeur singulière maximale de $L(j\omega)$ calculée à la pulsation ω

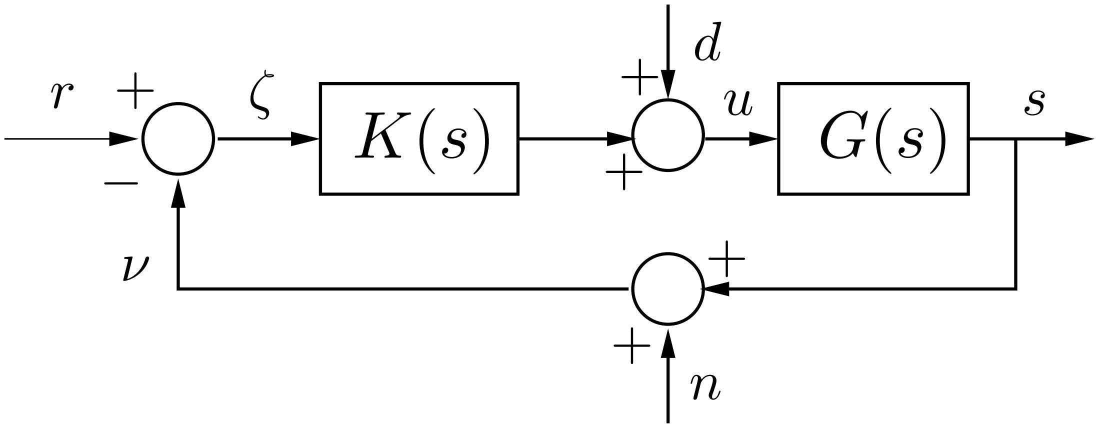
Nota : $\rho(A) \leq \|A\|$ pour toute norme matricielle $\|.\|$

Exemple :

```
>> A=[-1 0 -2;0 -1 1;0 0 -4];B=[0 0;1 0;0 1];C=[1 0 1;0 0 1];
>> D=[0 0;0 0];sys=ss(A,B,C,D);hinf=norm(sys,inf)
hinf =
    0.3536    0.3536         0
```

Le système bouclé par retour unitaire est stable

Nota : le test de stabilité externe suppose qu'il n'y a pas de simplifications pôles/zéros instables entre $K(s)$ et $G(s)$



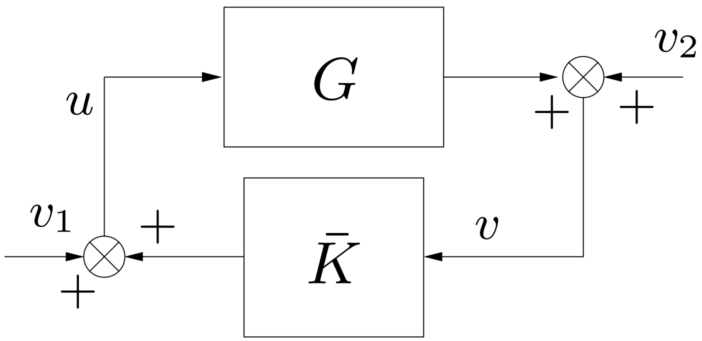
$$K(s) = \frac{k(s+3)}{s(s-2)} \qquad G(s) = \frac{(s-2)}{(s+3)}$$

$$L(s) = \frac{k}{s} \qquad S(s) = \frac{s}{s+k} \qquad T(s) = \frac{k}{s+k}$$

$$KS(s) = \frac{k(s+3)}{(s-2)(k+s)} \qquad GS(s) = \frac{s(s-2)}{(s+3)(s+k)}$$

Les transferts de r et n vers u sont instables

$\rightarrow$ 2 est un mode instable inobservable de la réalisation de $L(s)$ et de $S(s)$



Les réalisations stabilisables et détectables $v_1 = v_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu & \qquad \dot{x}_{\bar{K}} &= A_{\bar{K}} x_{\bar{K}} + B_{\bar{K}} v \\ v &= Cx + Du & \qquad u &= C_{\bar{K}} x_{\bar{K}} + D_{\bar{K}} v \end{aligned}$$

L'interconnexion est caractérisée par :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\bar{K} \\ -G & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

▼ **Définition 4** : *bien posé*

L'interconnexion est bien posée ssi toutes les fonctions de transfert bouclées existent et sont propres.

❒ **Lemme 1** :

L'interconnexion est bien posée ssi $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\bar{K}(\infty) \\ -G(\infty) & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -D_{\bar{K}} \\ -D & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1}$ *existe*

▼ **Définition 5** : *stabilité interne*

L'interconnexion est stable de manière interne si l'origine $(x, x_K) = (0, 0)$ *est asymptotiquement stable*

❒ **Théorème 5** : *test espace d'état*

L'interconnexion est internement stable ssi $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -D_{\bar{K}} \\ -D & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1}$ *existe et*

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{\bar{K}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{\bar{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -D_{\bar{K}} \\ -D & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C_{\bar{K}} \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ est stable}$$

Nota

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{\bar{K}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{\bar{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{\bar{K}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{\bar{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{\bar{K}} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C_{\bar{K}} \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{\bar{K}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & D_{\bar{K}} \\ D & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

L'interconnexion en boucle fermée est caractérisée par :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = G_{bf}(s) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$G_{bf}(s) = \begin{bmatrix} (\mathbf{1} - \bar{K}G)^{-1} & \bar{K}(\mathbf{1} - G\bar{K})^{-1} \\ (\mathbf{1} - G\bar{K})^{-1}G & (\mathbf{1} - G\bar{K})^{-1} \end{bmatrix}$$

❒ **Lemme 2** *:*

L'interconnexion est stable de manière interne ssi elle est bien posée et la matrice de transfert $G_{bf}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$

Nota : pour tous les signaux d'entrée bornés (v_1, v_2), les signaux de sortie (u, v) sont bornés

❒ **Lemme 3** *:*

Si $\bar{K} \in \mathcal{RH}_\infty$ *alors l'interconnexion est stable de manière interne ssi elle est bien posée et*

$$G(\mathbf{1} - \bar{K}G)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$$

❒ **Lemme 4** *:*

Si $G \in \mathcal{RH}_\infty$ *alors l'interconnexion est stable de manière interne ssi elle est bien posée et*

$$G\bar{K}(\mathbf{1} - G\bar{K})^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$$

❒ **Lemme 5** *:*

Si $\bar{K} \in \mathcal{RH}_\infty$ *et* $G \in \mathcal{RH}_\infty$ *alors l'interconnexion est stable de manière interne ssi elle est bien posée et*

$$(\mathbf{1} - \bar{K}G)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$$

ou

$$\text{spectre}(\det(\mathbf{1} - \bar{K}G)^{-1})) \subset \mathbb{C}^-$$

❒ **Théorème 6** *:*

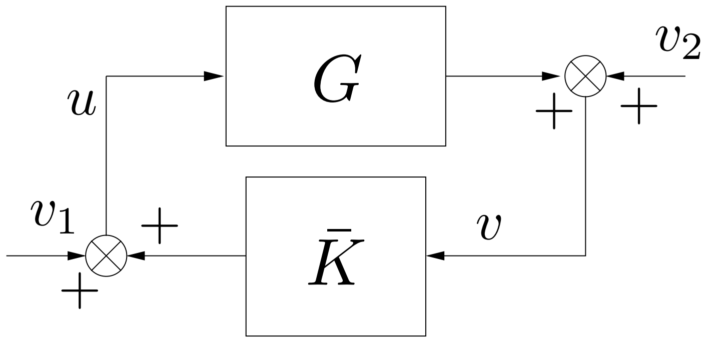
S'il n'y a pas de simplifications pôles/zéros instables entre G et $\bar{K}$ (i.e. tous les pôles instables dans G et $\bar{K}$ sont contenus dans les réalisations minimales de $G\bar{K}$ et $\bar{K}G$) alors l'interconnexion est stable de manière interne ssi une des quatre fonctions de transfert (S) est stable

Pour une interconnexion stable de manière interne :

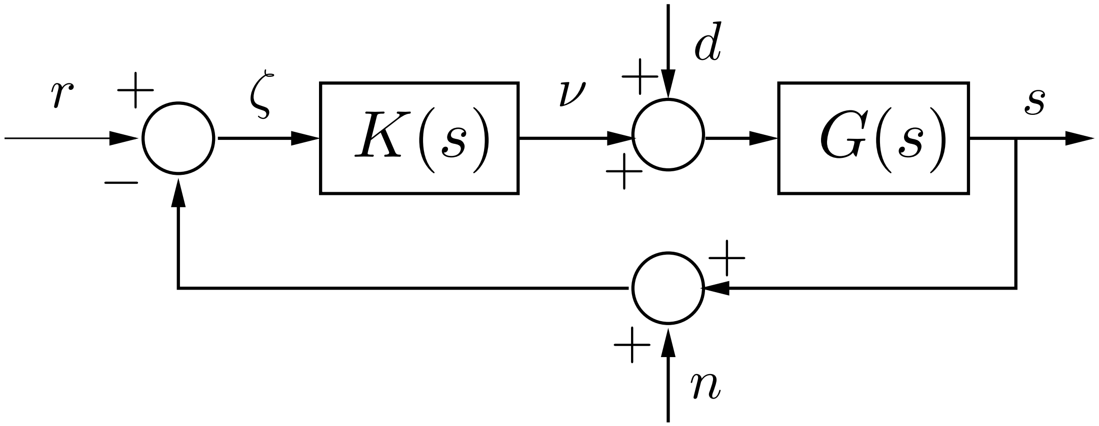
1- Si G a un zéro instable z_0 alors $L_y = G\bar{K}$, T_y, S_yG, L_u et T_u ont un zéro instable en z_0

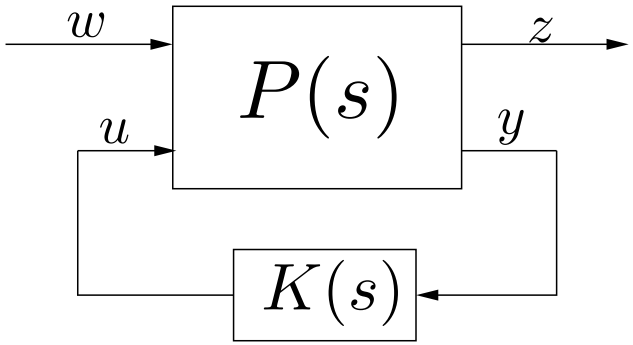
2- Si G a un pôle instable en p_0 alors

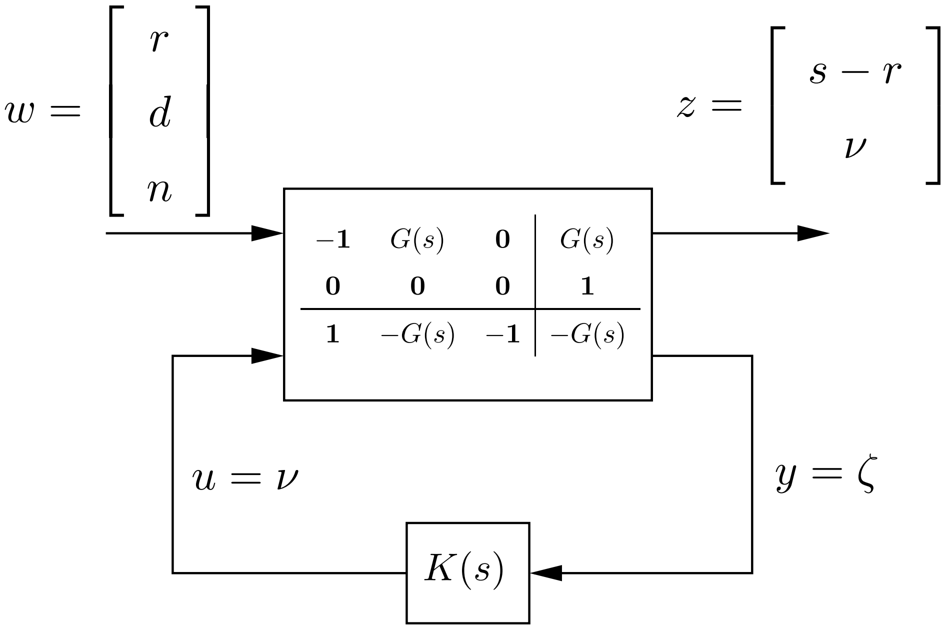
- L_y, L_u ont un pôle instable en p_0
- S_y, $\bar{K}S_y$ et S_u ont un zéro instable en p_0



Exemple de l'asservissement à 1 degré de liberté



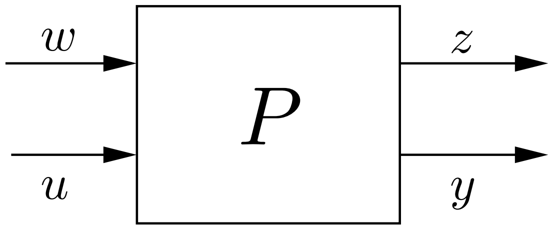




- w : entrées exogènes de perturbation
- z : sorties exogènes à contrôler
- u : signaux de commande
- y : signaux de mesures
- $P(s)$: modèle généralisé (augmenté)
- $K(s)$: correcteur généralisé (augmenté)

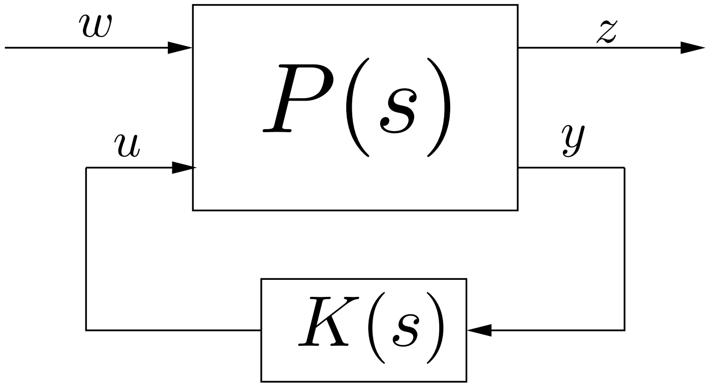
Algèbre du schéma standard

Boucle ouverte nominale :



$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

Modèle d'analyse nominale : boucle fermée nominale : $\mathbf{1} - P_{22}K(s)$ inversible



$$\begin{aligned} z &= \mathcal{L}_l(K, P)w \\ &= \boxed{(P_{11} + P_{12}K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{21})w} \end{aligned}$$

Notation : $\mathcal{L}_l(K, P)$ est la transformation fractionnaire linéaire ($\mathcal{LFT}$) inférieure

❶ Modèle généralisé

- Etablir une représentation schéma-bloc du problème à traiter
- Identifier les signaux w, z, u, y
- Construire P en ouvrant les boucles en entrée et sortie du correcteur

❷ Calcul de P connaissant $N(K)$

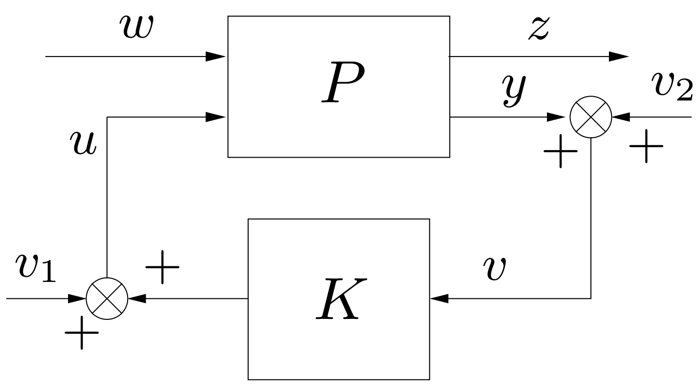
- Mettre $K = 0$ dans N afin d'obtenir P_{11}
- Définir

$$Q = N(K) - P_{11}$$

et réécrire Q afin de faire apparaître un facteur commun

$$R = K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}$$

- $Q = P_{12}RP_{21}$



$$\begin{bmatrix} z \\ \hline v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} P_{11} & P_{12} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} & -K \\ -P_{12} & -P_{22} & \mathbf{1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} w \\ \hline u \\ v \end{bmatrix}$$

L'interconnexion en B.F. est donnée par :

$$\begin{bmatrix} z & u & v \end{bmatrix}' = P_{bf}(s) \begin{bmatrix} w & v_1 & v_2 \end{bmatrix}'$$

$$P_{bf}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} P_{11} + P_{12}K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{21} & P_{12}(\mathbf{1} - KP_{22})^{-1} & P_{12}K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1} \\ \hline K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{21} & (\mathbf{1} - KP_{22})^{-1} & K(\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1} \\ (\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{21} & (\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1}P_{22} & (\mathbf{1} - P_{22}K)^{-1} \end{array}\right]$$

❒ **Lemme 6** :

L'interconnexion est stable de manière interne ssi elle est bien posée et la matrice de transfert $P_{bf}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$

Soit le système $G(s) = \dfrac{10}{(5s+1)(0.5s+1)^2}$ de représentation d'état :

$$A_G = \begin{bmatrix} -0.115 & 0.294 & -0.109 \\ -0.294 & -1.081 & 1.004 \\ -0.10 & -1.004 & -3.004 \end{bmatrix} \quad B_G = \begin{bmatrix} -1.15 \\ -1.27 \\ -0.55 \end{bmatrix} \quad C_G = \begin{bmatrix} -1.145 & 1.27 & 0.55 \end{bmatrix}$$

et le correcteur :

$$K(s) = \frac{s+1}{(0.05s+1)(2s+1)}$$

de représentation d'état :

$$A_K = \begin{bmatrix} -9.442 & 9.717 \\ 9.717 & -11.058 \end{bmatrix} \quad B_K = \begin{bmatrix} 2.486 \\ -1.954 \end{bmatrix} \quad C_K = \begin{bmatrix} 2.487 & -1.954 \end{bmatrix}$$

```
>> G=tf([10],conv([5 1],conv([0.5 1],[0.5 1])));
>> K=tf([1 1],conv([0.05 1],[2 1]));
>> systemnames='G';
>> inputvar='[r;d;n;u]';
>> outputvar='[G-r;u;r-n-G]';
>> input_to_G='[u+d]';
>> sysoutname='P';cleanopsysic='yes';
>> sysic;
>>N=feedback(P,K,4,3,1);Npz=zpk(N);
ans =
 -19.9878
  -0.2326 + 1.1023i
  -0.2326 - 1.1023i
  -3.1434
  -1.1035
```