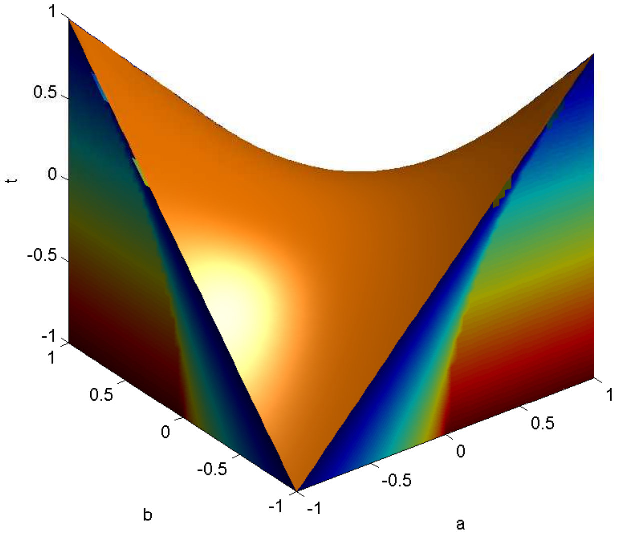
Analyse et synthèse robustes des systèmes linéaires

Cours 2

Norme de systèmes et analyse fréquentielle multivariable



Motivation : afin d'évaluer à l'aide d'un nombre unique une mesure globale de la "taille" d'un vecteur, d'une matrice, d'un signal ou d'un système

▼ **Définition 1** *norme*

Une norme est une fonction $\|.\|$ *définie sur un espace vectoriel* E, $||e|| \; : \; E \rightarrow \; \mathbb{R}^+$ *vérifiant les propriétés axiomatiques :*

1- $\forall \; e \in E \;\; : \;\; ||e|| \geq 0$

2- $||e|| = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; e = 0$

3- $\forall \; \alpha \in \mathbb{R}, \; \forall \; e \in E, \; ||\alpha e|| = |\alpha|.||e||$

4- $\forall \; e_1, \; e_2 \in E, \;\; ||e_1 + e_2|| \leq ||e_1|| + ||e_2||$

Nota : vecteur, matrice (norme spatiale, dimension finie) signal temporel, système linéaire (norme temporelle, dimension infinie)

Normes des vecteurs : $E = \mathbb{C}^n$

$$||e||_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |e_i|^p \right)^{1/p} & \text{pour} \quad 1 \leq p < \infty \\ \\ \displaystyle\max_{1 \leq i \leq n} |e_i| \quad \text{pour} \quad p = \infty \end{cases}$$

Exemple : $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}'$

$$||e||_1 = 4 \text{ (taxi cab norm)}$$

$$||e||_2 = \sqrt{10} \text{ (norme Euclidienne)}$$

$$||e||_\infty = 3$$

$>> \mathbf{norm}(\mathbf{e}, \mathbf{p})$

▼ Définition 2 : *condition de consistence*

$||A||$ est une norme matricielle si elle vérifie en plus des propriétés élémentaires la propriété de sous-multiplicativité :

$$\boxed{||AB|| \leq ||A||.||B||}$$

Exemples : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$||A||_{\text{sum}} = \sum_{i,j} |a_{ij}| = 9 \qquad ||A||_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{trace}(A^H A)} = \sqrt{41}$$

$$||A||_{\max} = \max_{i,j} |a_{ij}| = 6 \quad \text{norme généralisée}$$

$$\text{c.e. } A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \|A.B\|_{\max} = 2 > \|A\|_{\max}.\|B\|_{\max} = 1$$

Norme des matrices (suite)

▼ **Définition 3** : *norme induite*

$$||A||_{ip} = \max_{e\neq 0} \frac{||Ae||_p}{||e||_p} = \max_{||e||_p \leq 1} ||Ae||_p = \max_{||e||_p = 1} ||Ae||_p$$

Exemples : $>> \ \mathbf{A = [1 \ \ -2; 0 \ 6]; norm(A, p)}$

$$||A||_{i1} = \max_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right) = 8$$

$$||A||_{i\infty} = \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right) = 6$$

$$||A||_{i2} = \overline{\sigma}(A) = \sqrt{\max_i \left| \lambda_i(A^H A) \right|} = 6.3326 \qquad \text{val. singulière max. ou norme spectrale}$$

Nota : $\sup_{e\neq 0} \frac{\|Ae\|_p}{\|e\|_p} = \max_{e\neq 0} \frac{\|Ae\|_p}{\|e\|_p} = \max_{\|e\|_p = 1} \|Ae\|_p$ car $\{x \ : \ \|x\|_p \leq 1\}$ est *compact*

et $\| \bullet \|_p$ est *continue*, $\max_{e\neq 0} \frac{\|Ae\|_p}{\|e\|_p} = \max_{\|f\|_p = 1, \lambda \neq 0} \frac{\|A\lambda f\|_p}{\|\lambda f\|_p} = \max_{\|f\|_p = 1} \|Af\|_p$

▼ **Définition 4** : *Décomposition en valeurs singulières*

$A \in \mathbb{C}^{l\times m}$ *peut être factorisée à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières :*

$$A = U\Sigma V^H \qquad U \in \mathbb{C}^{l\times l} \quad U^H = U^{-1} \quad V \in \mathbb{C}^{m\times m} \quad V^H = V^{-1}$$

Σ *est formée par une matrice diagonale des valeurs singulières* σ_i *dans l'ordre décroissant*

- $l \geq m$:

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c} \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_q) \\ \hline \mathbf{0}_{l-m\times m} \end{array}\right] \qquad \sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^H)} = \sqrt{\lambda_i(A^H A)}$$

- $l \leq m$:

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_q) & \mathbf{0}_{l\times m-l} \end{array}\right]$$

avec $\overline{\sigma} = \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_q = \underline{\sigma} > 0$ *et* $\min(l, m) \geq \mathrm{rang}(A) = q$,

```
>>A=[-1 0 2;1 0 -2;0 1 -1;0 0 1];[U,S,V] = SVD(A)
U =
   -0.6485    0.2324   -0.1594    0.7071
    0.6485   -0.2324    0.1594    0.7071
    0.2941    0.9398    0.1739         0
   -0.2690   -0.0932    0.9586    0.0000
S =
    3.4259         0         0
         0    1.0536         0
         0         0    0.3918
         0         0         0
V =
    0.3786   -0.4412    0.8137
    0.0858    0.8920    0.4437
   -0.9216   -0.0982    0.3756
```

Un signal $f(t)$ est une fonction du temps, continue par morceaux,
$f \ : \ [0\ ,\ +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$

1- Norme 1 ($\mathcal{L}_1[0\ ,\ +\infty)$) : $\boxed{||f(t)||_1 = \int_0^\infty \sum_{i=1}^n |f_i(t)| dt = \sum_{i=1}^n ||f_i(t)||_1}$

Interprétation : représente la consommation d'une ressource

2- Norme 2 ($\mathcal{L}_2[0\ ,\ +\infty)$) : $\boxed{||f(t)||_2^2 = \int_0^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t)^2 dt = \sum_{i=1}^n ||f_i(t)||_2^2}$

Interprétation : son carré représente l'énergie du signal

3- Norme ∞ ($\mathcal{L}_\infty[0\ ,\ +\infty)$) : $\boxed{||f(t)||_\infty = \sup_t \left[\max_{1 \leq i \leq n} |f_i(t)| \right] = \max_{1 \leq i \leq n} ||f_i||_\infty}$

Interprétation : pire des cas

$$f(t) = 1 - e^{-t} \quad t \geq 0 \qquad ||f(t)||_\infty = 1$$

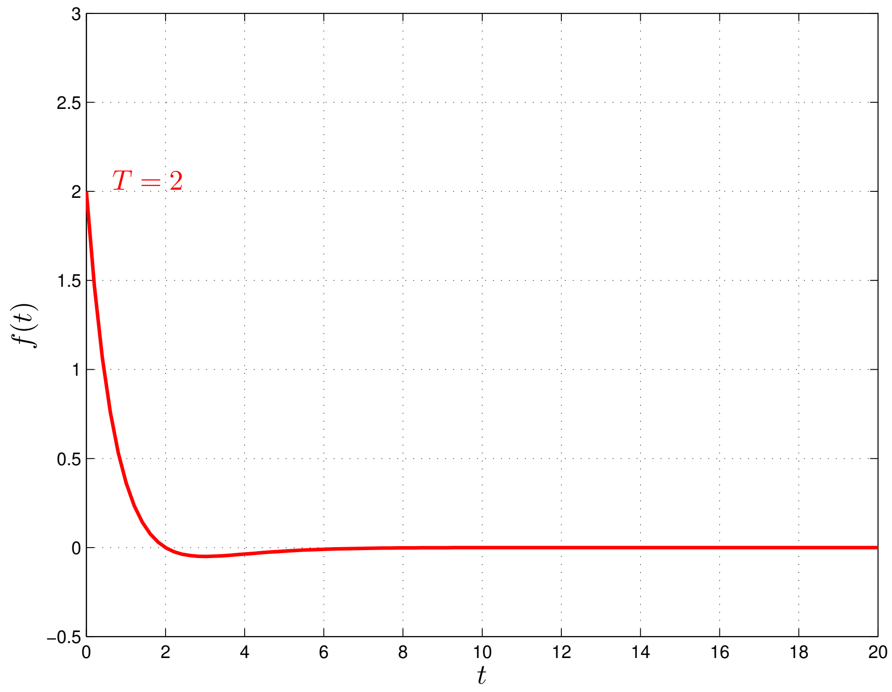
Soit le signal $f(t) = (T - t)e^{-t}$,

$T >$ Lambert $W(1/e)$

La fonction de Lambert :

$W = h^{-1}$

$h \ : \ x \rightarrow xe^{x}$ sur $[-1/e \ , \ +\infty[$



- $||f(t)||_1 = 2e^{-T} + T - 1$
- $||f(t)||_2 = \dfrac{T^2}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{T}{2}$
- $||f(t)||_\infty = T$

$\mathcal{H}_2$: espace de Hardy des fonctions $\hat{f}(s),\ s \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n\times m}$ analytiques dans $Re(s) > 0$

$$||\hat{f}||_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{trace}\left[\hat{f}^H(j\omega)\hat{f}(j\omega)\right] d\omega\right)^{1/2} < \infty$$

❒ **Théorème 1** : *Paley-Wiener*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_2[0\ ,\ +\infty) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathcal{H}_2 \\ f(t) & \longrightarrow & \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \end{array}$$

❒ **Théorème 2** : *Parseval*

$$||f||_2 = ||\hat{f}||_2$$

$\mathcal{RH}_2$: sous-ensemble des fonctions rationnelles strictement propres et stables

Exemples :

$$\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \in \mathcal{RH}_2 \qquad \frac{s+1}{(s+2)(s-3)} \notin \mathcal{RH}_2 \qquad \frac{(s-1)}{(s+1)} \notin \mathcal{RH}_2$$

$\mathcal{H}_\infty$: espace de Hardy des fonctions $\hat{f}(s)$, $s \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n\times m}$ analytiques dans $Re(s) > 0$

$$||\hat{f}||_\infty = \sup_{Re(s)>0} \overline{\sigma}(\hat{f}(s)) = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \overline{\sigma}(\hat{f}(j\omega)) < \infty$$

Nota : $\mathcal{H}_\infty$ est un espace de Banach et n'est pas un espace de Hilbert. On ne peut définir de notion de produit scalaire

$\mathcal{RH}_\infty$: sous-ensemble des fonctions rationnelles propres et stables

Exemple :

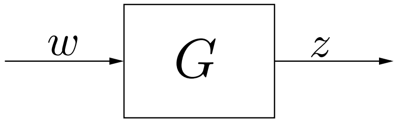
$$\frac{s+1}{(s+2)(s-3)} \notin \mathcal{RH}_\infty \qquad \frac{(s-1)}{(s+1)} \in \mathcal{RH}_\infty$$

$$\begin{bmatrix} s/(s+3) \\ 1/(s-1) \end{bmatrix} \notin \mathcal{RH}_\infty \qquad \begin{bmatrix} 1 & (s-1)/(s+1) & 1/(s+2) \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty$$

Motivation : Afin d'évaluer la performance d'un système, étant donnée l'information sur les signaux d'entrée $w(t)$, quelle grandeur peut prendre le vecteur de sortie $z(t)$?

Quels sont les signaux d'entrée w considérés ? et qu'entend-on par taille ?

Quelques ensembles de signaux :



- $w(t)$ est constitué d'impulsions $\delta(t)$
- $w(t) = \sin(\omega t)$ pour ω fixée
- $w(t)$ est d'énergie finie $||w(t)||_2 \leq 1$
- $w(t)$ est borné en amplitude $||w(t)||_\infty \leq 1$
- $w(t)$ est un bruit blanc de moyenne nulle

La taille d'un signal (système) est précisée par l'utilisation de normes des signaux (systèmes)

Norme des systèmes : la norme $\mathcal{H}_2$

Soit $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$ fonction de transfert stable, strictement propre, causale :

Monovariable :

$$||G||_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \qquad ||G||_2 = ||g||_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Multivariable :

$$||G||_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{trace}\left[G^H(j\omega) G(j\omega) \right] d\omega \qquad ||G||_2 = \left(\int_{0}^{\infty} \mathrm{trace}\left[g'(t) g(t) \right] dt \right)^{1/2}$$

Interprétations :

- L'énergie du signal de sortie en réponse à un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance 1
- La norme $\mathcal{L}_2$ de la réponse impulsionnelle du système à une entrée impulsionnelle sur chaque entrée

❒ **Lemme 1** *:*

La norme $\mathcal{H}_2$ d'un système stable est finie ssi il est strictement propre et n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire

$G(s) \simeq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & \mathbf{0} \end{array}\right]$ Equations de Lyapunov : $\begin{array}{l} AW_c + W_cA' + BB' = \mathbf{0} \\ A'W_o + W_oA + C'C = \mathbf{0} \end{array}$

$$W_c = \int_0^\infty e^{At}BB'e^{A't}dt \quad \text{grammien de commandabilité}$$

$$W_o = \int_0^\infty e^{A't}C'Ce^{At}dt \quad \text{grammien d'observabilité}$$

$$||G||_2^2 = \text{trace}\,[CW_cC'] = \text{trace}\,[B'W_oB]$$

```
>> A=[-1 2 0;0 -2 1;0 0 -3];B=[0 1;1 0; 1 1];C=[1 0 -1];D=[0 0];
>> sys=ss(A,B,C,D);
>> h2=norm(sys,2)
h2 =
    0.9129
```

```
>> A=[-1 2 0;0 -2 1;0 0 -3];B=[0 1;1 0; 1 1];C=[1 0 -1];
>> Wc=lyap(A,B*B')
Wc =
    1.2667    0.3833    0.3833
    0.3833    0.3833    0.2667
    0.3833    0.2667    0.3333
>> h2=sqrt(trace(C*Wc*C'))
h2 =
    0.9129
```

Soit $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$ fonction de transfert stable, propre, causale :

Monovariable :

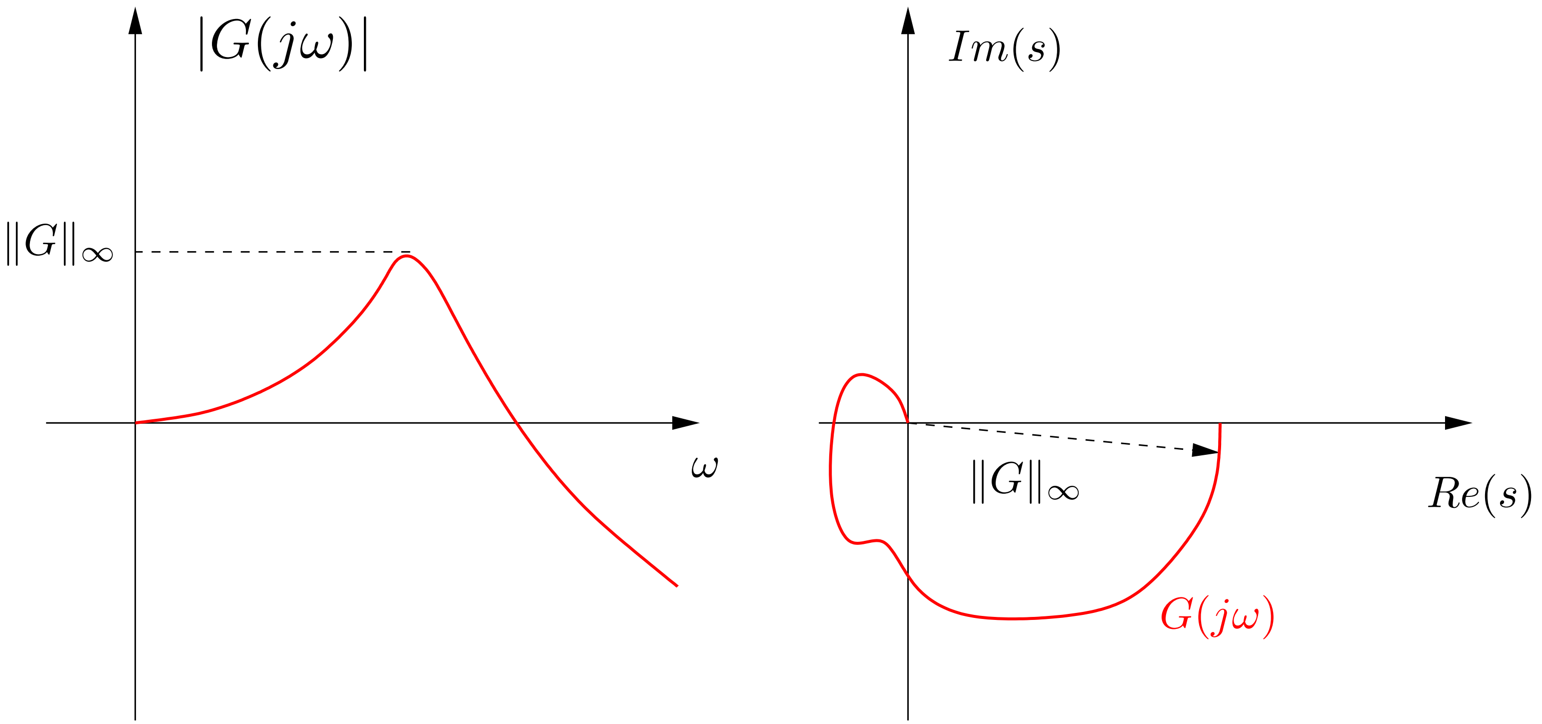
$$||G||_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)| \qquad ||G||_\infty = \sup_{w(t)\neq 0} \frac{||z(t)||_2}{||w(t)||_2}$$

Multivariable :

$$||G||_\infty = \sup_\omega \overline{\sigma}(G(j\omega)) \qquad ||G||_\infty = \sup_{w(t)\neq 0} \frac{||z(t)||_2}{||w(t)||_2}$$

Interprétations :

- La valeur maximale de l'amplitude dans Bode ou la distance de l'origine au point le plus éloigné du lieu de transfert dans Nyquist (monovariable)
- La norme induite $\mathcal{L}_2$



Plan de Bode

Plan de Nyquist

Soit $G(s) \simeq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$, $R(\gamma) = D'D - \gamma^2\mathbf{1}$

❒ **Lemme 2** *:*

La norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système stable est finie ssi il n'a pas de pôles sur l'axe imaginaire

La matrice Hamiltonienne :

$$H_\gamma = \left[\begin{array}{cc} A - BR^{-1}(\gamma)D'C & -BR^{-1}(\gamma)B' \\ -C'(\mathbf{1} - DR^{-1}(\gamma)D')C & -A' + C'DR^{-1}(\gamma)B' \end{array}\right]$$

❒ **Théorème 3** *:*

Pour $\gamma > \overline{\sigma}(D)$, $||G||_\infty < \gamma$ ssi H_γ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire

$$\Lambda(H_\gamma) \cap \mathbb{C}^0 = \emptyset$$

γ-itérations :

- On choisit $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$ tel que

$$\boxed{\gamma_{min} > \overline{\sigma}(D)}$$

- Pour $\gamma = 1/2(\gamma_{min} + \gamma_{max})$, on forme H_γ et on calcule ses valeurs propres.
  - Si les valeurs propres ne sont pas sur l'axe imaginaire :

    On diminue γ en choisissant un nouvel intervalle $[\gamma_{min}, \gamma]$
  - Si les valeurs propres sont sur l'axe imaginaire :

    On augmente γ en choisissant un nouvel intervalle $[\gamma, \gamma_{max}]$
- On répète ce processus jusqu'à obtenir une approximation de

$$\boxed{\gamma_\infty = ||G||_\infty}$$

Soit

$$G(s) = \frac{1}{s+a} \qquad\qquad a > 0$$

Une réalisation minimale d'état est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + u \\ y &= x \end{aligned}$$

Les équations de Lyapunov sont :

$$-2aW_c + 1 = 0 \quad -2aW_o + 1 = 0$$

d'où les grammiens et la norme $\mathcal{H}_2$:

$$W_c = W_o = \frac{1}{2a} \qquad\qquad \boxed{||G||_2 = \frac{1}{\sqrt{2a}}}$$

La matrice Hamiltonnienne :

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} -a & \gamma^{-2} \\ -1 & a \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (1/\gamma^2 - a^2)$$

Les valeurs propres :

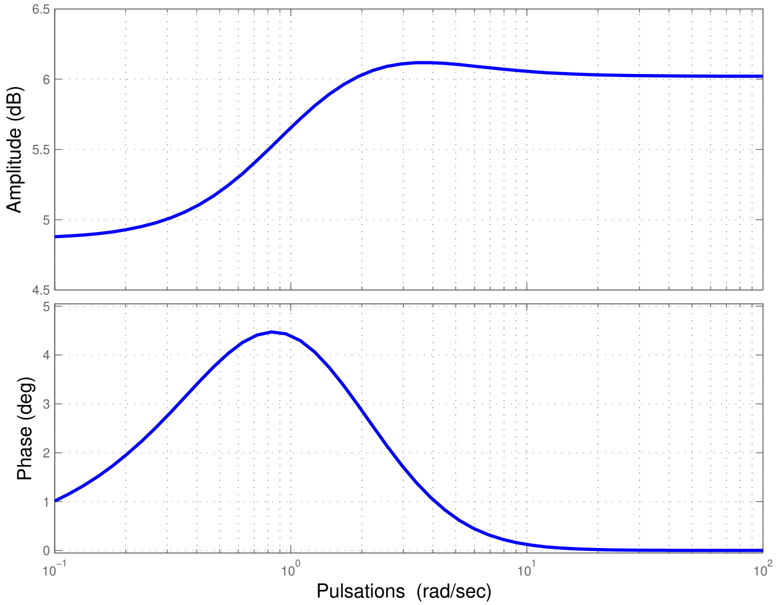
$$\gamma > \frac{1}{a} \quad \lambda = \pm\sqrt{a^2 - 1/\gamma^2} \quad \gamma < \frac{1}{a} \quad \lambda = \pm j\sqrt{1/\gamma^2 - a^2}$$

La norme $\mathcal{H}_\infty$:

$$\boxed{||G||_\infty = \frac{1}{a}}$$

Norme des systèmes : exemple (suite)

```
>> A=[-1 0 -2;0 -1 1;0 0 -4];B=[0;0;1];C=[1 1 0];D=2;
>> sys=ss(A,B,C,D);
>> [hinf,fpeak]=norm(sys,inf,1e-4)
hinf =
    2.0225
fpeak =
    3.9441
```



Soit le modèle entrée-sortie multivariable $y = G(s)e$ où $y \in \mathbb{R}^r$ et $e \in \mathbb{R}^m$.

- On applique une sinusoïde $e_j(t) = e_{j0}\sin(\omega t + \alpha_j)$ sur l'entrée j alors $y_i(t) = y_{i0}\sin(\omega t + \beta_i)$

$$\boxed{\frac{y_{i0}}{e_{j0}} = |g_{ij}(j\omega)| \quad \beta_i - \alpha_j = \arg\left[g_{ij}(j\omega)\right]}$$

- On applique simultanément sur chaque entrée des signaux sinusoïdaux de même fréquence ω + principe de superposition

$$y_i(\omega) = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(j\omega)e_j(\omega) \quad y(\omega) = G(j\omega)e(\omega)$$

Nota : $e_j(\omega) = e_{0j}e^{j\alpha_j}$

Analyse fréquentielle multivariable

- Gain des systèmes SISO :

$$\frac{|y(\omega)|}{|e(\omega)|} = \frac{|G(j\omega)e(\omega)|}{|e(\omega)|} = f(\omega) = |G(j\omega)|$$

- Gain des systèmes MIMO :

$$\frac{||y(\omega)||_2}{||e(\omega)||_2} = \frac{||G(j\omega)e(\omega)||_2}{||e(\omega)||_2} = f(\omega, e)$$

Nota :

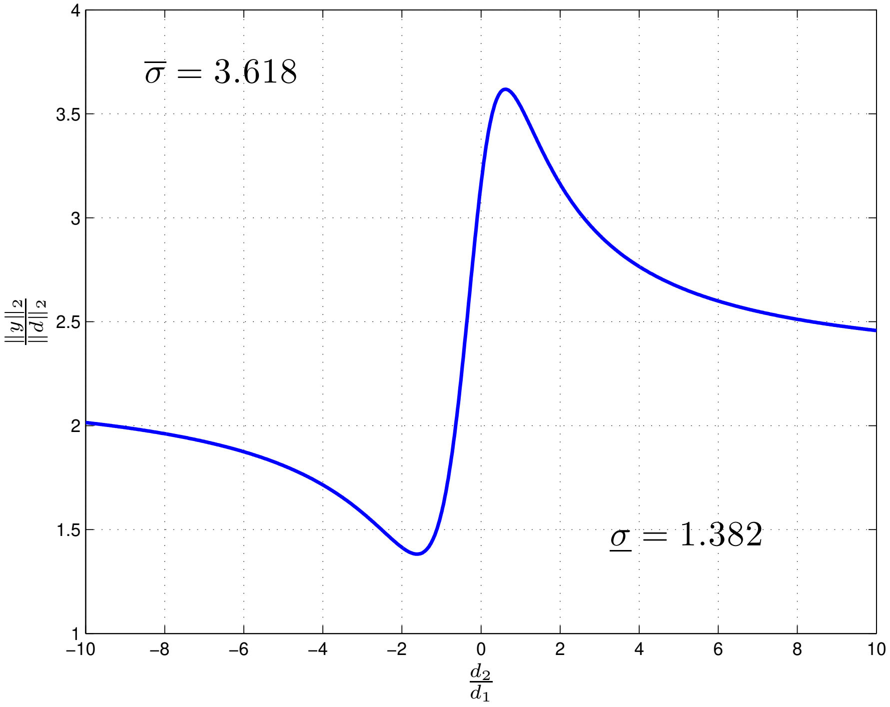
- $f(\omega)$ est indépendante de $||e(\omega)||$ mais dépend de la direction d'entrée e
- La notion de phase pour les systèmes multivariables est complexe à définir et ne sera pas abordée dans ce cours

Exemple : $G = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ||y_1||_2 = \sqrt{10}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad ||y_2||_2 = \sqrt{5}$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \end{bmatrix} \qquad ||y_3||_2 = 1.5811$$



▼ **Définition 5** *:*

- *La valeur maximale du gain quand l'entrée varie est la valeur singulière maximale de G :*

$$\max_{d \neq 0} \frac{||Gd||_2}{||d||_2} = \max_{||d||_2=1} ||Gd||_2 = \overline{\sigma}(G)$$

- *La valeur minimale du gain quand l'entrée varie est la valeur singulière minimale de G :*

$$\min_{d \neq 0} \frac{||Gd||_2}{||d||_2} = \min_{||d||_2=1} ||Gd||_2 = \underline{\sigma}(G)$$

Nota : le gain est indépendant de l'amplitude d'entrée

Soit $G(j\omega) \in \mathbb{C}^{r\times m}$ une matrice de réponse fréquentielle telle que sa SVD pour ω fixée est

$$G(j\omega) = U(\omega)\Sigma(\omega)V^H(\omega) \quad \Sigma(\omega) = \left[\begin{array}{ccc} \overline{\sigma}(\omega) & & \\ & \ddots & \mathbf{0} \\ & & \underline{\sigma}(\omega) \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

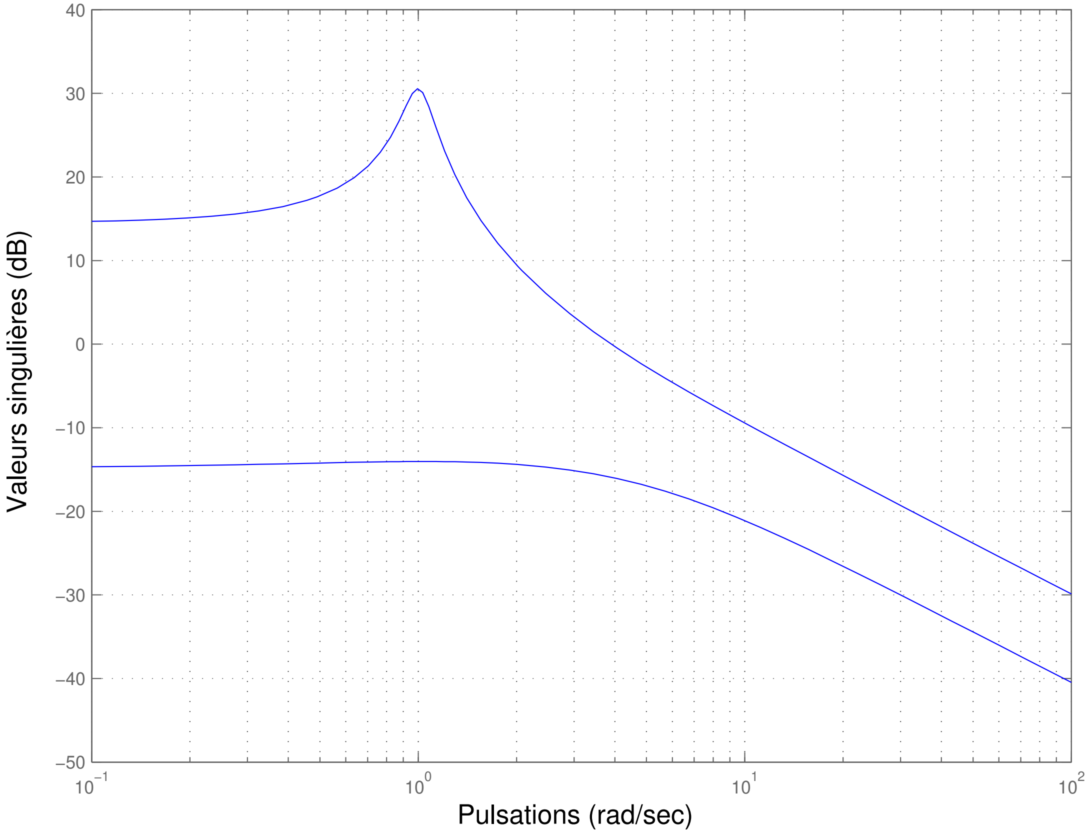
▼ **Définition 6** *:*

Les valeurs singulières sont appelées valeurs principales ou gains principaux. De plus, on définit les directions d'entrée v_j et de sortie u_i :

$$V = [v_i]_{i=1,\cdots,m} \quad U = [u_j]_{j=1,\cdots r} \quad G(j\omega)V = U\Sigma(\omega) \quad Gv_i = \sigma_i u_i \quad \sigma_i = ||Gv_i||_2$$

Nota : la ième valeur singulière donne le gain dans la direction i.

Exemple : modèle deux entrées - deux sorties




```
≫ A=[-0.1+j 1 -1 ;0 -0.1-j 2 ;0 0 -6] ;
≫ B=[0 1 ; 1 0 ; 1 1] ;
≫ C=[3 1 0 ;-1 0 1] ;
≫ D=[0 0 ;0 0] ;
≫ sys=ss(A,B,C,D) ;
≫ sigma(sys,0.1,100)
```