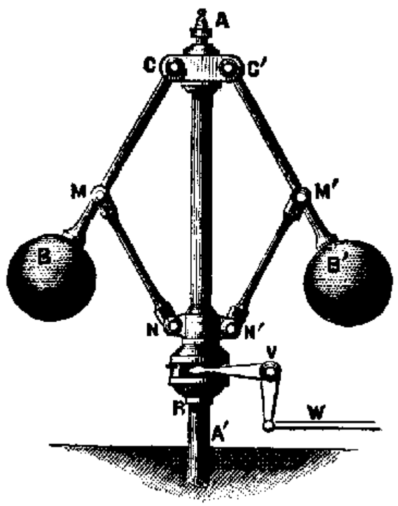
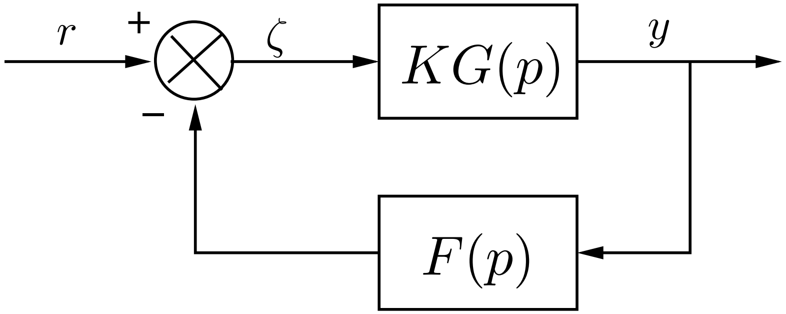
Représentation et analyse des systèmes linéaires

PC 8

Analyse par le lieu des racines





➥ Boucle ouverte :

$$H_{b.o.}(p) = KG(p)F(p)$$

➥ Boucle fermée :

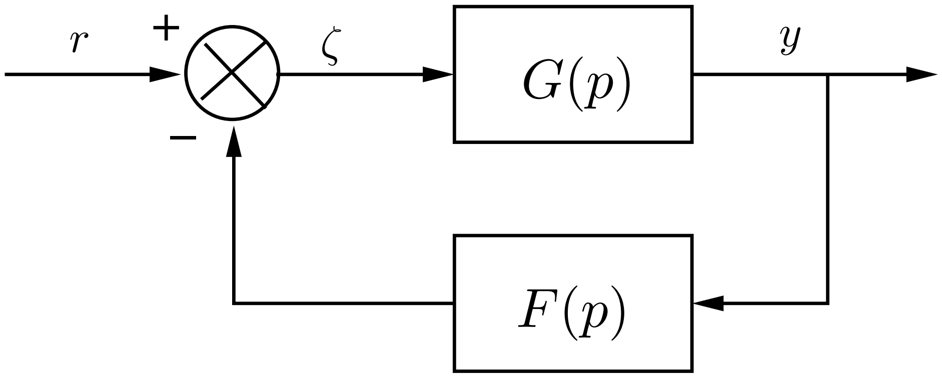
$$H_{b.f.} = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)F(p)}$$

➥ Equation caractéristique :

$$1 + KG(p)F(p) = 0$$

✍ **Remarques 1** :

Quand K varie, les pôles en boucle fermée varient : le lieu des racines en boucle fermée quand K varie est le lieu d'Evans



- **Boucle fermée :**

$$H_{b.f.} = \frac{G(p)}{1 + F(p)G(p)}$$

- **Equation caractéristique :**

$$F(p)G(p) = -1$$

- **Condition des angles :**

$$\mathrm{Arg}[G(p)F(p)] = \pm 180^o \ (2k+1)$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots$$

- **Condition d'amplitude :**

$$|G(p)F(p)| = 1$$

➥ Factorisation de l'équation caractéristique :

$$1 + \frac{K(p+z_1)(\cdots)(p+z_m)}{(p+p_1)(\cdots)(p+p_n)} = 0$$

➥ Rappels de mesure des angles :

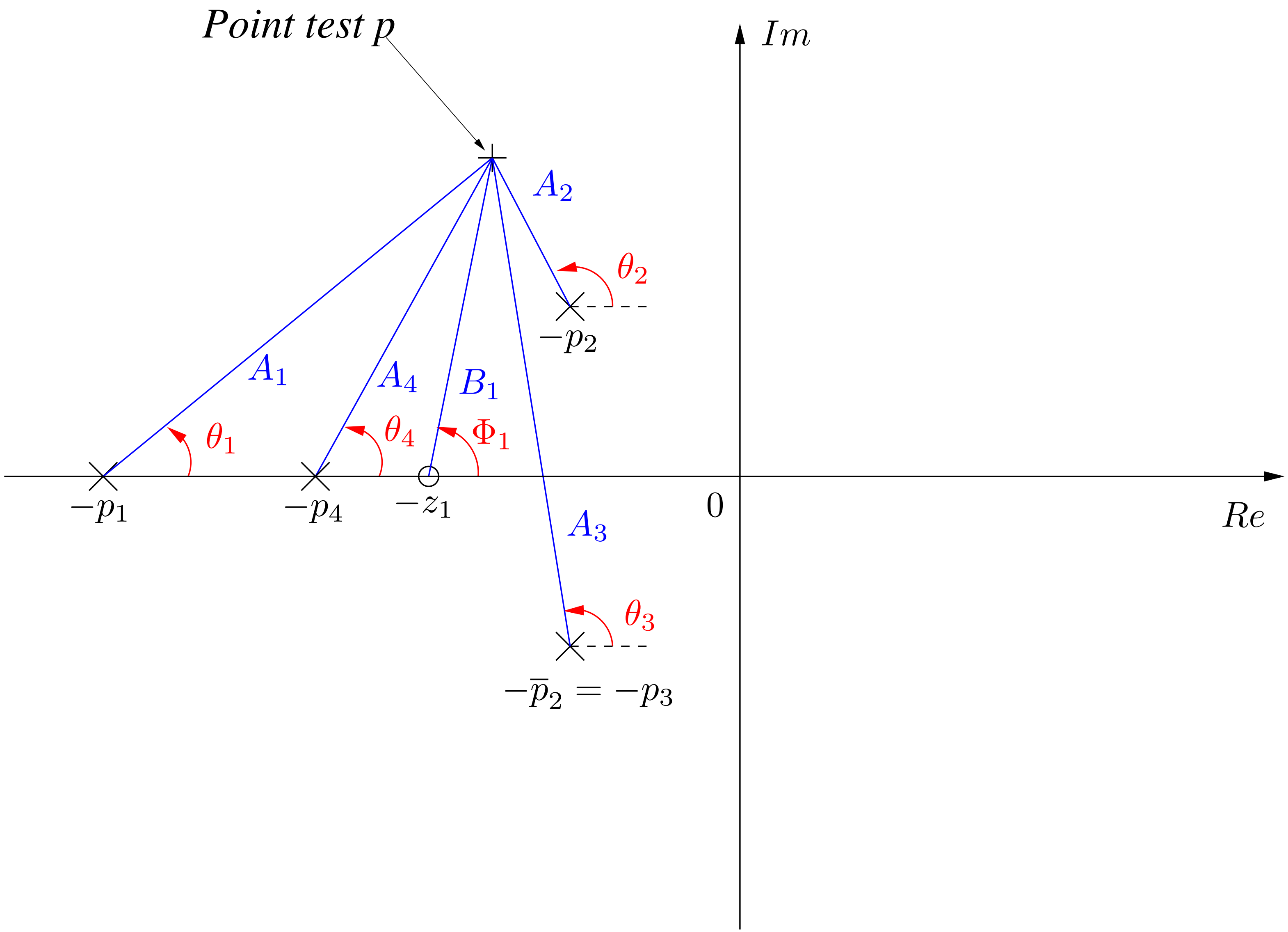
$$G(p)F(p) = \frac{K(p+z_1)}{(p+p_1)(p+p_2)(p+p_3)(p+p_4)}$$

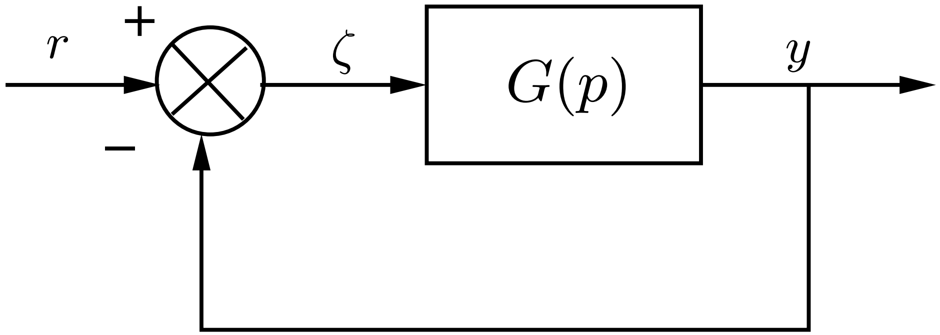
➥ Condition des angles :

$$\mathrm{Arg}[G(p)F(p)] = \Phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = \pm 180^o$$

➥ Condition d'amplitude :

$$|G(p)F(p)| = \frac{KB_1}{A_1A_2A_3A_4} = 1$$


Point test p
Im
A_2
θ_2
$-p_2$
A_1
A_4
B_1
θ_1
θ_4
Φ_1
$-p_1$
$-p_4$
$-z_1$
0
Re
A_3
θ_3
$-\overline{p}_2 = -p_3$



➥ Exemple 1 :

$$G_1(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)}$$

➥ Exemple 2 :

$$G_2(p) = \frac{K(p+2)}{p^2+2p+3}$$

➥ Etape 1 : factorisation de l'équation caractéristique

$$\boxed{1 + \frac{K(p+z_1)(\cdots)(p+z_m)}{(p+p_1)(\cdots)(p+p_n)} = 0}$$

- Exemple 1 :

$$G_1(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)}$$

- Exemple 2 :

$$G_2(p) = \frac{K(p+2)}{p^2+2p+3} = \frac{K(p+2)}{(p+1-j\sqrt{2})(p+1+j\sqrt{2})}$$

➥ Etape 2 : localisation des pôles et zéros de la boucle ouverte

- Points de départ :

$$\lim_{K \to 0} K\left[(p+z_1)(\cdots)(p+z_m)\right] + \left[(p+p_1)(\cdots)(p+p_n)\right]$$

- Points d'arrivée :

$$\lim_{K \to +\infty} K\left[(p+z_1)(\cdots)(p+z_m)\right] + \left[(p+p_1)(\cdots)(p+p_n)\right]$$

- $n-m$ branches infinies
- m branches finies

➥ Etape 3 : déterminer le lieu des racines appartenant à l'axe réel

Procédure 1 :

Pour chaque portion de l'axe réel à tester, prendre un point test

Si le nombre total de pôles et de zéros réels à droite de ce point test est impair alors ce point appartient au lieu des racines

Les pôles et zéros réels doivent être comptabilisés avec leur multiplicité

- Exemple 1 :
  les segments $]-\infty\ ,\ -2]$ et $[-1\ ,\ 0]$ appartiennent au lieu des racines
- Exemple 2 :
  le segment $]-\infty\ ,\ -2]$ appartient au lieu des racines

➥ Etape 4 : déterminer les asymptotes au lieu des racines

- Toutes les asymptotes ont un point d'intersection situé sur l'axe réel en :

$$\boxed{\sigma_a = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p\hat{o}les - \sum_{i=1}^{m} z\acute{e}ros}{n-m}}$$

- L'angle des asymptotes avec l'axe réel est donné par :

$$\boxed{\Phi_a = \frac{\pm 180^o\ (2k+1)}{n-m} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)}$$

- Exemple 1 :

$$\sigma_a = \frac{\sum\ p\hat{o}les}{n-m} = -1$$

$$\Phi_a = \pm 60^o\ (2k+1)$$

➥ Etape 5 : déterminer les points de départ et d'arrivée sur l'axe réel ainsi que les points de rencontre et d'éclatement

Résoudre l'équation algébrique :

$$\boxed{\frac{dK}{dp} = -\frac{D'(p)N(p) - N'(p)D(p)}{N^2(p)} = 0}$$

Procédure 2 *:*

1- Calculer l'équation algébrique

2- Déterminer les racines réelles et complexes de cette équation

3- Vérifier que les solutions précédentes appartiennent au lieu des racines

- Exemple 1 :

$$\frac{dK}{dp} = -3p^2 - 6p - 2 = 0 \qquad -1.5774 \quad , \quad -0.4226$$

- Exemple 2 :

$$\frac{dK}{dp} = -\frac{2(p+1)(p+2) - (p^2+2p+3)}{(p+2)^2} = 0 \qquad -0.2679 \quad , \quad -3.7321$$

✍ **Remarques 2** :

- *Ces points sont des racines multiples de l'équation caractéristique en boucle fermée et sont donc à tangente verticale sur l'axe réel*
- *Tous ces points vérifient la condition précédente mais toutes les solutions de cette équation ne sont pas nécessairement des points de rencontre ou d'éclatement*

➥ Etape 6 : déterminer les points d'intersection avec l'axe imaginaire

$$1 + G(j\omega)F(j\omega) = 0$$

Exemple 1 : à résoudre $K - j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega = 0$

$$K - 3\omega^2 = 0 \qquad K = 6$$

$$\omega(2 - \omega^2) = 0 \quad \omega = 0 \ ou \ \omega = \pm\sqrt{2}$$

Exemple 2 : à résoudre $K(2 + j\omega) + (-\omega^2 + 2j\omega + 3) = 0$

$$2K + 3 - \omega^2 = 0 \quad K = \frac{\omega^2 - 3}{2}$$

$$\omega(2 + K) = 0 \qquad \omega = 0 \ ou \ \omega^2 = -1$$

➥ Etape 7 : déterminer les angles de départ d'un pôle complexe et d'arrivée d'un zéro complexe

- Angle de départ d'un pôle complexe :

$$\Theta = 180^o - \sum_i \theta_i + \sum_j \Phi_j$$

- Angle d'arrivée sur un zéro complexe :

$$\Phi = 180^o - \sum_i \Phi_i + \sum_j \theta_j$$

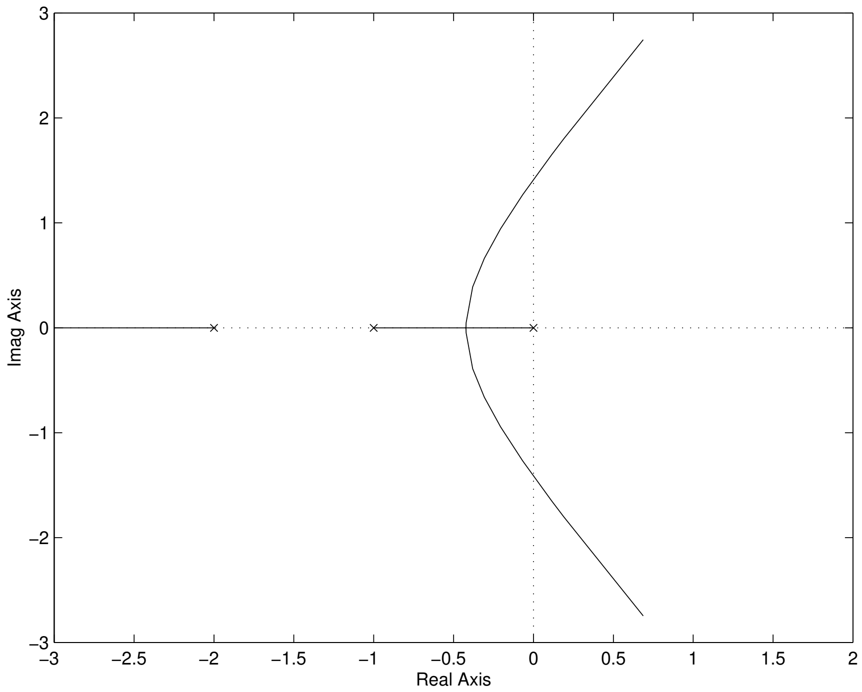
Exemple 2 :

$$\Theta_1 = 180^o - 90^o + \mathrm{atan}(\sqrt{2}) = 180^o - 90^o + 55^o = 145^o$$

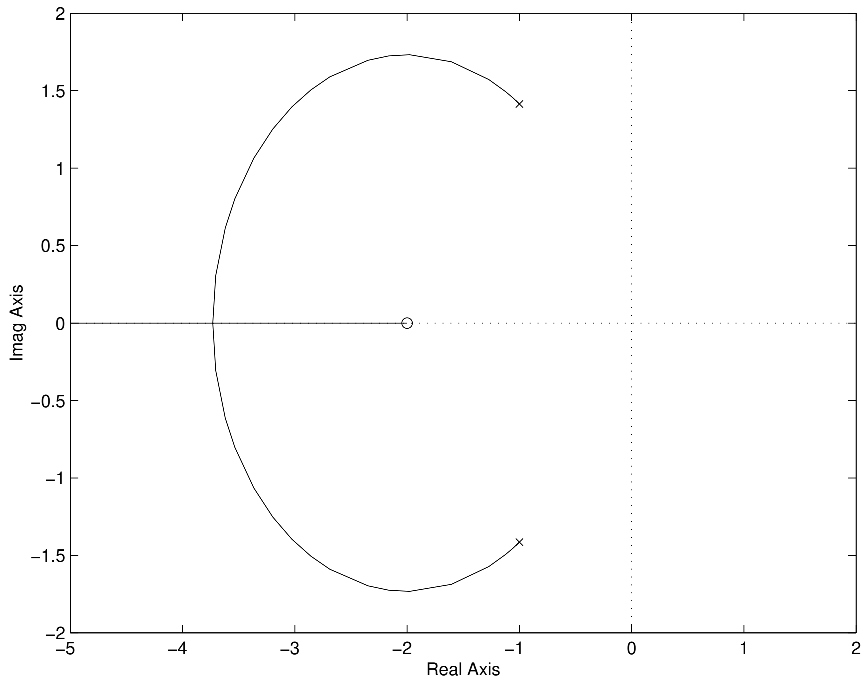
$$\Theta_2 = 35^o$$

➥ Etape 8 : tracé

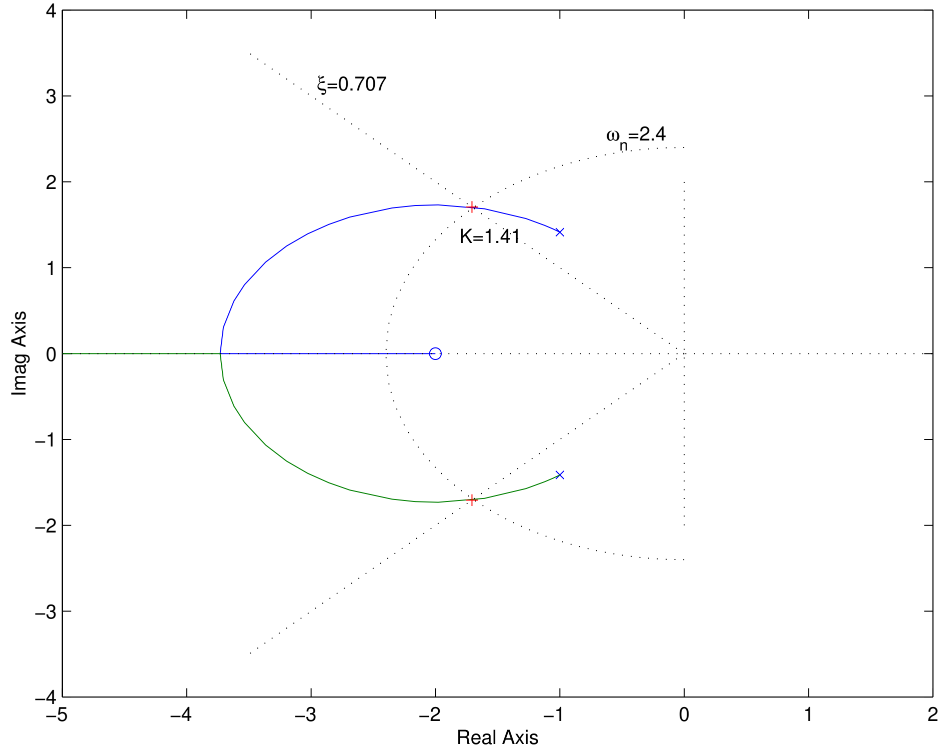
Exemple 1 :



Exemple 2 :



Réglage du gain



- Exemple 2 :

Amortissement :

$$\cos(\Psi) = 0.707 \quad \Psi = 45^o$$

Pôles : $-1.7061 \pm \; j1.7061$

Gain correspondant :

$$K = \left.\frac{|p^2 + 2p + 3|}{|p+2|}\right|_{p=-1.7061+j1.7061} = 1.4122$$

$$KG(p) = \frac{K(p+2)}{p(p-1)(p^2+6p+36)}$$

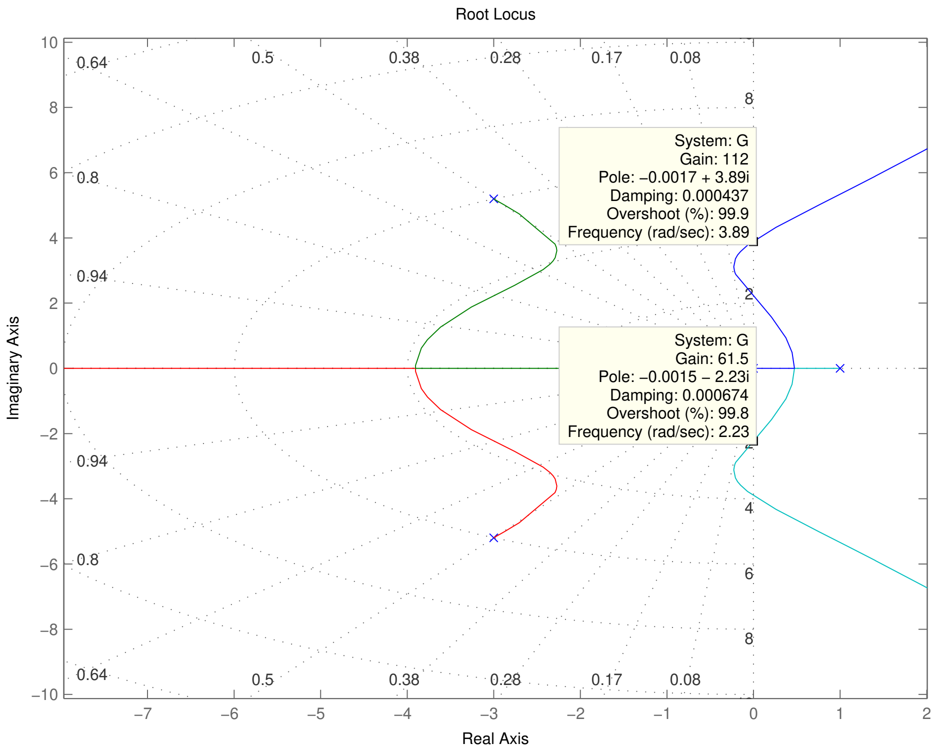
$$1 + \frac{K(j\omega+2)}{j\omega(j\omega-1)(36-\omega^2+6j\omega)} = 0$$

$$2K + \omega^4 - 30\omega^2 = 0$$

$$\omega(K - 36 - 5\omega^2) = 0$$

$$K_1 = 86 - 5\sqrt{28} \qquad \omega_1 = \sqrt{10 - \sqrt{28}} \text{ rad/s}$$

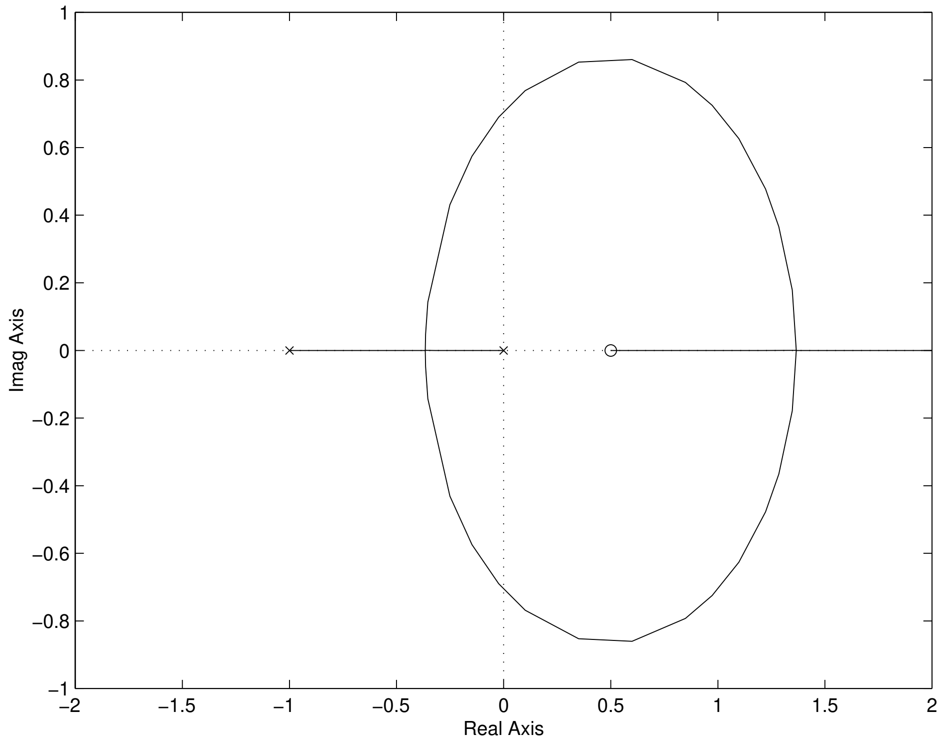
$$K_2 = 86 + 5\sqrt{28} \qquad \omega_2 = \sqrt{10 + \sqrt{28}} \text{ rad/s}$$



$$86 - 5\sqrt{28} < K < 86 + 5\sqrt{28}$$

$$KG(p) = \frac{K(1 - T_a p)}{p(Tp+1)}$$

$$T_a > 0 \qquad T > 0$$



Condition des angles :

$$\mathrm{Arg}\left[\frac{K(T_a p - 1)}{p(Tp+1)}\right] = 0$$