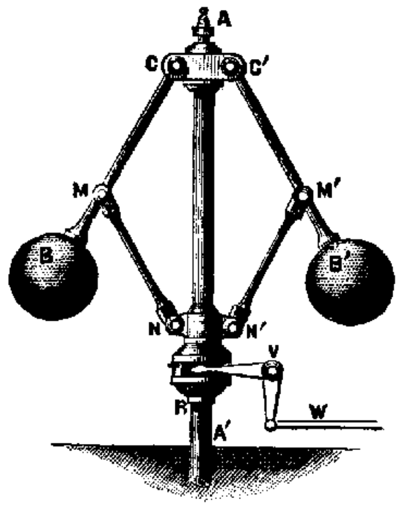
Représentation et analyse

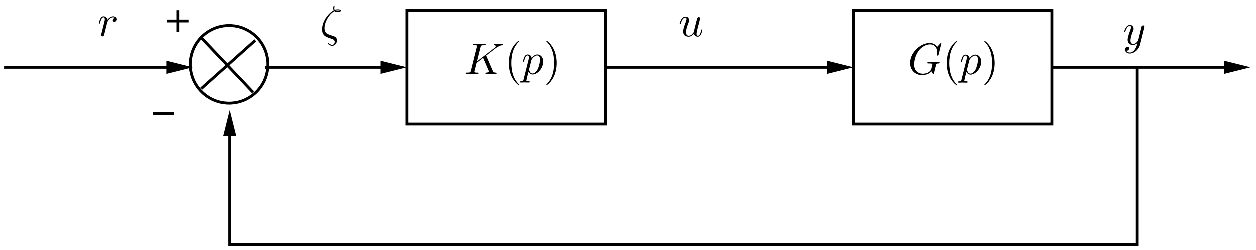
des systèmes linéaires

PC 6

Analyse fréquentielle des systèmes bouclés



Soit l'asservissement à retour unitaire :



La fonction de transfert en boucle ouverte est définie par :

$$L(p) = K(p)G(p)$$

La fonction de transfert en boucle fermée est définie par :

$$F(p) = \frac{K(p)G(p)}{1 + K(p)G(p)}$$

▼ Définition 1 : *marge de phase*

La marge de phase est définie par :

$$\boxed{M_\Phi = \Phi(\omega_{co}) + 180^o}$$

où ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB de la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$|L(j\omega_{co})| = 0 \text{ dB}$$

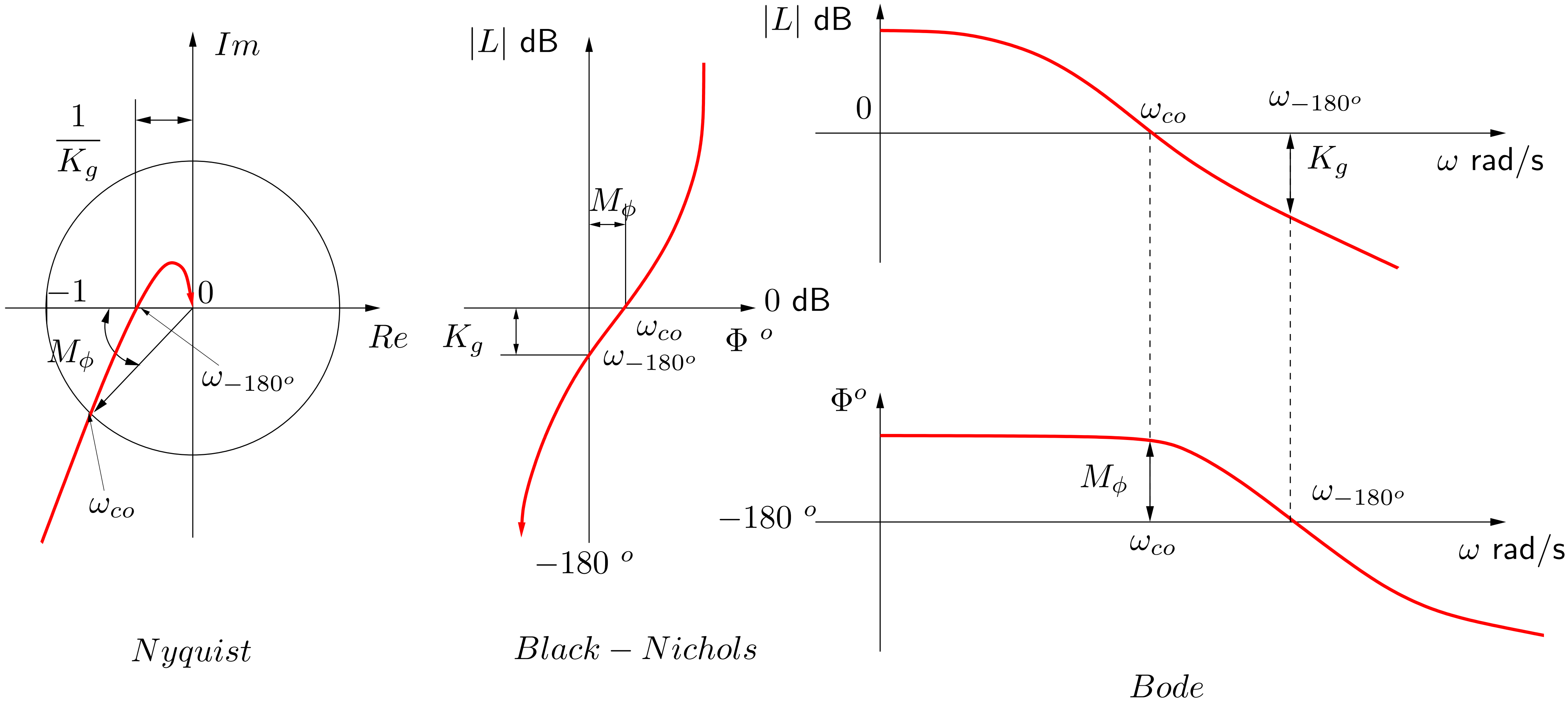
▼ Définition 2 : *marge de gain*

La marge de gain se définit par :

$$\boxed{K_g = \frac{1}{|L(j\omega_{-180^o})|} \qquad K_g \text{ dB} = -20\text{Log}_{10}|L(j\omega_{-180^o})|}$$

où ω_{-180^o} est la pulsation pour laquelle la phase de la boucle ouverte vaut -180^o :

$$\text{Arg}[L(j\omega_{-180^o})] = -180^o$$

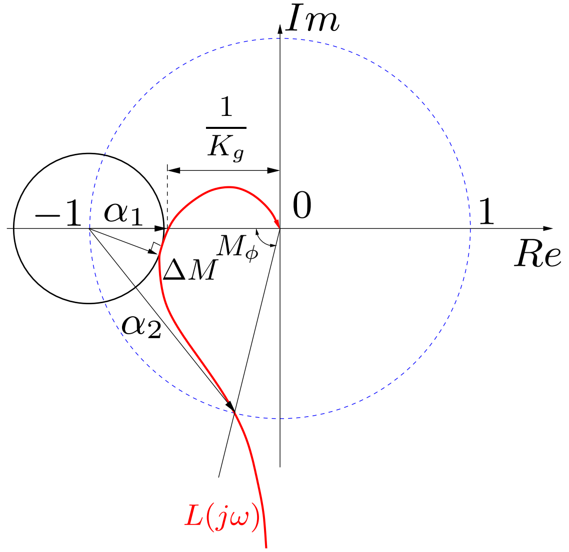


Im
$\frac{1}{K_g}$
-1
0
Re
M_ϕ
ω_{-180^o}
ω_{co}
$Nyquist$
$|L|$ dB
M_ϕ
0 dB
K_g
ω_{co}
$\Phi\ ^o$
ω_{-180^o}
$-180\ ^o$
$Black - Nichols$
$|L|$ dB
0
ω_{co}
ω_{-180^o}
K_g
ω rad/s
Φ^o
M_ϕ
ω_{-180^o}
$-180\ ^o$
ω_{co}
ω rad/s
$Bode$

▼ **Définition 3** : *marge de module*

La marge de module est la plus petite distance du point critique -1 au lieu de transfert en boucle ouverte

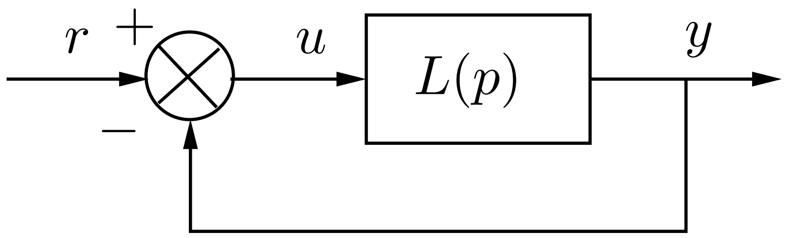
$$\Delta M = \frac{1}{M_S} = \frac{1}{\max\limits_{\omega} |S(j\omega)|}$$

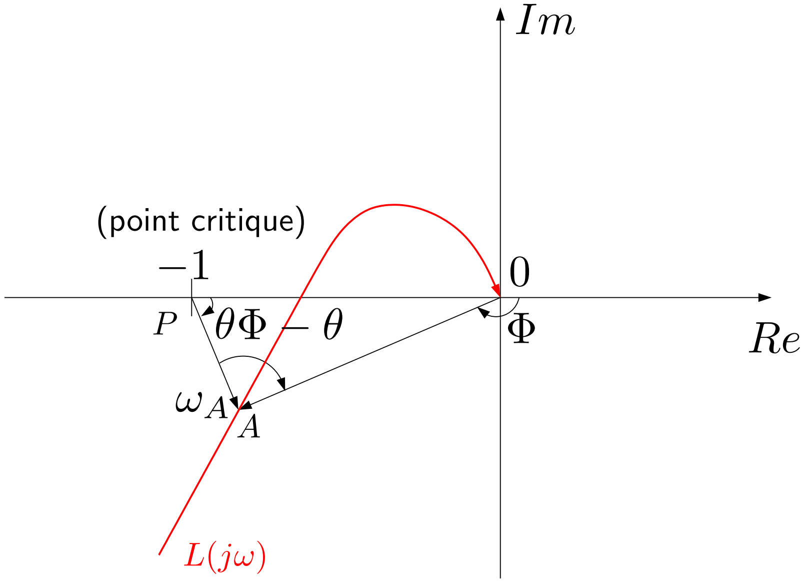


▼ **Définition 4** : *pulsation de résonnance* et *amplitude de résonnance*

La pulsation de résonnance est la pulsation $\omega_r = \text{Arg}[\max\limits_{\omega}(|F(j\omega)|)]$ alors que l'amplitude de résonnance est $M_r = \max\limits_{\omega} |F(j\omega)| = |F(j\omega_r)|$

Soit $L(p)$ telle que la boucle fermée $\dfrac{L(p)}{1+L(p)}$ est stable





$$|\overrightarrow{OA}| = |L(j\omega_A)| \quad \mathrm{Arg}(L(j\omega_A)) = \Phi$$

☛ **Problème 1** :

Déterminer la boucle fermée à partir du lieu de transfert en boucle ouverte

$$|\overrightarrow{OA}| = |L(j\omega_A)| \quad \mathrm{Arg}(L(j\omega_A)) = \Phi \quad \frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{PA}|} = \frac{|L(j\omega_A)|}{|1+L(j\omega_A)|} \quad \Phi - \theta = \mathrm{Arg}\left(\frac{L(j\omega_A)}{1+L(j\omega_A)}\right)$$

$$F(j\omega) = Me^{j\alpha} \quad L(j\omega) = X + jZ$$

▼ **Définition 5** : *M-cercles et N-cercles*

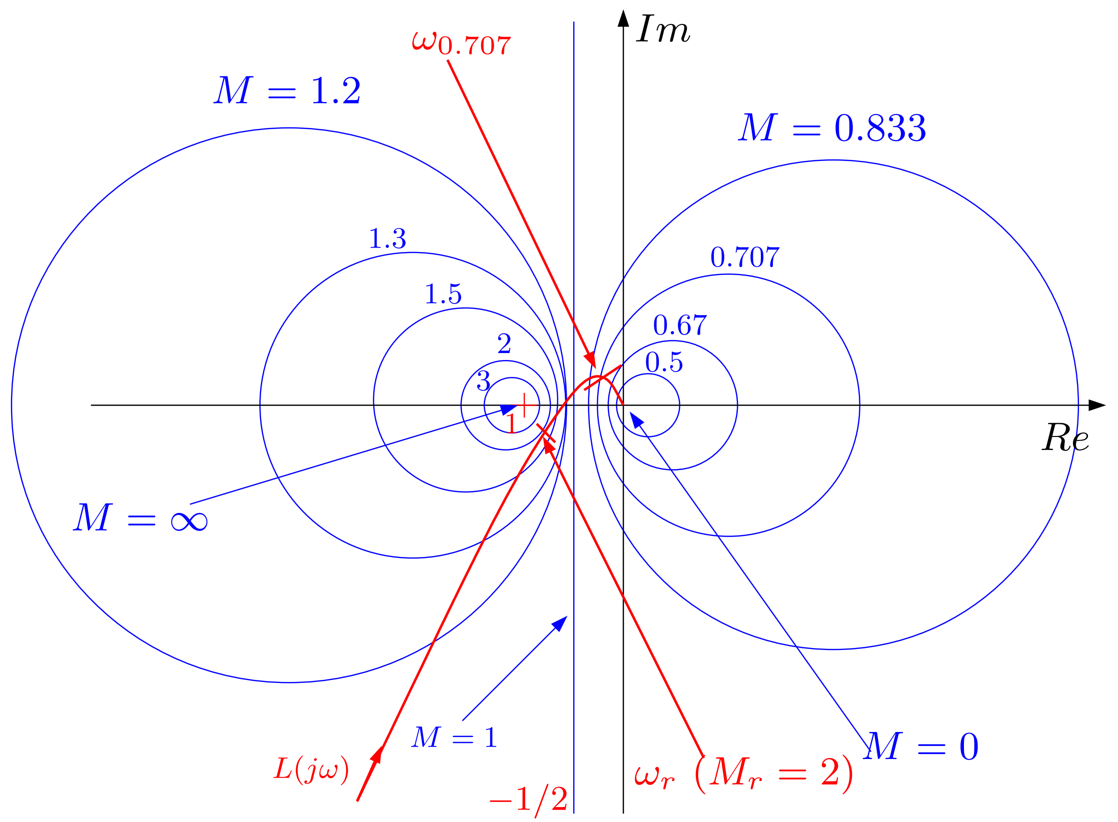
- *Les lieux d'amplitude constante en boucle fermée sont les M-cercles :*

$$\left(X + \frac{M^2}{M^2-1}\right)^2 + Z^2 = \frac{M^4}{(M^2-1)^2}$$

- *Les lieux de phase constante en boucle fermée sont appelés les N-cercles :*

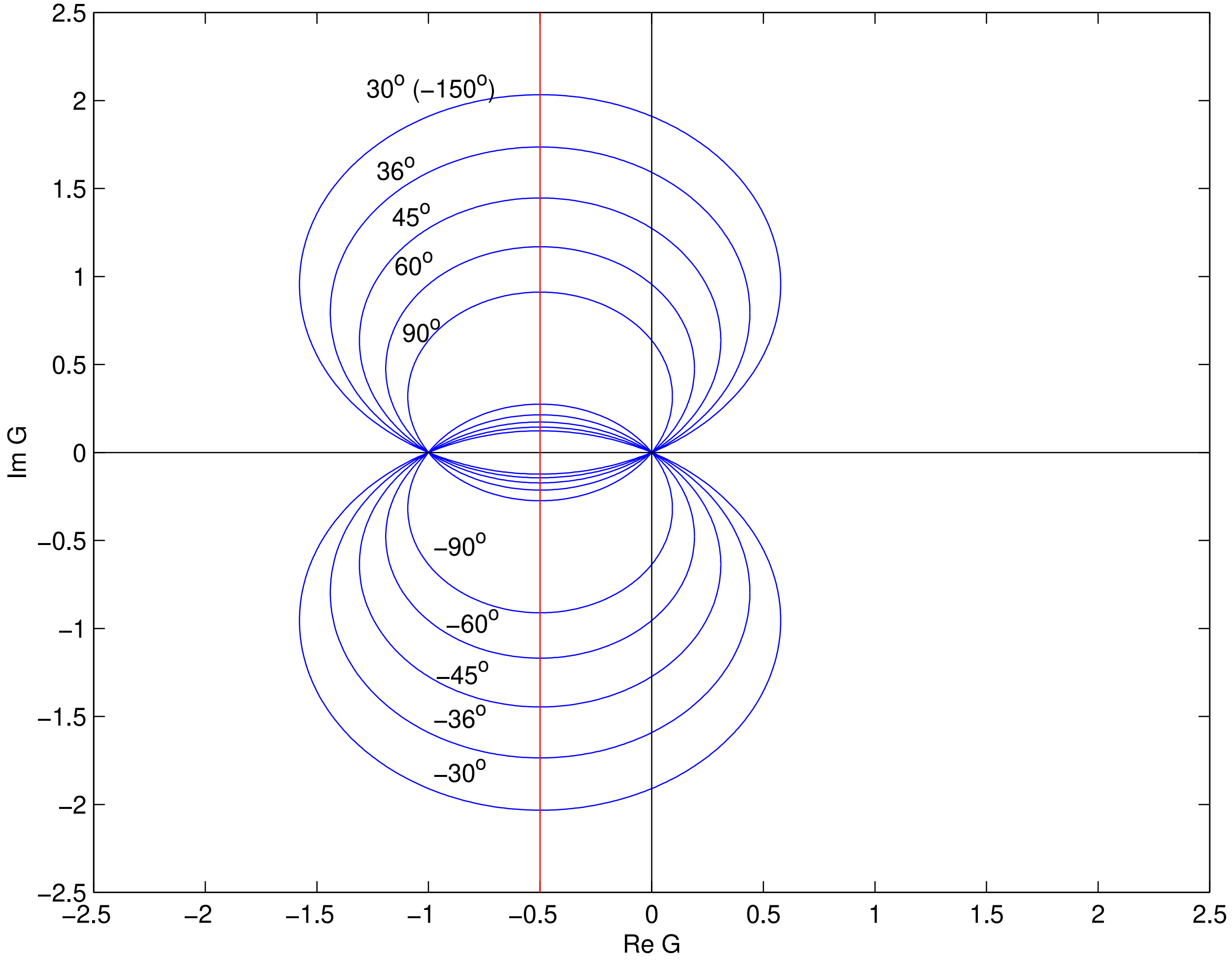
$$(X+1/2)^2 + \left(Z - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{(2N)^2}$$

où $N = \tan(\alpha)$

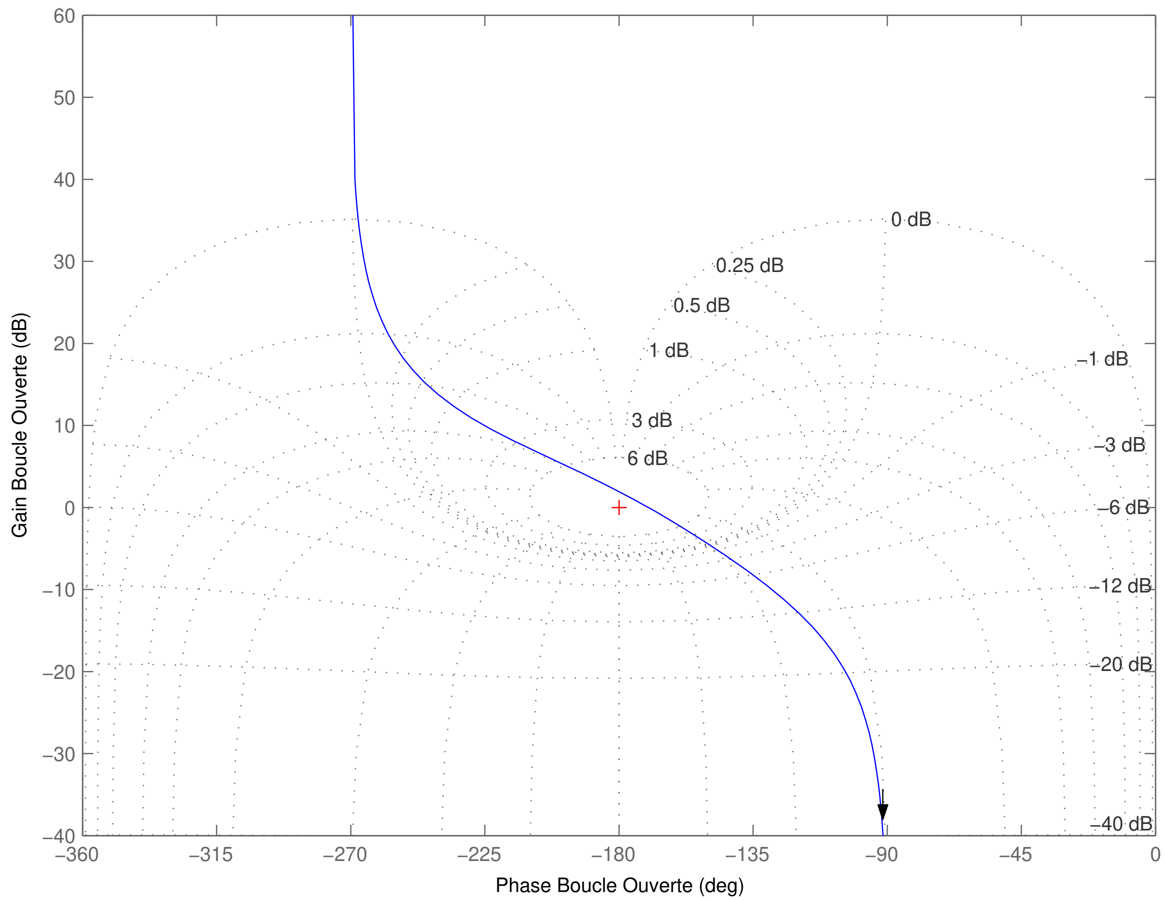


Détermination :

- Courbe de gain en boucle fermée (tracé du lieu de bode en B.F)
- Pulsation ω_r et pic M_r de résonnance et bande passante ω_{bp} (exemple : $\omega_{0.707}$)



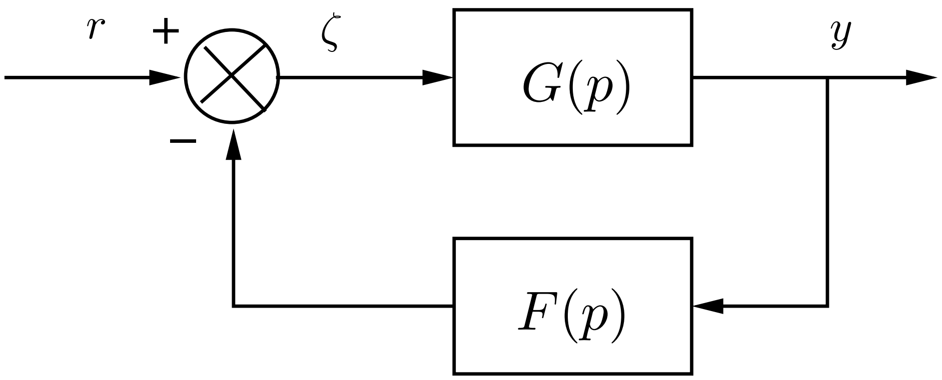
Détermination : courbe de phase en boucle fermée (tracé du lieu de bode en B.F)



✍ **Remarques 1** *:*

Asservissement à retour unitaire

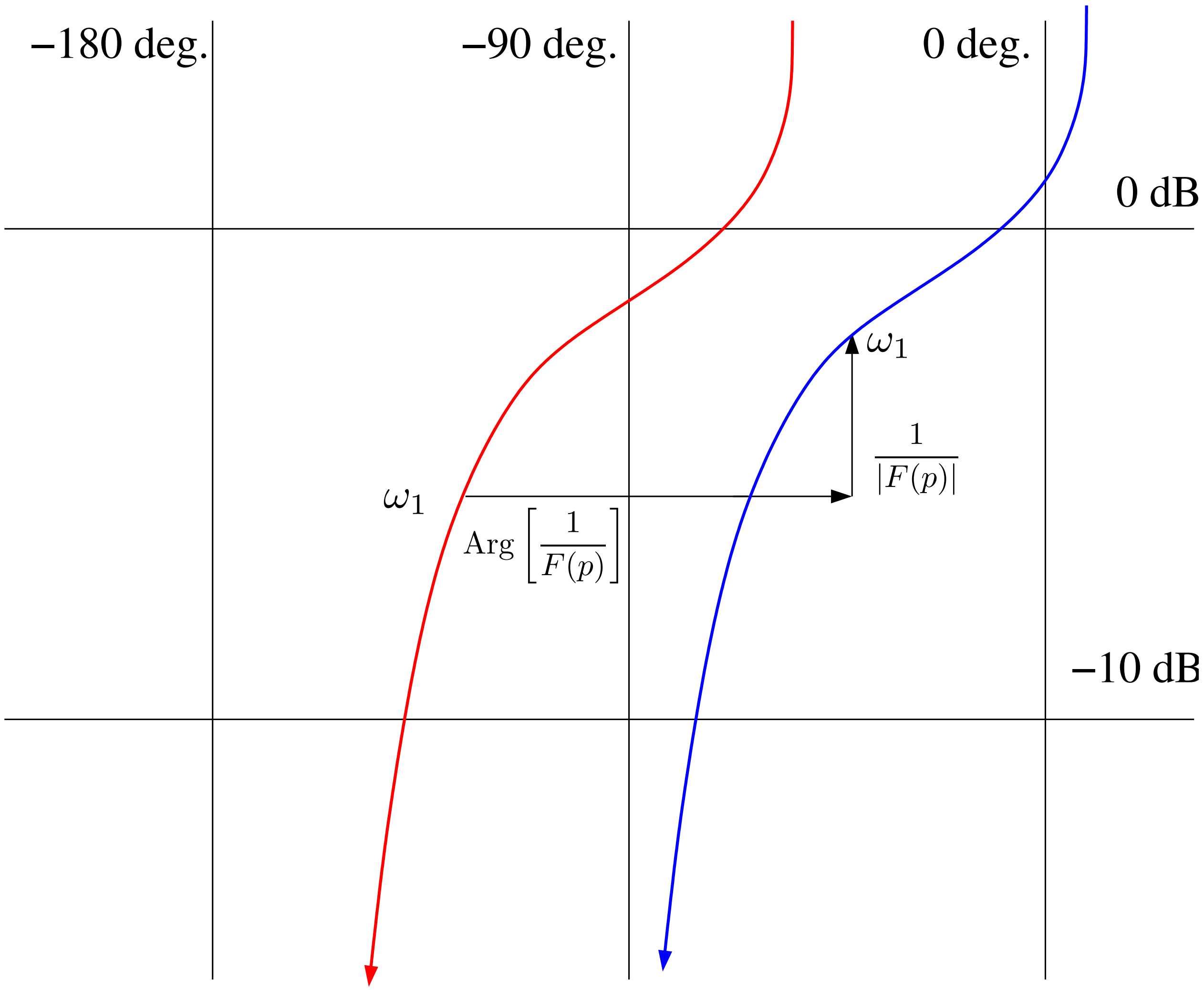
✍ **Remarques 2** : *retour non unitaire*



$$\frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{1}{F(p)} \frac{G(p)F(p)}{1+G(p)F(p)}$$

- *On trace* $\dfrac{G(j\omega)F(j\omega)}{1+G(j\omega)F(j\omega)}$

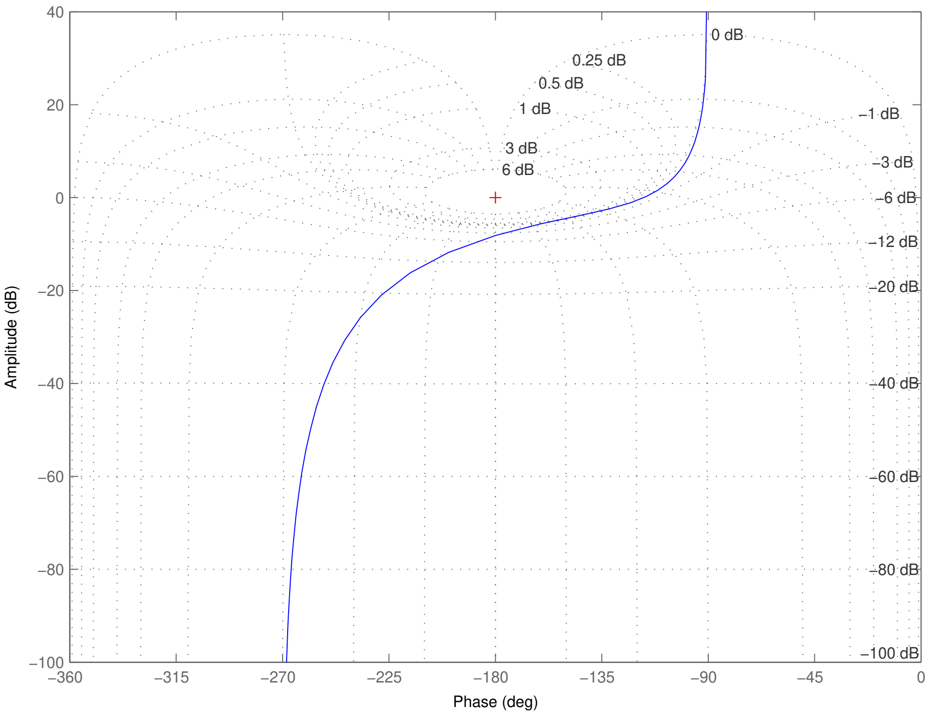
- *On translate cette courbe de* $\dfrac{1}{|F(j\omega)|}$ *en gain et de* $\mathrm{Arg}\left[\dfrac{1}{F(j\omega)}\right]$ *en phase*

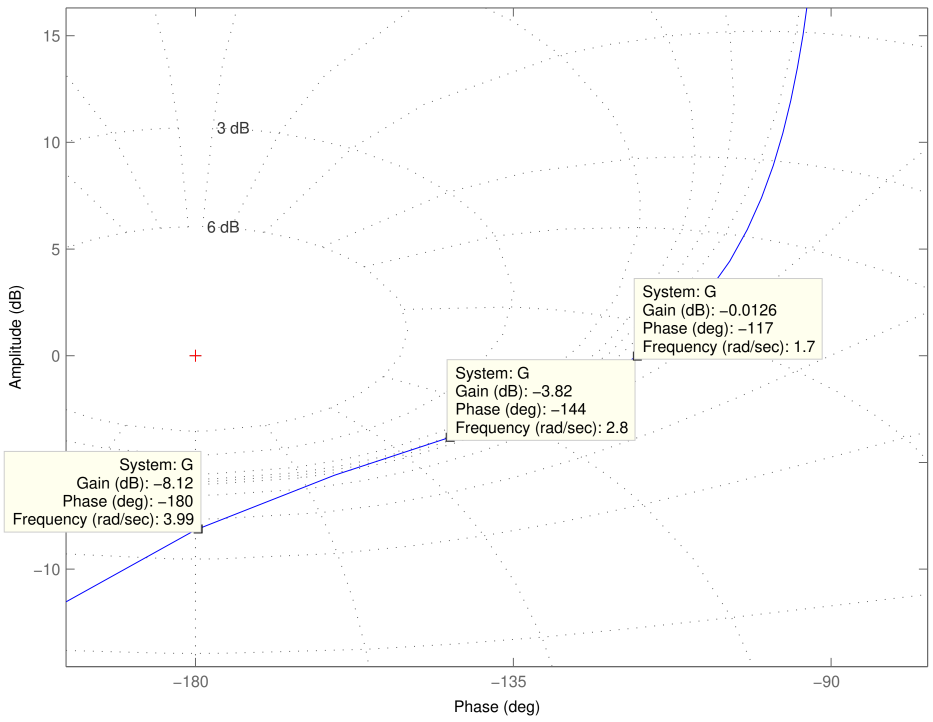


−180 deg.
−90 deg.
0 deg.
0 dB
−10 dB
ω_1
ω_1
$\mathrm{Arg}\left[\frac{1}{F(p)}\right]$
$\frac{1}{|F(p)|}$

$$G(p) = \frac{10K}{p(p^2+4p+16)} \qquad M_\Phi = 60 \text{ deg} \qquad \omega_{co} = 1.7 \text{ rad/s} \qquad K_g = 8 \text{ dB}$$

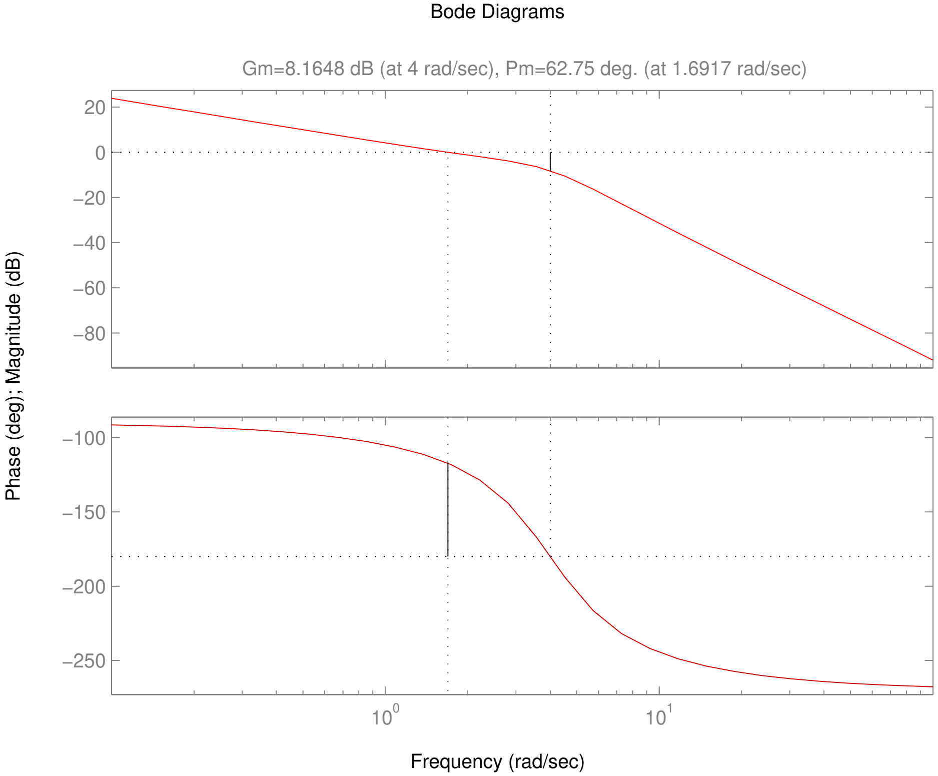
$$K = 2.5 \qquad M_r = 0.5 \text{ dB} \qquad \omega_r = 2.8 \text{ rad/s} \qquad \omega_{-\pi} = 4 \text{ rad/s}$$

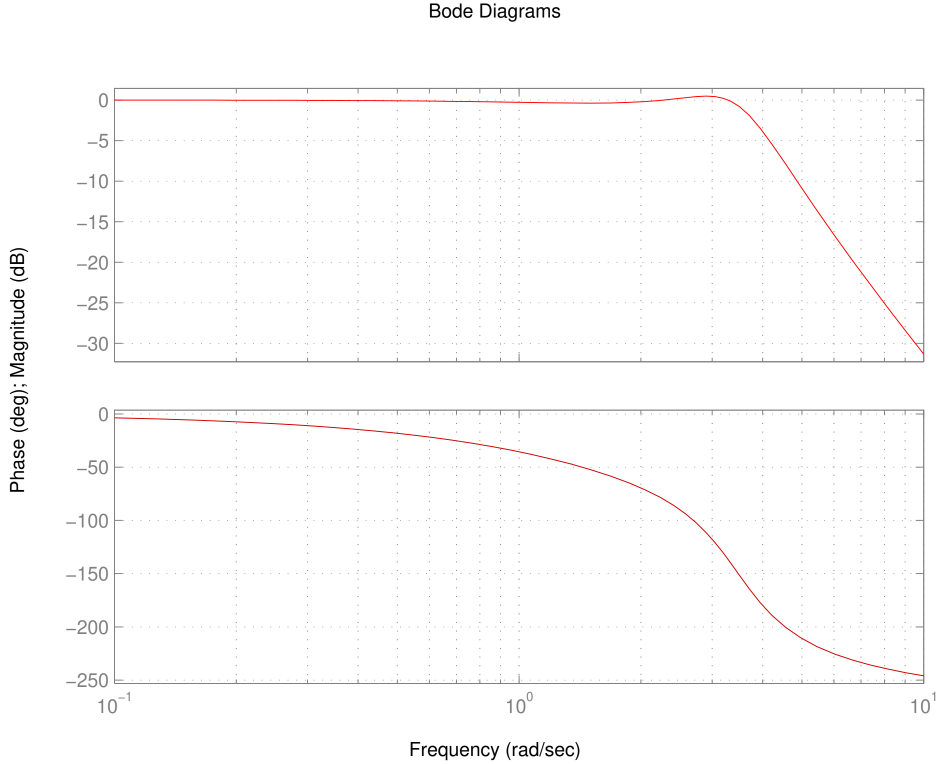




Exemple (suite)

$$G(p) = \frac{10K}{p(p^2 + 4p + 16)} \qquad K = 2.5$$

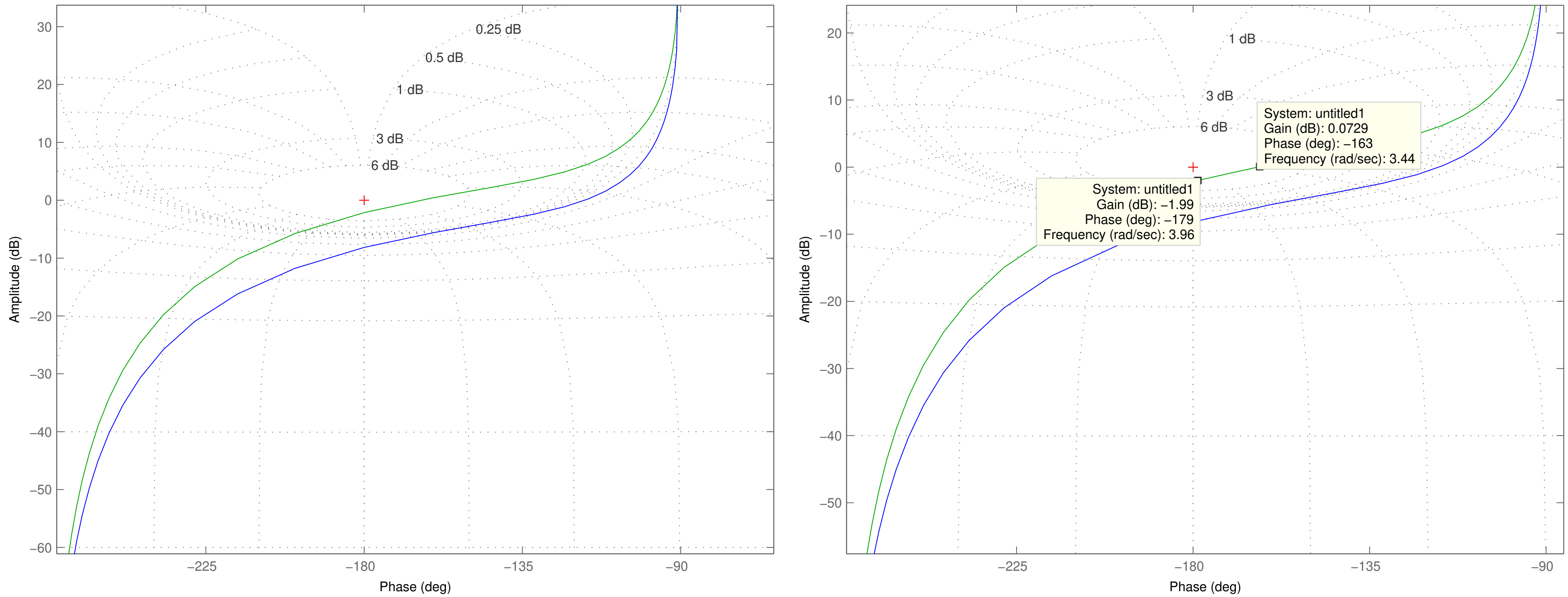




Exemple (suite)

$$G(p) = \frac{10K}{p(p^2+4p+16)} \qquad M_\Phi = 16 \text{ deg} \qquad \omega_{co} = 3.4466 \text{ rad/s} \qquad K_g = 2.14 \text{ dB}$$

$$K = 5 \qquad M_r = 14.3 \text{ dB} \qquad \omega_r = 3.76 \text{ rad/s} \qquad \omega_{-\pi} = 4 \text{ rad/s}$$



$$G(p) = \frac{10K}{p(p^2+4p+16)} \quad K = 5$$