Représentation et analyse des systèmes linéaires

Petite classe No 5

1 Exercices

Exercice 1 :

Déterminer la plage de stabilité pour le paramètre K du système dont l'équation d'état est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u$$

Exercice 2 :

On considère le système du second ordre décrit par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Déterminer la stabilité de l'état d'équilibre.

Exercice 3 :

On considère le système du second ordre décrit par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1-j \\ -1+j & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Déterminer la stabilité de l'état d'équilibre.

Exercice 4 :

On considère le système du second ordre décrit par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Déterminer la stabilité de l'état d'équilibre.

Exercice 5 :

On considère le système du second ordre décrit par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Déterminer la stabilité de l'état d'équilibre.

Exercice 6 :

On considère l'équation caractéristique :

$$p^4 + Kp^3 + p^2 + p + 1 = 0$$

Déterminer la plage de stabilité pour K.

Exercice 7 :

On considère l'équation caractéristique :

$$a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 = 0$$

Donner les conditions de stabilité sur les coefficients du polynôme.

Exercice 8 :

Déterminer la stabilité des systèmes d'équations caractéristiques :
(a) $p^3 + 25p^2 + 10p + 450 = 0$
(b) $p^3 + 25p^2 + 10p + 50 = 0$
(c) $p^3 + 25p^2 + 250p + 10 = 0$
(d) $2p^4 + 10p^3 + 5.5p^2 + 5.5p + 10 = 0$
(e) $p^6 + 2p^5 + 8p^4 + 15p^3 + 20p^2 + 16p + 16 = 0$
(f) $p^4 + 2p^3 + 10p^2 + 20p + 5 = 0$

Exercice 9 :

Déterminer la marge de stabilité sur le paramètre K pour des systèmes d'équations caractéristiques :
(a) $p^4 + 25p^3 + 15p^2 + 20p + K = 0$
(b) $p^4 + Kp^3 + 2p^2 + (K+1)p + 10 = 0$
(c) $p^3 + (K+2)p^2 + 2Kp + 10 = 0$
(d) $p^3 + 20p^2 + 5p + 10K = 0$

Exercice 10 :

Tracer le lieu de Nyquist, de Bode et de Nichols des modèles suivant :

$$1- \quad G(p) = \frac{20(p^2+p+0.5)}{p(p+1)(p+10)} \qquad 2- \quad G(p) = \frac{9(p^2+0.2p+1)}{p(p^2+1.2p+9)}$$

$$3- \quad G(p) = \frac{20(p+1)}{p(p+5)(p^2+2p+10)} \qquad 4- \quad G(p) = \frac{T_1p+1}{T_2p+1}$$

$$5- \quad G(p) = \frac{T_1p+1}{T_2p-1} \qquad 6- \quad G(p) = \frac{-T_1p+1}{T_2p+1} \quad T_1 > T_2 > 0$$

Exercice 11 :

Soit le modèle du deuxième ordre :

$$G(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

Montrer que la bande passante à -3 dB est donnée par :

$$\omega_{-3} = \omega_n(1 - 2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2})$$

2 Solution des exercices

Exercice 1 :

Le polynôme caractéristique associé à la matrice dynamique A est donné par :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + K$$

En appliquant le critère de Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & 2 \\ \lambda^2 & 3 & K \\ \lambda & \dfrac{6-K}{3} & 0 \\ \lambda^0 & K & \end{array}$$

on obtient la condition de stabilité $0 < K < 6$.

Exercice 2 :

Le point d'équilibre unique est l'origine 0 et la matrice dynamique associée A a un polynôme caractéristique associé :

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 10\lambda$$

dont les racines (les pôles du système) sont complexes conjuguées à partie réelle strictement négative $\dfrac{-1 \pm j\sqrt{39}}{2}$ donc le système est asymptotiquement stable.

Exercice 3 :

Les valeurs propres de la matrice dynamique sont -4 et -1 donc le point d"equilibre 0 est asymptotiquement stable pour le système.

Exercice 4 :

La matrice dynamique a une valeur propre double -1 est le système est donc stable asymptotiquement.

Exercice 5 :

Le polynôme caractéristique associé est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

En appliquant le critère de Routh Hurwitz, on obtient les conditions

$$a_{11} + a_{22} < 0 \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$$

Exercice 6 :

On applique le critère de Routh-Hurwitz au polynôme $p^4 + Kp^3 + p^2 + p + 1$.

$$\begin{array}{c|ccc} p^4 & 1 & 1 & 1 \\ p^3 & K & 1 & 1 \\ p^2 & \frac{K-1}{K} & 1 & 0 \\ p & \frac{K-1-K^2}{K} & 0 & \\ p^0 & 1 & & \end{array}$$

Les conditions de stabilité sont donc $K > 0$, $K > 1$ et $K - 1 - K^2 > 0$. L'ensemble de ces conditions ne peut être satisfait. Le système est instable pour toute valeur de K.

Exercice 7 :

Une première condition nécessaire est que les a_i soient tous strictement positifs. Le tableau de Routh-Hurwitz donne ensuite.

$$\begin{array}{c|ccc} p^4 & a_0 & a_2 & a_4 \\ p^3 & a_1 & a_3 & 0 \\ p^2 & \frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1} & a_4 & 0 \\ p & \frac{(a_1a_2-a_0a_3)a_3-a_1^2a_4}{a_1a_2-a_0a_3} & 0 & \\ p^0 & a_4 & & \end{array}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité sont donc

$$\begin{array}{l} a_0 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \\ a_3 > 0 \\ a_4 > 0 \\ (a_1a_2 - a_0a_3)a_3 - a_1^2a_4 > 0 \end{array}$$

Exercice 8 :

On applique le critère de Routh-Hurwitz.

(a) $p^3 + 25p^2 + 10p + 450 = 0$

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 10 \\ p^2 & 25 & 450 \\ p & -8 & 0 \\ p^0 & 450 & \end{array}$$

L'équation caractéristique possède deux racines à partie réelle positive donc le système associé est instable.

(b) $p^3 + 25p^2 + 10p + 50 = 0$

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 10 \\ p^2 & 25 & 50 \\ p & 8 & 0 \\ p^0 & 50 & \end{array}$$

L'équation caractéristique possède trois racines à partie réelle strictement négative donc le système associé est stable.

(c) $p^3 + 25p^2 + 250p + 10 = 0$

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 250 \\ p^2 & 25 & 10 \\ p & 625 & 0 \\ p^0 & 10 & \end{array}$$

L'équation caractéristique possède trois racines à partie réelle strictement négative donc le système associé est stable.

(d) $2p^4 + 10p^3 + 5.5p^2 + 5.5p + 10 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} p^4 & 2 & 5.5 & 10 \\ p^3 & 10 & 5.5 & 0 \\ p^2 & 4.4 & 10 & \\ p & -17.22 & 0 & \\ p^0 & 10 & & \end{array}$$

L'équation caractéristique possède deux racines à partie réelle positive donc le système associé est instable.

(e) $p^6+2p^5+8p^4+15p^3+20p^2+16p+16=0$

$$\begin{array}{c|cccc} p^6 & 1 & 8 & 20 & 16 \\ p^5 & 2 & 15 & 16 & 0 \\ p^4 & 1/2 & 7 & 16 & 0 \\ p^3 & -13/2 & -24 & 0 & \\ p^2 & 67/2 & 16 & & \\ p & -700 & 0 & & \\ p^0 & 16 & & & \end{array}$$

L'équation caractéristique possède quatre racines à partie réelle positive donc le système associé est instable.

(f) $p^4+2p^3+10p^2+20p+5=0$

$$\begin{array}{c|ccc} p^4 & 1 & 10 & 5 \\ p^3 & 2 & 20 & 0 \\ p^2 & \epsilon & 5 & 0 \\ p & 20-10/\epsilon & 0 & \\ p^0 & 5 & & \end{array}$$

L'équation caractéristique possède deux racines à partie réelle positive donc le système associé est instable.

Exercice 9 :

On applique le critère de Routh-Hurwitz.

(a) $p^4+25p^3+15p^2+20p+K=0$

$$\begin{array}{c|ccc} p^4 & 1 & 15 & K \\ p^3 & 25 & 20 & 0 \\ p^2 & 14.2 & K & 0 \\ p & \frac{284-25K}{14.2} & 0 & \\ p^0 & K & & \end{array}$$

Le système associé est stable ssi $0<K<11.36$.

(b) $p^4+Kp^3+2p^2+(K+1)p+10=0$

$$\begin{array}{c|ccc} p^4 & 1 & 2 & 10 \\ p^3 & K & K+1 & 0 \\ p^2 & \frac{K-1}{K} & 10 & 0 \\ p & \frac{-9K^2-1}{K-1} & 10 & \\ p^0 & 10 & & \end{array}$$

Le système associé est toujours instable puisque pour $1<K$, $-9K^2-1$ ne peut être positif.

(c) $p^3+(K+2)p^2+2Kp+10=0$

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 2K \\ p^2 & K+2 & 10 \\ p & \frac{2K^2+4K-10}{K+2} & 0 \\ p^0 & 10 & \end{array}$$

Le système associé est stable asymptotiquement pour $-1+\sqrt{6}<K$.

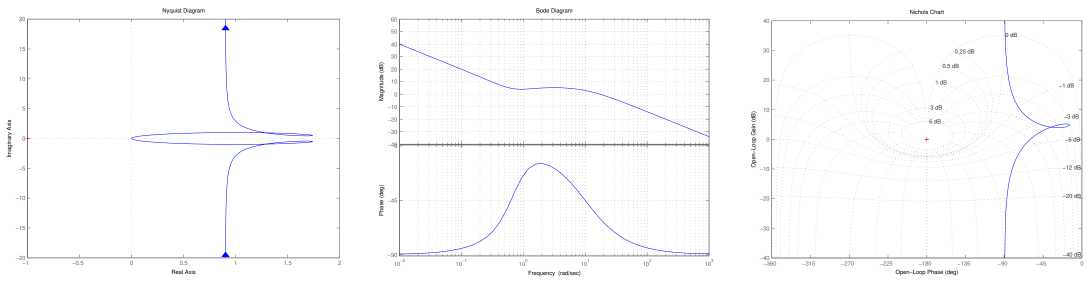
(d) $p^3 + 20p^2 + 5p + 10K = 0$

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 5 \\ p^2 & 20 & 10K \\ p & 5-0.5K & 0 \\ p^0 & 10K & \end{array}$$

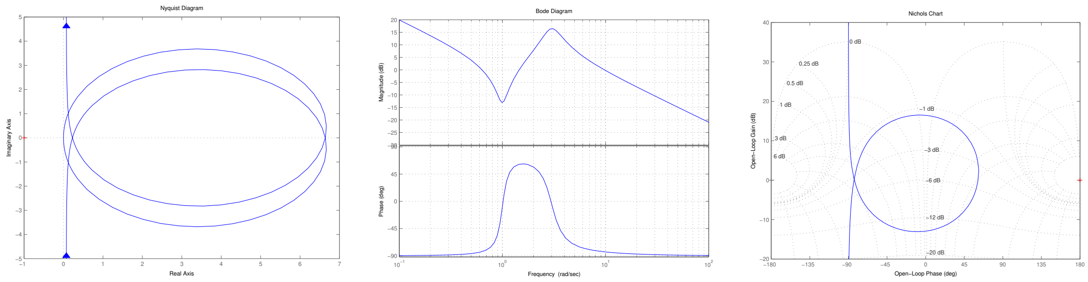
Le système associé est stable pour $0 < K < 10$.

Exercice 10 :

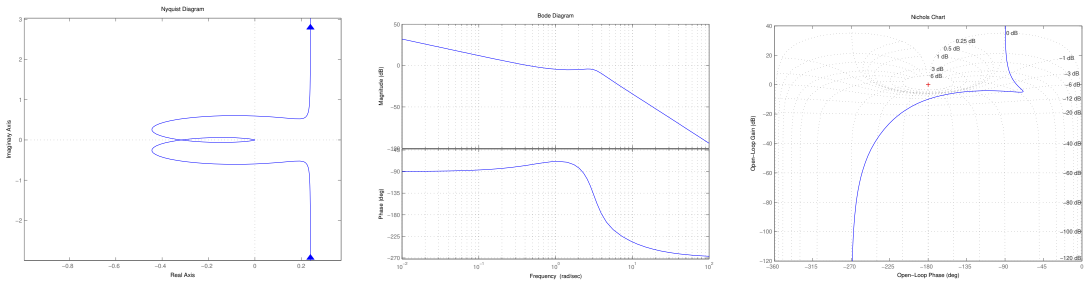
1-



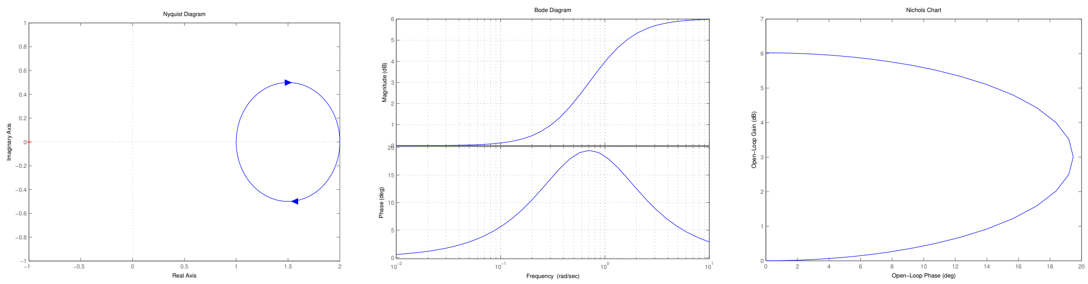
2-



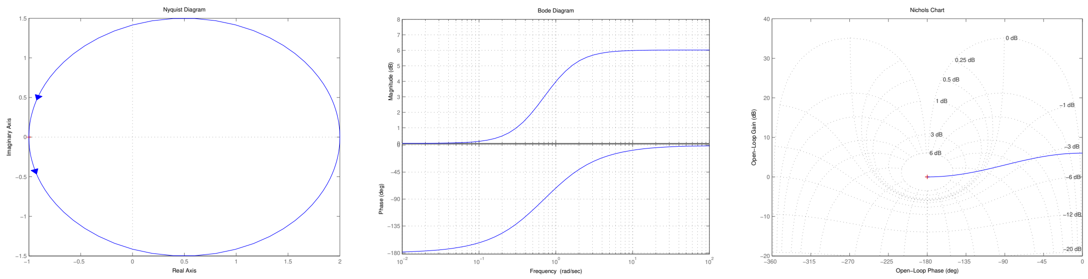
3-



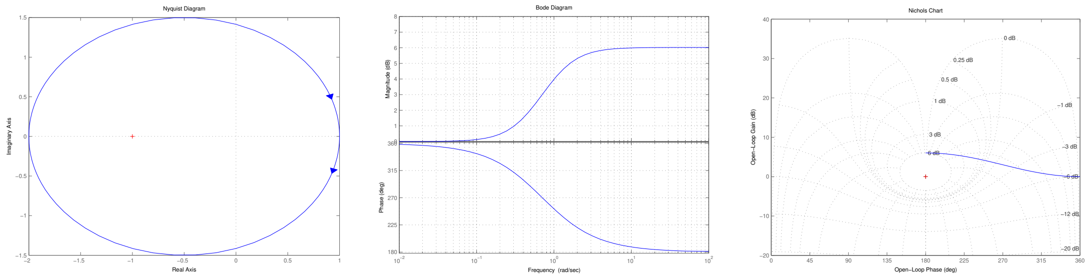
4- Pour $T_1 = 2$ et $T_2 = 1$, on obtient,



5- Pour $T_1 = 2$ et $T_2 = 1$, on obtient,



6- Pour $T_1 = 2$ et $T_2 = 1$, on obtient,



Exercice 11 :

La condition de définition de la bande passante à -3 dB est :

$$20\text{Log}|G(j\omega_{-3})| = -3 \text{ dB} \;\Leftrightarrow\; |G(j\omega_{-3})|^2 = 10^{-0.3} = 0.5$$

Puisque

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{\omega_n^4}{(-\omega_{-3}^2 + \omega_n^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega_{-3}^2}$$

cela permet de réécrire que ω_{-3} est une solution du polynôme

$$\omega_{-3}^4 + 2(2\xi^2 - 1)\omega_n^2\omega_{-3}^2 - \omega_n^4$$

La seule solution positive est donnée par :

$$\omega_{-3} = \omega_n(1 - 2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2})$$

Notes bibliographiques

On pourra consulter au minimum un chapitre particulièrement dédié à l'analyse fréquentielle dans tous les ouvrages d'Automatique classiques et monographies complètes. Nous retenons les références [6], [13] parmi les ouvrages généraux et [20] parmi les ouvrages proposant une approche plus moderne de ces questions.

Les ouvrages recommandés en bibliographie ont été regroupés suivant des catégories ayant trait à leur nature ou au sujet traité si ce dernier est particulièrement pertinent pour un des sujets du chapitre.

- Articles fondateurs : [3] ;
- Manuels historiques : [12], [22], [5], [4], [11], [18], [16] ;
- Manuels généraux : [21], [17], [8], [6], [15], [10], [13] ;
- Manuels modernes : [20], [24], [1], [14], [7], [23] ;
- Analyse fréquentielle multivariable : [9], [8], [20] ;
- Critère de Routh-Hurwitz : [8], [19], [14], [7], [2].

Références

[1] A. Abramovici and J. Chapsky. *Feedback control systems : A fast-track guide for scientists and engineers*. Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts, USA, 2000.

[2] P. J. Antsaklis and A. N. Michel. *Linear systems*. Birkhäuser, Boston, Massachussets, USA, 2006.

[3] T. Basar, editor. *Control theory, twenty-five seminal papers (1932-1981).* IEEE press, Piscataway, New Jersey, USA, 2000.

[4] B. M. Brown. *The mathematical theory of linear systems.* Chapman and Hall, London, UK, 1961.

[5] H. Chesnut and R. W. Mayer. *Servomécanismes et régulation.* Dunod, Paris, France, 1957.

[6] R. C. Dorf and R. H. Bishop. *Modern control systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.

[7] S. Engelberg. *A mathematical introduction to control theory.* Imperial College Press, Singapore, Singapore, 2005.

[8] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeni. *Feedback control of dynamic systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 2009.

[9] T. Glad and L. Ljung. *Control theory : Multivariable and nonlinear methods.* Taylor and Francis, New York, New York, USA, 2000.

[10] G.C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado. *Control system design.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2001.

[11] I. M. Horowitz. *Synthesis of feedback systems.* Academic Press, London, UK, 1963.

[12] H. M. James, N. B. Nichols, and R. S. Phillips. *Theory of servomechanisms.* McGraw-Hill book company, New York, New York, USA, 1942.

[13] B. C. Kuo and F. Golnaraghi. *Automatic control systems.* John Wiley, New York, New York, USA, 2003.

[14] J. R. Leigh. *Control theory.* MPG books LTD, Bodmin, UK, 2004.

[15] A. G. O. Mutambara. *Design and analysis of control systems.* CRC press, Boca Raton, Florida, USA, 1999.

[16] P. Naslin. *Technologie et calcul pratique des systèmes asservis.* Dunod, Paris, France, 1968.

[17] K. Ogata. *Modern control engineering.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1990.

[18] R. Pallu de la Barrière. *Cours d'automatique.* Dunod, Paris, France, 1966.

[19] W. J. Palm. *Modeling, analysis and control of dynamical systems.* John Wiley, New York, New York, USA, 2000.

[20] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable feedback control.* John Wiley, New York, New York, USA, 1996.

[21] Y. Takahashi, M. J. Rabins, and D. M. Auslander. *Control and dynamic systems.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachussets, USA, 1970.

[22] J.C. Truxal. *Automatic Feedback Control System Synthesis.* Mc Graw-Hill Electrical and Electronic Engineering Series. Mc Graw-Hill, New York, USA, 1955.

[23] D. Xue, Y. Chen, and D. P. Atherton. *Linear feedback control : Analysis and design with MATLAB©.* Advances in design and control. SIAM, Philadelphy, Pennsylvania, USA, 2007.

[24] H. Özbay. *Introduction to feedback control theory.* CRC press, New York, New York, USA, 2000.