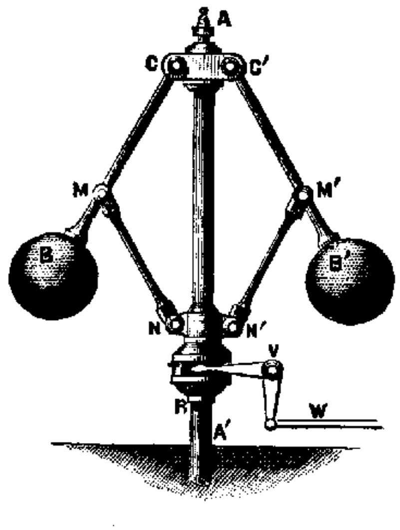
Représentation et analyse des systèmes linéaires

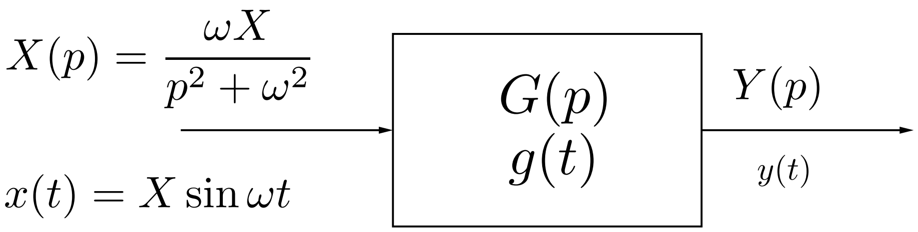
PC 5

Analyse fréquentielle



▼ **Définition 1** : *réponse fréquentielle*

La réponse fréquentielle d'un système LTI est la réponse en régime permanent du système à une entrée sinusoïdale



❒ **Théorème 1** :

La réponse fréquentielle d'un système LTI stable à une sinusoïde $X\sin(\omega t)$ est une sinusoïde

$$y(t) = Y(\omega)\sin\left(\omega t + \Phi(\omega)\right)$$

Nota : $y(t) = Y\sin(\omega t + \Phi) = \mathrm{Im}\left[\overline{Y}(\omega)e^{j\omega t}\right]$ avec $\overline{Y}(\omega) = Y(\omega)e^{j\Phi(\omega)}$
A $\overline{Y}(\omega)$, on associe toujours le signal complexe $\overline{Y}(\omega)e^{j\omega t}$

➥ Fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p+p_1)(\cdots)(p+p_n)}$$

➥ Réponse :

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \overline{a}e^{j\omega t} + b_1 e^{-p_1 t} + \cdots + b_n e^{-p_n t}$$

➥ Régime permanent :

$$y_3(t) = ae^{-j\omega t} + \overline{a}e^{j\omega t}$$

où :

$$a = \left[G(p)\frac{X\omega}{p^2+\omega^2}(p+j\omega)\right]_{|p=-j\omega} = -\frac{XG(-j\omega)}{2j}$$

$$\overline{a} = \left[G(p)\frac{X\omega}{p^2+\omega^2}(p-j\omega)\right]_{|p=j\omega} = \frac{XG(j\omega)}{2j}$$

➥ Fonction de transfert sinusoidale :

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi} \quad G(-j\omega) = |G(j\omega)|e^{-j\phi}$$

d'où :

$$a = -\frac{X|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j} \quad \overline{a} = \frac{X|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j}$$

➥ Régime permanent :

$$\begin{aligned} y_3(t) &= X|G(j\omega)|\frac{e^{j(\omega t+\phi)} - e^{-j(\omega t+\phi)}}{2j} \\ &= X|G(j\omega)|\sin(\omega t + \phi) \\ &= Y\sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

▼ **Définition 2** : *fonction de transfert sinusoïdale*

On définit la fonction de transfert sinusoïdale du système comme

$$\boxed{G(j\omega) = \frac{\overline{Y}(\omega)}{\overline{X}(\omega)}}$$

- *Son gain,*

$$|G(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} = \frac{|\overline{Y}(\omega)|}{|\overline{X}(\omega)|}$$

- *Sa phase,*

$$\Phi(\omega) = \text{Argument}\,(G(j\omega)) = \text{Argument}\left(\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right) = \text{Argument}\left(\frac{\overline{Y}(\omega)}{\overline{X}(\omega)}\right)$$

▼ **Définition 3** : *réponse fréquentielle*

La réponse fréquentielle du système est obtenue par variation de ω

$G(j\omega)$ est un nombre complexe caractérisé par

- son amplitude (le gain du système)
- son argument (la phase du système)

ou sa partie réelle et sa partie imaginaire qui sont des fonctions de ω

▼ **Définition 4** : *lieu de transfert*

On appelle lieu de transfert le lieu des points $G(j\omega)$ quand la pulsation ω varie de 0 à l'infini

➥ Le lieu de Nyquist :

$$(\mathrm{Re}(\omega), \mathrm{Im}(\omega)) \text{ ou } (\Phi(\omega), |G(j\omega)|)$$

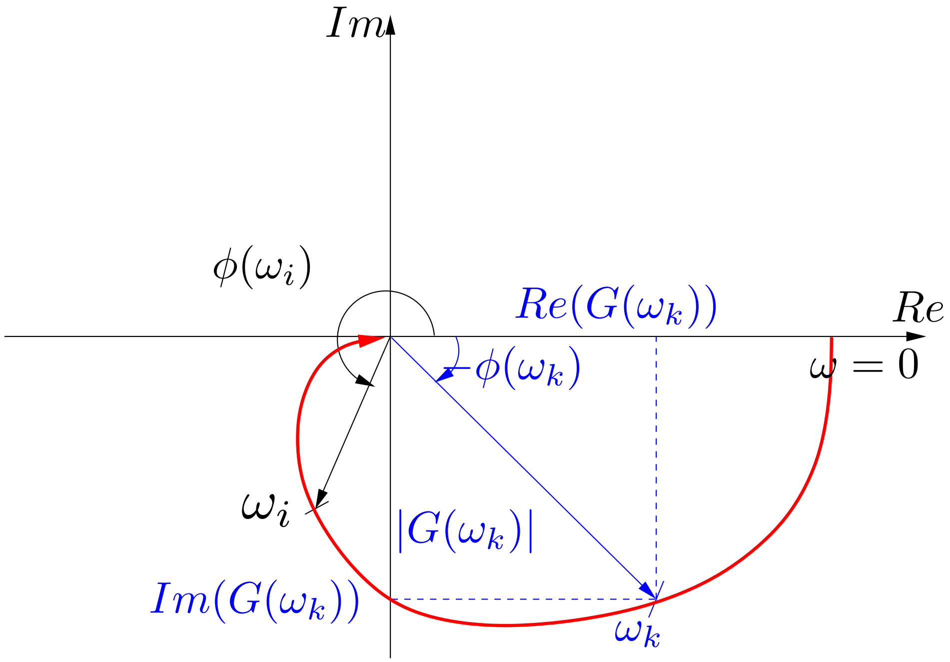
➥ le lieu de Nichols-Black :

$$(\Phi(\omega), |G(j\omega)| \text{ dB})$$

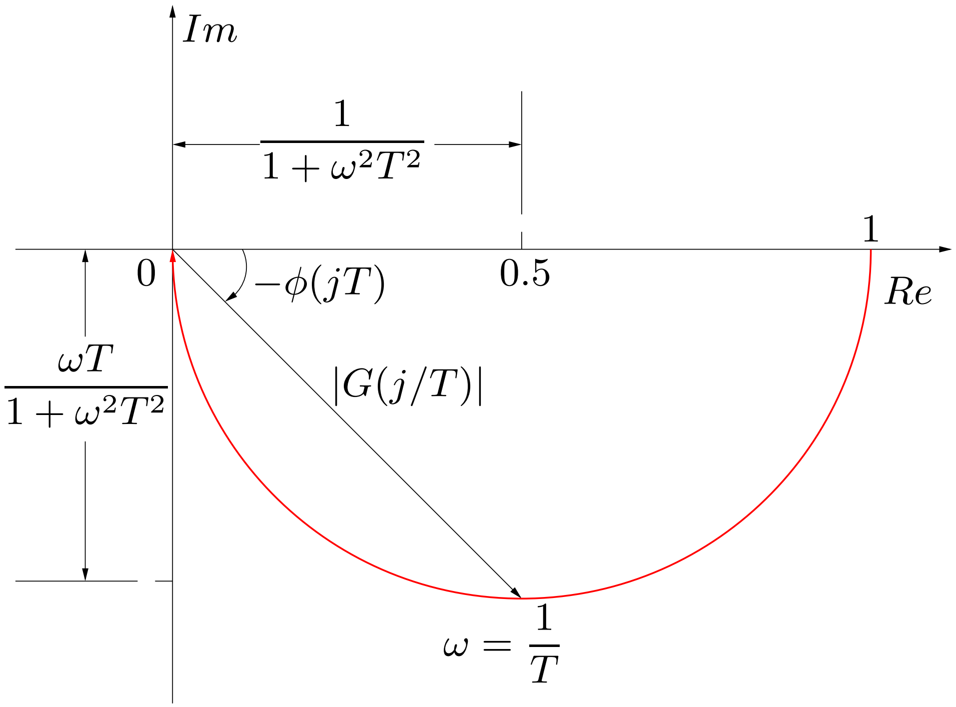
➥ Le lieu de Bode :

$$(\omega, \Phi(\omega)) \text{ et } (\omega, |G(j\omega)| \text{ dB})$$

Plan complexe



- Il décrit l'ensemble du domaine de variation des ω
- Problème des produits de lieux élémentaires connus $G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)$



$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$$

$$X = \mathrm{Re}(G(j\omega)) = \frac{1}{1+\omega^2T^2}$$

$$Y = \mathrm{Im}(G(j\omega)) = \frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}} \quad \Phi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega T)$$

$$(X-1/2)^2 + Y^2 = \left(\frac{1-\omega^2T^2}{1+\omega^2T^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1+\omega^2T^2}\right)^2 = 1/4$$

Plan de Nyquist d'un deuxième ordre

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

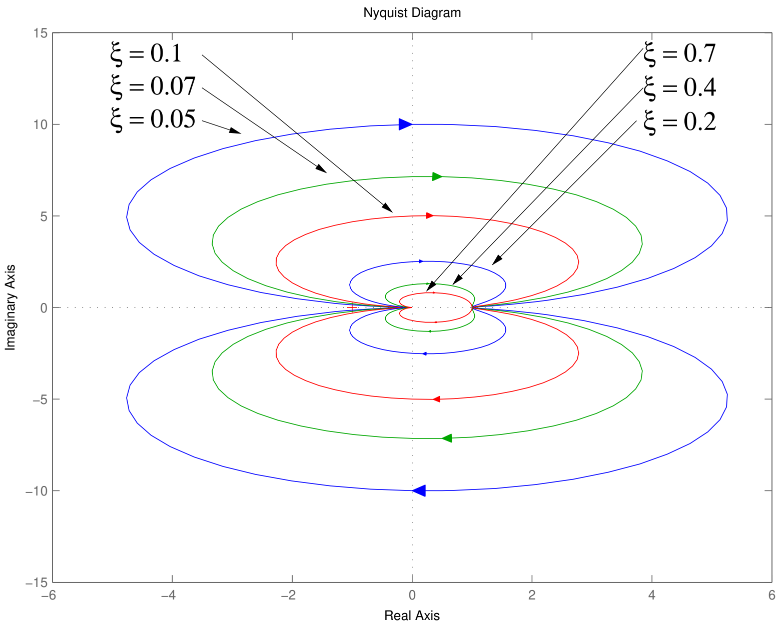
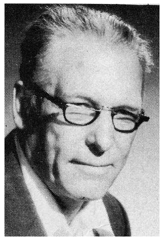


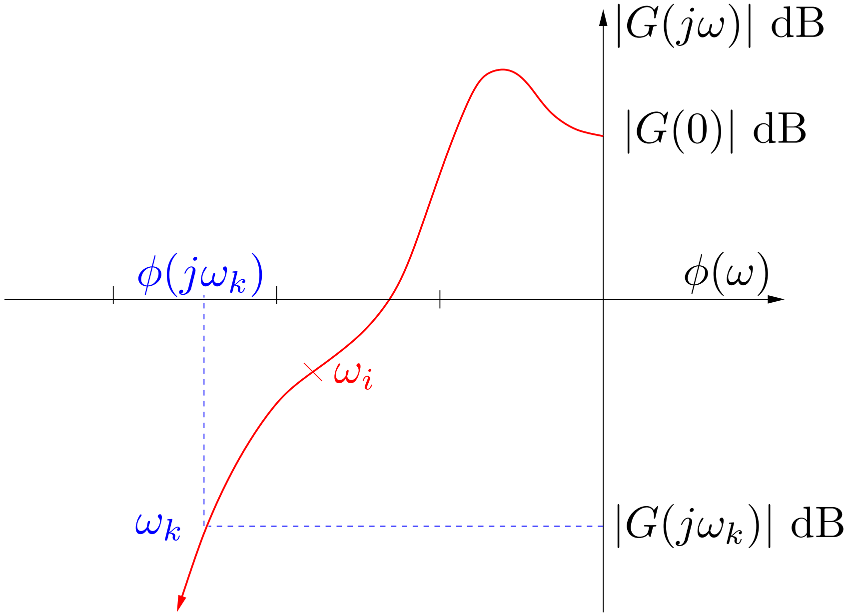
FIGURE 1 – ξ variant et $\omega_n = 1$

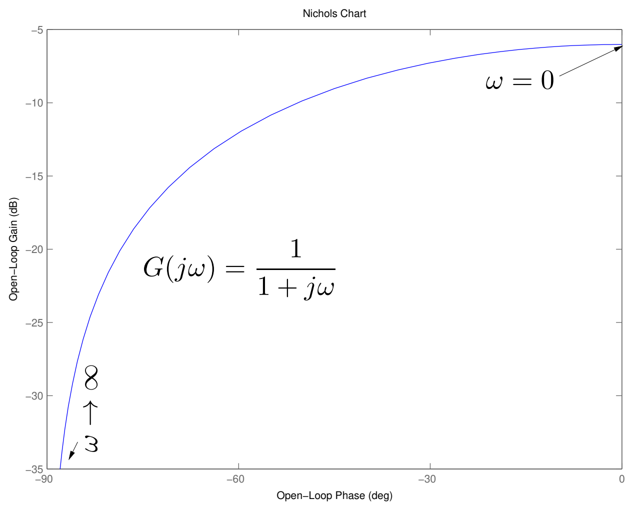
$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}(\omega) &= \frac{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \\ \mathrm{Im}(\omega) &= \frac{-2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \end{aligned}}$$

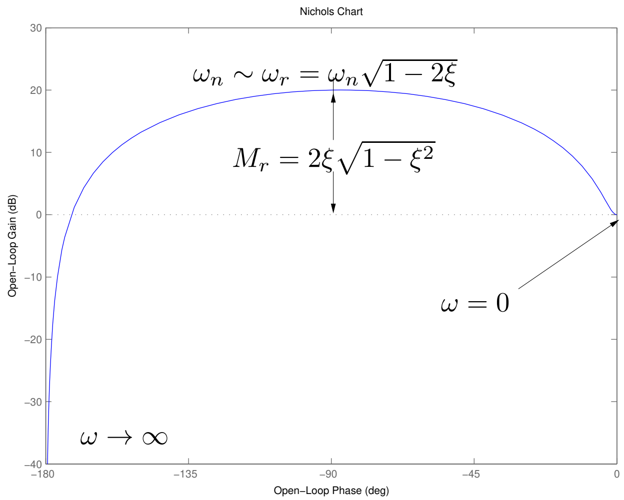
- Propriété d'additivité :

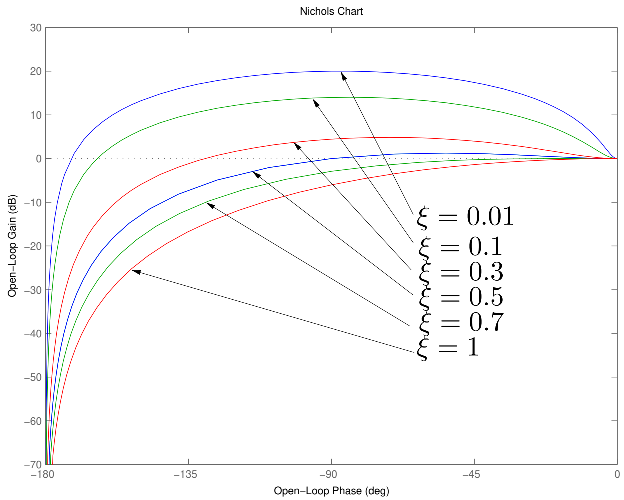
$$20\mathrm{Log}_{10}(|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|) = \sum_{i=1}^{2} 20\mathrm{Log}_{10}(|G_i(j\omega)|)$$





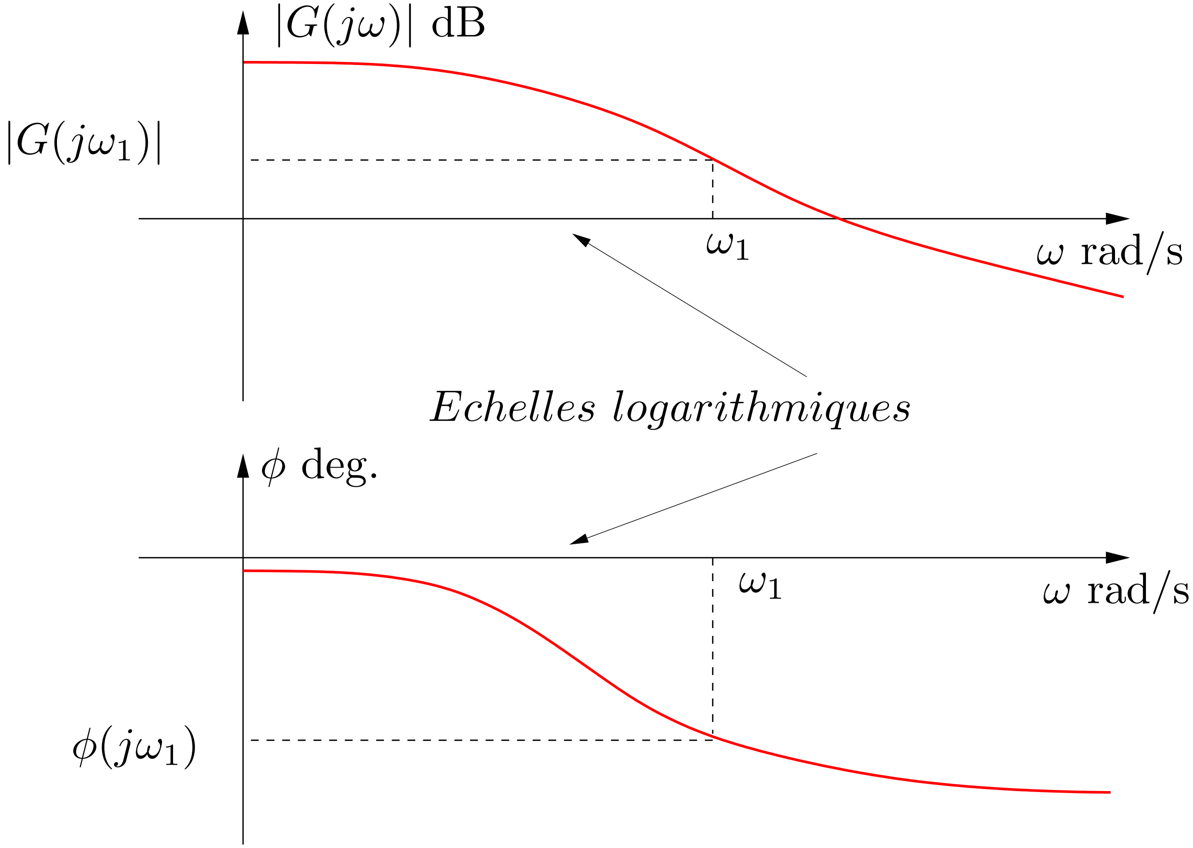

Nichols Chart
$\omega = 0$
$G(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega}$
$\omega \to \infty$
Open−Loop Gain (dB)
Open−Loop Phase (deg)


Nichols Chart
$\omega_n \sim \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi}$
$M_r = 2\xi\sqrt{1-\xi^2}$
$\omega = 0$
$\omega \to \infty$
Open−Loop Gain (dB)
Open−Loop Phase (deg)


Nichols Chart
$\xi = 0.01$
$\xi = 0.1$
$\xi = 0.3$
$\xi = 0.5$
$\xi = 0.7$
$\xi = 1$
Open−Loop Gain (dB)
Open−Loop Phase (deg)

- Propriété d'additivité et méthode de tracé asymptotique
- Tracé incomplet

$$20\mathrm{Log}_{10}(|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|) = \sum_{i=1}^{2} 20\mathrm{Log}_{10}(|G_i(j\omega)|)$$

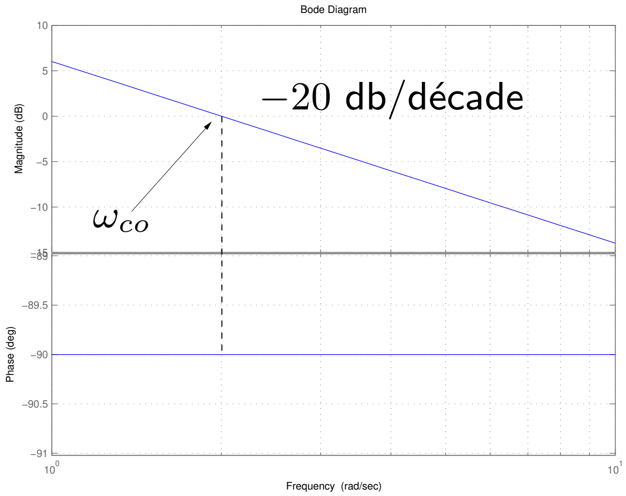


▼ Définition 5 :

Une octave est définie par ω_1 et $2\omega_1$ alors qu'une décade est définie par ω_1 et $10\omega_1$ pour ω_1 donnée

$$20\mathrm{Log}_{10}\left|\frac{K}{(j\omega)^N}\right| = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{K}{\omega^N}$$

$$= 20\mathrm{Log}_{10}K - 20N\mathrm{Log}_{10}\omega$$



▼ Définition 6 : *pulsation de coupure*

$\omega_{c\alpha}$ *est la pulsation de coupure à* α dB : $|G(j\omega_{c\alpha})|\ \mathrm{dB} = |G(j0)|\ \mathrm{dB} - \alpha\ \mathrm{dB}$

La bande de pulsations $0 \leq \omega \leq \omega_{c\alpha}$ *est appelée la bande passante du système à* α dB

Tracé de Bode d'un premier ordre

- Fonction de transfert sinusoidale :

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

- Pulsation de cassure : $\omega_c = 1/T$
- Module et phase :

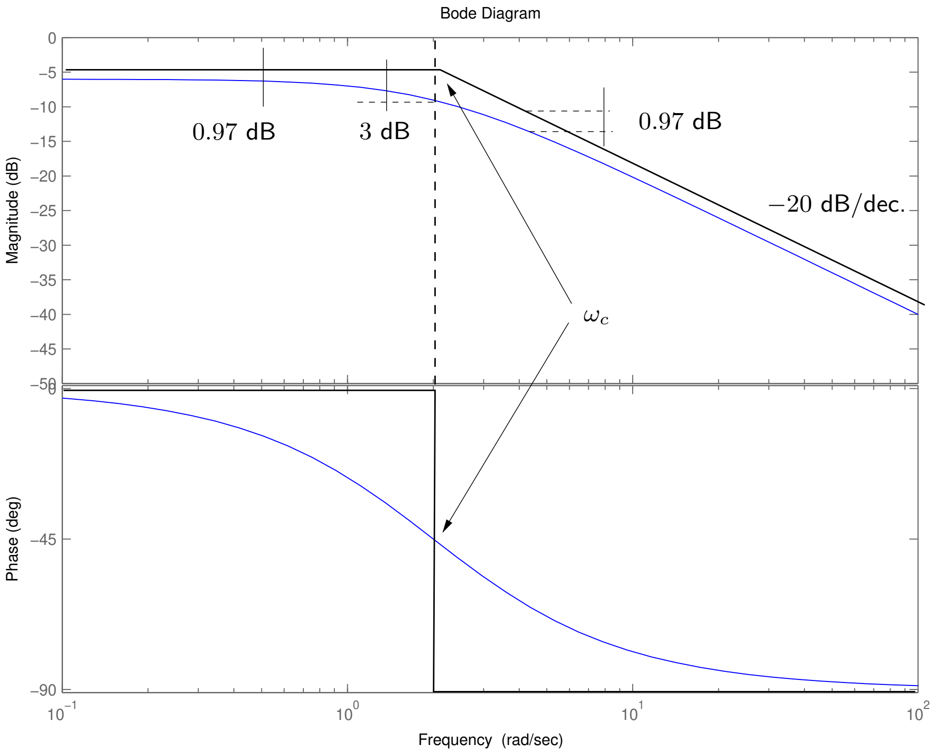
$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}} = 20\mathrm{Log}_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\right) \text{ dB} \\ \Phi &= -\tan^{-1}(\omega T) \end{aligned}$$

- Pour les basses fréquences, $\omega \ll \omega_c = 1/T$: asymptote horizontale à 0 dB

$$-20\mathrm{Log}_{10}(\sqrt{1+\omega^2T^2}) \sim -20\mathrm{Log}_{10}(1) = 0 \text{ dB}$$

- En hautes fréquences, $\omega \gg \omega_c = 1/T$: droite de pente -20 dB/décade ou -6 dB/octave

$$-20\mathrm{Log}_{10}(\sqrt{1+\omega^2T^2}) \sim -20\mathrm{Log}_{10}(\omega T) \text{ dB}$$



ω rad/s	Φ deg
$1/T$	45
$1/2T$	26.6
$1/10T$	5.7
$2/T$	63.4
$10/T$	84.3

FIGURE 2 – Tracé dans le plan de Bode de $1/(p+2)$

- L'erreur maximale est pour $\omega_c = 1/T$ et vaut -3 dB
- L'erreur pour $\omega = 2/T$ et $\omega = 1/2T$ vaut -0.97 dB

➥ Fonction de transfert sinusoïdale :

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

➥ Etude de l'amplitude :

$$|G(j\omega)| = -20\text{Log}_{10}\left(\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

- $\omega \ll \omega_n$: $|G(j\omega)| \sim -20\text{Log}_{10}(1) = 0$ dB

Asymptote horizontale à 0 dB

- $\omega \gg \omega_n$: $|G(j\omega)| \sim -20\text{Log}_{10}\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) = -40\text{Log}_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$

Asymptote de pente -40 dB/décade

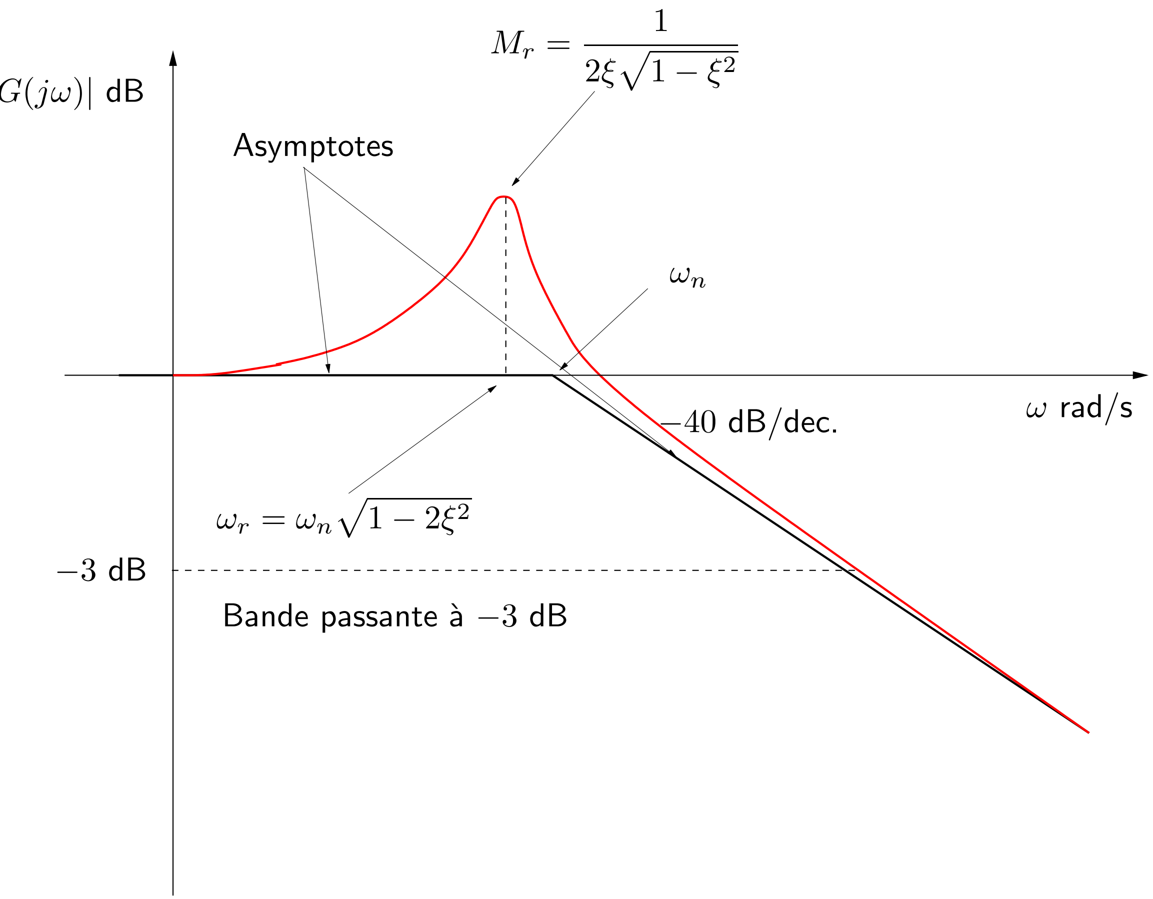
➥ Etude de la phase :

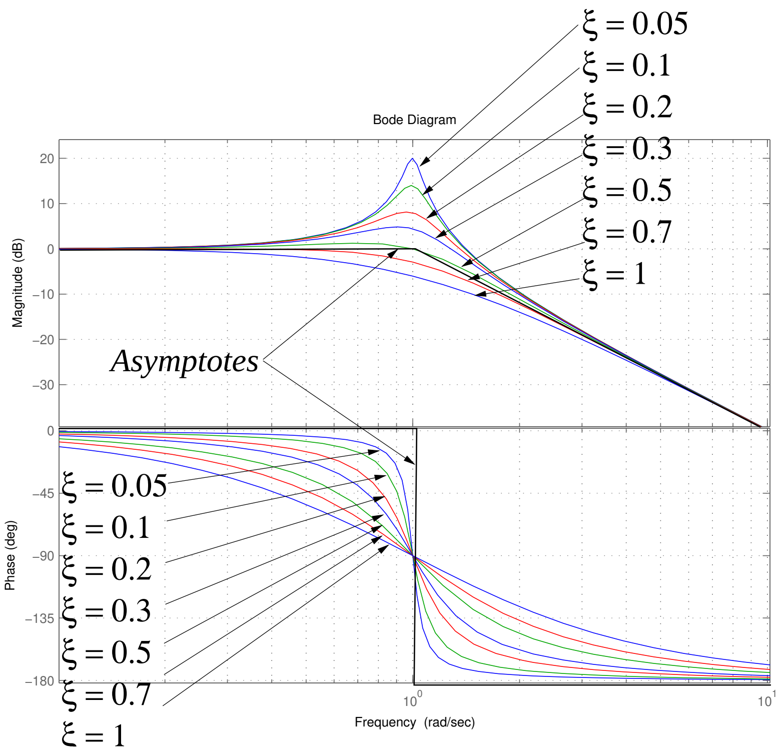
$$\Phi = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi(\frac{\omega}{\omega_n})}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$

$\omega = 0$	$\Phi = 0$ deg		asymptote horizontale
$\omega = \omega_n$	$\Phi = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi}{0}\right) = -90$ deg		point d'inflexion
$\omega = \infty$	$\Phi = -180$ deg		asymptote horizontale

▼ **Définition 7** : *pic de résonnance*

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \qquad M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$





▼ **Définition 8** :

La pulsation de cassure d'un second ordre est définie par

$$\omega_c = \omega_n$$

Règles de construction

- Gain : K
- Facteurs d'intégration ou de dérivation : $(j\omega T)^{\pm 1}$
- Facteurs du premier ordre : $(1 + j\omega)^{\pm 1}$
- Facteurs quadratiques : $[1 + 2\,(\xi/\omega_n)\,j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$

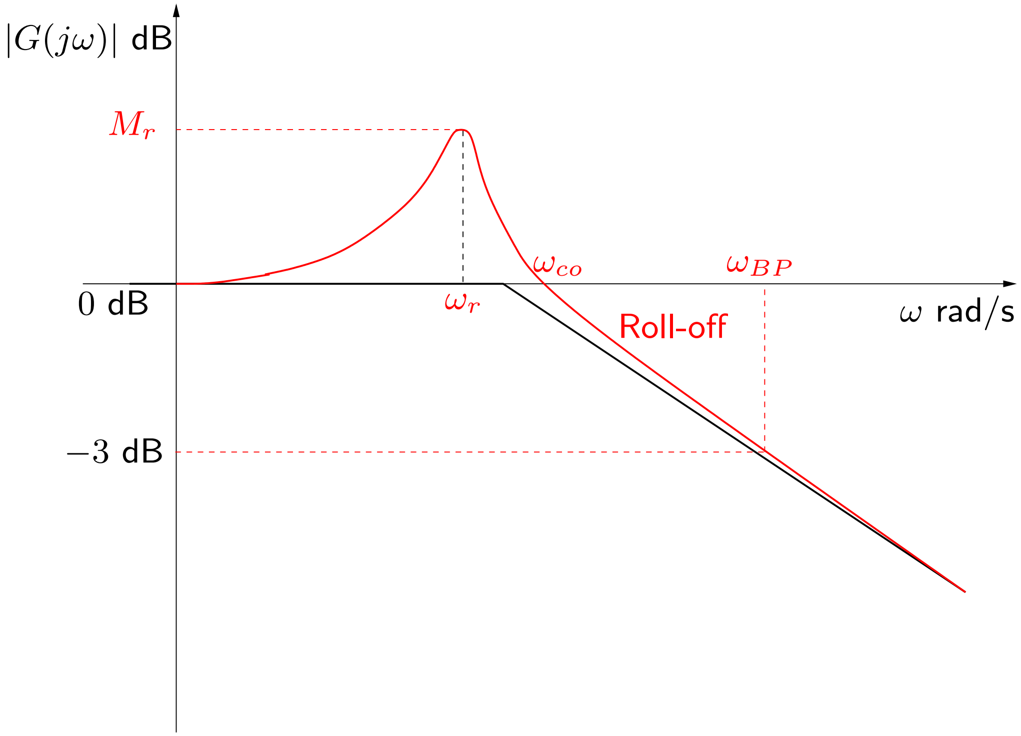
Procédure 1 *:*

1- Ecrire la fonction de transfert sinusoïdale comme une factorisation des termes élémentaires

2- Identifier les fréquences de cassure caractéristiques associées à ces facteurs de base

3- Tracer les courbes asymptotiques

4- Calculer le module et la phase de la fonction de transfert et tracer quelques points afin d'obtenir la courbe exacte



Spécifications fréquentielles de performance

- Pic de résonance M_r :

$$M_r^{ord\ 2} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad \xi \leq 0.707$$

$$1.1 \leq M_r \leq 1.5$$

- Pulsation de résonance ω_r :

$$\omega_r^{ord\ 2} = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad \xi \leq 0.707$$

- Pulsation de coupure ω_{co} :

$$\omega_{co}^{ord\ 2} = \omega_n\sqrt{4\xi^2-2}$$

$$|G(j\omega_{co}|) = 0 \text{ dB}$$

- Bande passante ω_{BP} :

$$\omega_{BP}^{ord\ 2} = \omega_n\left[(1-2\xi^2)+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}\right]^{1/2}$$

$$|G(j\omega_{BP}|) = -3 \text{ dB}$$

- Roll-off : atténuation de la courbe de gain aux hautes fréquences

Soit le modèle entrée-sortie multivariable $y = G(p)d$ où $y \in \mathbb{R}^r$ et $d \in \mathbb{R}^m$.

- On applique une sinusoïde $d_j(t) = d_{j0}\sin(\omega t + \alpha_j)$ sur l'entrée j alors $y_i(t) = y_{i0}\sin(\omega t + \beta_i)$

$$\boxed{\frac{y_{i0}}{d_{j0}} = |g_{ij}(j\omega)| \quad \beta_i - \alpha_j = \arg\left[g_{ij}(j\omega)\right]}$$

- On applique simultanément sur chaque entrée des signaux sinusoïdaux de même fréquence ω + principe de superposition

$$y_i(\omega) = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(j\omega)d_j(\omega) \quad y(\omega) = G(j\omega)d(\omega)$$

Nota : $d_j(\omega) = d_{0j}e^{j\alpha_j}$

- Gain des systèmes SISO :

$$\frac{|y(\omega)|}{|d(\omega)|} = \frac{|G(j\omega)d(\omega)|}{|d(\omega)|} = f(\omega) = |G(j\omega)|$$

- Gain des systèmes MIMO :

$$\frac{||y(\omega)||_2}{||d(\omega)||_2} = \frac{||G(j\omega)d(\omega)||_2}{||d(\omega)||_2} = f(\omega)$$

Nota :

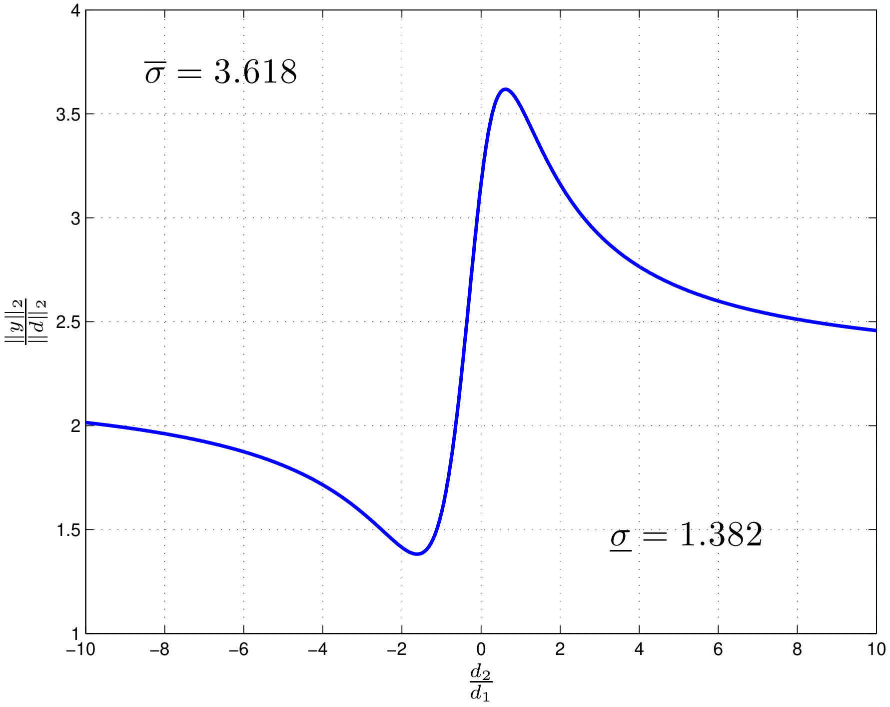
- $f(\omega)$ est indépendante de $||d(\omega)||$ mais dépend de la direction d'entrée d
- La notion de phase pour les systèmes multivariables est complexe à définir et ne sera pas abordée dans ce cours

Exemple : $G = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ||y_1||_2 = \sqrt{10}$$

$$d_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad ||y_2||_2 = \sqrt{5}$$

$$d_3 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \end{bmatrix} \qquad ||y_3||_2 = 1.5811$$



▼ **Définition 9** *:*

- *La valeur maximale du gain quand l'entrée varie est la valeur singulière maximale de G :*

$$\max_{d\neq 0}\frac{||Gd||_2}{||d||_2}=\max_{||d||_2=1}||Gd||_2=\overline{\sigma}(G)$$

- *La valeur minimale du gain quand l'entrée varie est la valeur singulière minimale de G :*

$$\min_{d\neq 0}\frac{||Gd||_2}{||d||_2}=\min_{||d||_2=1}||Gd||_2=\underline{\sigma}(G)$$

Nota : le gain est indépendant de l'amplitude d'entrée

▼ **Définition 10** : *Décomposition en valeurs singulières*

$A \in \mathbb{C}^{l\times m}$ *peut être factorisée à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières :*

$$A = U\Sigma V^H \qquad U \in \mathbb{C}^{l\times l} \quad U^H = U^{-1} \quad V \in \mathbb{C}^{m\times m} \quad V^H = V^{-1}$$

Σ *est formée par une matrice diagonale des valeurs singulières* σ_i *dans l'ordre décroissant*

- $l \geq m$:

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c} \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_q) \\ \hline \mathbf{0}_{l-m\times m} \end{array}\right] \qquad \sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^H)} = \sqrt{\lambda_i(A^H A)}$$

- $l \leq m$:

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_q) & \mathbf{0}_{l\times m-l} \end{array}\right]$$

avec $\overline{\sigma} = \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_q = \underline{\sigma} > 0$ *et* $\min(l, m) \geq \mathrm{rang}(A) = q$, Soit $G(j\omega) \in \mathbb{C}^{r \times m}$ une matrice de réponse fréquentielle telle que sa SVD pour ω fixée est

$$G(j\omega) = U\Sigma(\omega)V^H \quad \Sigma(\omega) = \begin{bmatrix} \overline{\sigma}(\omega) & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \underline{\sigma}(\omega) & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

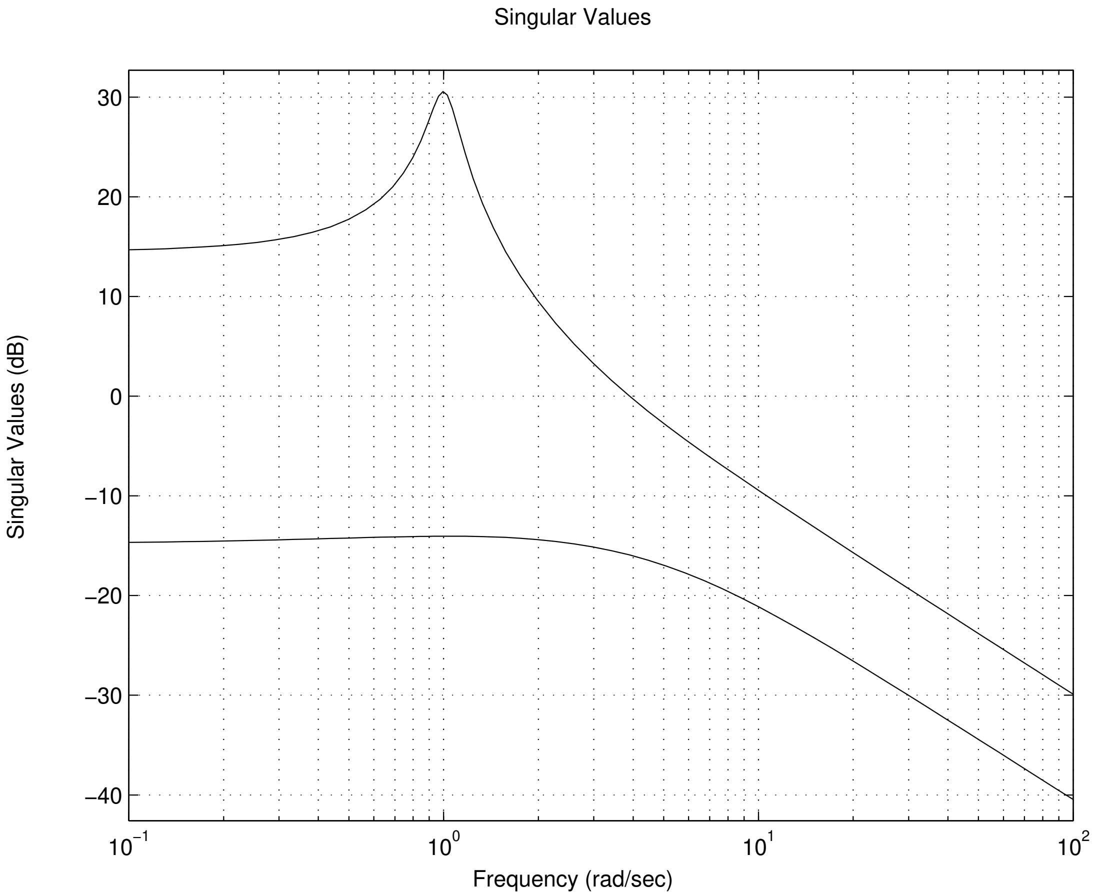
▼ **Définition 11** *:*

Les valeurs singulières sont appelées valeurs principales ou gains principaux. De plus, on définit les directions d'entrée v_j *et de sortie* u_i *:*

$$V = [v_j]_{j=1,\cdots,m} \quad U = [u_i]_{i=1,\cdots r} \quad G(j\omega)V = U\Sigma(\omega) \quad Gv_j = \sigma_i u_i \quad \sigma_i = ||Gv_j||_2$$

Nota : la ième valeur singulière donne le gain dans la direction i.

Exemple : modèle deux entrées - deux sorties



≫ A=[-0.1+j 1 -1 ;0 -0.1-j 2 ;0 0 -6] ;

≫ B=[0 1 ; 1 0 ; 1 1] ;

≫ C=[3 1 0 ;-1 0 1] ;

≫ D=[0 0 ;0 0] ;

≫ sys=ss(A,B,C,D) ;

≫ sigma(sys)