Représentation et analyse des systèmes linéaires

Petite classe No. 4

1 Exercices

Exercice 1 :

Soit les modèles décrits par leur équation différentielle entrée-sortie :

$$1- \quad 9\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + 4x(t) = u(t)$$

$$2- \quad \ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + 4x(t) = u(t)$$

où $u(t)$ est un échelon de position. On souhaite imposer les spécifications temporelles suivantes :
- Le premier dépassement doit être le plus petit possible et inférieur à 20 %
- Le temps de montée t_r doit être aussi petit que possible et ne doit pas dépasser 3 s..

Déterminer c afin de vérifier au mieux ces deux spécifications en privilégiant la première si cela n'est pas possible.

Exercice 2 :

Calculer ξ, τ, ω_n et ω_p quand c'est possible pour les pôles suivants :

$$1- \ p = -2 \pm 6i \quad 2- \ p = 1 \pm 5i \quad 3- \ p = -10 \quad 4- \ p = -2 \pm 2i$$

Exercice 3 :

Un modèle LTI du quatrième ordre a les pôles suivants :

$$p = -2 \pm 4i \quad p = -10 \pm 7i$$

Identifier les pôles dominants et en déduire la constante de temps, le coefficient d'amortissement et la pulsation propre non amortie du système.

Exercice 4 :

Calculer le premier dépassement, le temps de crête, le temps de montée et le temps d'établissement à 5 % du système de modèle LTI :

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 8x(t) = 2$$

Exercice 5 :

Montrer que le temps de crête est identique pour des pôles de même partie imaginaire.

Exercice 6 :

Mettre le système décrit par l'équation différentielle sous forme d'équation d'état :

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$$

Calculer les modes du système.

Exercice 7 :

Trouver les modes du modèle d'état :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t)$$

Calculer la réponse libre pour les conditions initiales :

$$\begin{array}{lll} 1- & x_1(0) = 10 & x_2(0) = 0 \\ 2- & x_1(0) = 10 & x_2(0) = -10 \\ 3- & x_1(0) = 10 & x_2(0) = 10 \end{array}$$

Exercice 8 :

En supposant que le système mécanique de la figure 8 est initialement au repos, calculer la réponse complète du système en x et sa réponse en régime permanent. On supposera que le système est sous-amorti.

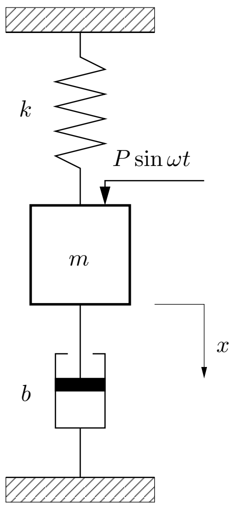

FIG. 1 – Système masse-ressort-amortisseur

2 Solution des exercices

Exercice 1 :

1- Le système a pour fonction de transfert :

$$\frac{X(p)}{U(p)} = \frac{1/9}{p^2 + c/9p + 4/9} = \frac{1/9}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$$

avec $\omega_n^2 = 4/9$ et $2\zeta\omega_n = c/9$. Soit $\omega_n = 2/3$ et $\zeta = c/12$. Le premier dépassement $D_1 = M_p$ et le temps de montée t_r s'écrivent :

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}\zeta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Après substitution, on obtient :

$$\ln(0.2) = \frac{-\pi c}{\sqrt{144 - c^2}} \quad 1/6 = \frac{\pi - \cos^{-1}(c/12)}{\sqrt{144 - c^2}}$$

On ne peut satisfaire les deux en même temps et on privilégie la première. On obtient alors :

$$c = \frac{12|\ln(0.2)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.2)}} = 5.4714 \quad M_p = 0.2 \quad t_r = 3.44 \text{ s}$$

2- Le système a pour fonction de transfert :

$$\frac{X(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^2 + cp + 4} = \frac{1}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$$

avec $\omega_n^2 = 4$ et $2\zeta\omega_n = c$. Soit $\omega_n = 2$ et $\zeta = c/4$. Le premier dépassement $D_1 = M_p$ et le temps de montée t_r s'écrivent :

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}\zeta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

On peut satisfaire les deux en même temps. On obtient alors :

$$c = \frac{4|\ln(0.2)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.2)}} = 1.8238 \quad M_p = 0.2 \quad t_r = \frac{\pi - \cos^{-1} c/4}{\omega_n\sqrt{1 - c^2/16}} = 1.1484 \text{ s}$$

Exercice 2 :

1- Le pôle est stable donc

$$\zeta = \frac{2}{\sqrt{4+36}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0.3162 \quad \omega_n = \frac{2}{\zeta} = 2\sqrt{10} = 6.32 \text{ rad/s}$$

$$\omega_p = 6 \text{ rad/s} \qquad \tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} = 0.5 \text{ s}$$

2- Le pôle est instable donc cela n'a pas de sens de calculer les quantités demandées.

3- Le pôle est un pôle réel et stable.

$$\tau = 0.1 \text{ s}$$

3- Le pôle complexe est stable donc

$$\zeta = \frac{2}{\sqrt{4+4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \quad \omega_n = \frac{2}{\zeta} = 2\sqrt{2} = 2.83 \text{ rad/s}$$

$$\omega_p = 2 \text{ rad/s} \qquad \tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} = 0.5 \text{ s}$$

Exercice 3 :

Le pôle dominant est $-2 \pm 4i$ et les caractéristiques associées spnt donc :

$$\tau = 0.5 \text{ s} \quad \zeta = \frac{2}{\sqrt{4+16}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \omega_n = \frac{2}{\zeta} = 2\sqrt{5} \text{ rad/s}$$

Exercice 4 :

La fonction de transfert associée à l'équation différentielle est donnée par :

$$\frac{2}{p^2+4p+8} = \frac{2}{p^2+2\zeta\omega_n p+8}$$

$$M_p = e^{-\dfrac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\pi} = 4\ \% \qquad t_p = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{pi}{2} = 1.5708 \text{ s}$$

$$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}\zeta}{\omega_p} = \frac{\pi - \cos^{-1}(1/\sqrt{2})}{2} = 1.1781 \text{ s} \quad t_s^{5\%} = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ s}$$

Exercice 5 :

Le temps de crête est défini par $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_p}$ où ω_p est la partie imaginaire de la paire de pôles complexes conjugués. Si deux paires ont la même partie imaginaire, ils conduiront donc au même temps de crête.

Exercice 6 :

En choisissant les variables d'état $x_1 = x$ et $x_2 = \dot{x}$, on obtient les équations d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Les modes sont les valeurs propres de la matrice dynamique. Il y a deux modes apériodiques -2 et -1.

Exercice 7 :

La matrice dynamique associée à cette représentation d'état est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Les modes associés sont deux modes apériodiques 0 et -1.
La réponse libre se calcule par la formule $x(t) = e^{At}x(0)$. On obtient donc pour l'exponentielle de matrice :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$1- \quad x(t) = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2- \quad x(t) = \begin{bmatrix} 10e^{-t} \\ -10e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$3- \quad x(t) = \begin{bmatrix} 20-10e^{-t} \\ 10e^{-t} \end{bmatrix}$$

Exercice 8 :

L'équation du mouvement de ce système masse-ressort-amortisseur est donnée par :

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = P \sin \omega t$$

Cela permet d'écrire en utilisant la transformée de Laplace et en supposant que le système est initialement au repos et à l'équilibre, $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$:

$$X(p) = \frac{P\omega}{p^2 + \omega^2} \frac{1}{mp^2 + bp + k}$$

Du fait que l'on a supposé que le système est sous-amorti, on a

$$X(p) = \frac{P\omega}{m} \frac{1}{p^2 + \omega^2} \frac{1}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} \quad 0 < \zeta < 1$$

où $\omega_n = \sqrt{k/m}$ et $\zeta = b/(2\sqrt{mk})$. Après une décomposition en éléments simples, on obtient :

$$\begin{aligned} X(p) \quad &= \quad \frac{P\omega}{m} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2} \left[\frac{-2\zeta\omega_n p + (\omega_n^2 - \omega^2)}{p^2 + \omega^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\zeta\omega_n(p + \zeta\omega_n) + 2\zeta^2\omega_n^2 - (\omega_n^2 - \omega^2)}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} \right] \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Laplac inverse, on obtient alors la réponse complète du système :

$$\begin{aligned} x(t) \quad &= \quad \frac{P\omega}{m[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2)} \left[-2\zeta\omega_n \cos \omega t + \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)}{\omega} \sin \omega t \right. \\ &\quad + 2\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \\ &\quad \left. + \frac{2\zeta^2\omega_n^2 - (\omega_n^2 - \omega^2)}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right] \end{aligned}$$

Pour obtenir la réponse en régime permanent, on prend la limite de $x(t)$ quand $t \to \infty$.

$$x_{rp} = \frac{P\omega}{m[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2)} \left[-2\zeta\omega_n \cos \omega t + \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)}{\omega} \sin \omega t \right]$$

Notes bibliographiques

La notion de stabilité étant fondamentale, tous les ouvrages d'Automatique traitent de ce sujet plus ou moins superficiellement. Nous retenons la référence ancienne [8] très rigoureuse sur le fond malgré une forme un peu datée et la référence [32] très complète sur la stabilité des systèmes linéaires et non linéaires. [2] est également une très bonne référence sur le sujet.

Concernant l'analyse transitoire temporelle, tous les manuels généraux en proposent un traitement complet mais [18] et [26] concilient une présentation moderne et rigoureuse.

Les ouvrages recommandés en bibliographie ont été regroupés suivant des catégories ayant trait à leur nature ou au sujet traité si ce dernier est particulièrement pertinent pour un des sujets du chapitre.

- Articles fondateurs : article de H. Nyquist dans [4] ;
- Manuels historiques : [31], [7], [6], [15], [27], [25] ;
- Manuels généraux : [30], [26], [11], [9], [13], [24], [28], [14], [18] ;
- Manuels modernes : [36], [1], [29], [21], [2], [34] ;
- Notions de stabilité : [35], [33], [8], [19], [23], [17], [12], [5], [11], [13], [28], [32], [21], [10], [16], [2], [34] ;
- Analyse transitoire : [3], [22], [20], [11] ;
- Notion de mode : [5], [13], [28], [2]
- Stabilité entrées-sorties : article de H. Nyquist dans [4], [33], [8], [32],
- Critère de Routh-Hurwitz : [11], [28], [21], [10], [2] ;
- Stabilité au sens de Lyapunov : [8], [12], [5], [20], [11], [13], [32], [2] ;
- Méthode de Lyapunov : [12], [5], [11], [32], [21], [2].

Références

[1] A. Abramovici and J. Chapsky. *Feedback control systems : A fast-track guide for scientists and engineers.* Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts, USA, 2000.

[2] P. J. Antsaklis and A. N. Michel. *Linear systems.* Birkhäuser, Boston, Massachussets, USA, 2006.

[3] J. A. Aseltine. *Les méthodes de transformation dans l'analyse des systèmes linéaires.* Dunod, Paris, France, 1964.

[4] T. Basar, editor. *Control theory, twenty-five seminal papers (1932-1981).* IEEE press, Piscataway, New Jersey, USA, 2000.

[5] W. L. Brogan. *Modern Control Theory.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1991.

[6] B. M. Brown. *The mathematical theory of linear systems.* Chapman and Hall, London, UK, 1961.

[7] H. Chesnut and R. W. Mayer. *Servomécanismes et régulation.* Dunod, Paris, France, 1957.

[8] C. A. Desoer. *Notes for a second course on linear systems.* Van Nostrand Reinhold Company, New York, New York, USA, 1970.

[9] R. C. Dorf and R. H. Bishop. *Modern control systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.

[10] S. Engelberg. *A mathematical introduction to control theory.* Imperial College Press, Singapore, Singapore, 2005.

[11] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeni. *Feedback control of dynamic systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 2009.

[12] B. Friedland. *Control system design.* Dover publications, Mineola, New York, USA, 2009.

[13] T. Glad and L. Ljung. *Control theory : Multivariable and nonlinear methods.* Taylor and Francis, New York, New York, USA, 2000.

[14] G.C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado. *Control system design.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2001.

[15] I. M. Horowitz. *Synthesis of feedback systems.* Academic Press, London, UK, 1963.

[16] L. Jaulin. *Représentation d'état pour la modélisation et la commande des systèmes.* Hermès, Paris, France, 2005.

[17] T. Kailath. *Linear Systems.* Prenticed Hall Information and System Sciences Series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1980.

[18] B. C. Kuo and F. Golnaraghi. *Automatic control systems.* John Wiley, New York, New York, USA, 2003.

[19] H. K. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear optimal control systems.* John Wiley, New York, New York, USA, 1972.

[20] H. K. Kwakernaak and R. Sivan. *Modern signals and systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1991.

[21] J. R. Leigh. *Control theory.* MPG books LTD, Bodmin, UK, 2004.

[22] C. L. Liu and J. W. Liu. *Linear system analysis.* Tosho printing company, Tokyo, Japon, 1975.

[23] D. G. Luenberger. *Introduction to dynamic systems.* John Wiley, New York, New York, USA, 1979.

[24] A. G. O. Mutambara. *Design and analysis of control systems.* CRC press, Boca Raton, Florida, USA, 1999.

[25] P. Naslin. *Technologie et calcul pratique des systèmes asservis.* Dunod, Paris, France, 1968.

[26] K. Ogata. *Modern control engineering.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1990.

[27] R. Pallu de la Barrière. *Cours d'automatique.* Dunod, Paris, France, 1966.

[28] W. J. Palm. *Modeling, analysis and control of dynamical systems.* John Wiley, New York, New York, USA, 2000.

[29] M. Schetzen. *Linear time-invariant systems.* John Wiley, New York, New York, USA, 2003.

[30] Y. Takahashi, M. J. Rabins, and D. M. Auslander. *Control and dynamic systems.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachussets, USA, 1970.

[31] J.C. Truxal. *Automatic Feedback Control System Synthesis.* Mc Graw-Hill Electrical and Electronic Engineering Series. Mc Graw-Hill, New York, USA, 1955.

[32] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis.* SIAM Classics in Applied Mathematics. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 2002.

[33] J. C. Willems. *The analysis of feedback systems.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 1969.

[34] D. Xue, Y. Chen, and D. P. Atherton. *Linear feedback control : Analysis and design with MATLAB©.* Advances in design and control. SIAM, Philadelphy, Pennsylvania, USA, 2007.

[35] L. A. Zadeh and C. A. Desoer. *Linear systems theory.* McGraw-Hill book company, New York, New York, USA, 1963.

[36] H. Özbay. *Introduction to feedback control theory.* CRC press, New York, New York, USA, 2000.