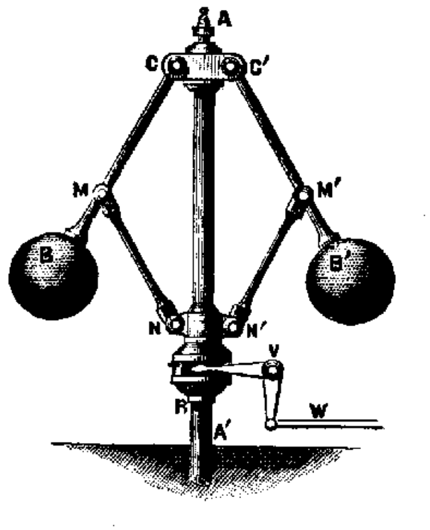
Représentation et analyse des systèmes linéaires

PC 4

Analyse temporelle des systèmes linéaires



✔ Objectif :

Analyse des caractéristiques (performances) dynamiques du système

✔ Méthode :

Analyse des réponses temporelles du système à des entrées types

Signaux d'entrée types

- les signaux échelon (perturbations soudaines)
- les signaux impulsionnels (chocs)
- les signaux rampe (évolution linéaire)
- les signaux accélération (évolution quadratique)

Remarques 1 :

$$u(t) = t^n \qquad\qquad U(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Régime libre - régime forcé

➥ Equation différentielle entrée-sortie :

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_0 u(t)$$

➥ Conditions initiales :

$$U(0) = \left\{ y(0),\ \dot{y}(0), \cdots, y^{(n-1)}(0) \right\}$$

➥ Régime libre : $y_1(t)$ est la réponse à une excitation nulle $u_1(t) = 0$ appliquée à partir de l'état initial réel $U_1(0) = U(0)$

➥ Régime forcé : $y_2(t)$ est la réponse à l'excitation réelle $u_2(t) = u(t)$ appliquée à partir d'un état initial nul $U_2(0) = \{0, \cdots, 0\}$

$$\boxed{y(t) = y_1(t) + y_2(t)}$$

Régime permanent - régime transitoire

➥ Equation différentielle entrée-sortie :

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_0 u(t)$$

➥ La réponse en régime permanent : $y_3(t)$, solution particulière de l'équation différentielle complète

➥ La réponse en régime transitoire : $y_4(t)$, la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène) les n constantes d'intégration étant déterminées de telle sorte que la solution globale $y(t)$ satisfasse aux n conditions initiales

$$\boxed{y(t) = y_3(t) + y_4(t)}$$

- Equation caractéristique :

$$\boxed{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0 = 0}$$

- Chaque racine réelle p_i de multiplicité m_i donne une réponse :

$$\boxed{y_{4i}(t) = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j t^{j-1} e^{p_i t}}$$

- Chaque paire complexe conjuguée $(p_i, \overline{p}_i)$ de multiplicité m_i donne une réponse :

$$\boxed{y_{4i}(t) = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) + \mu_j t^{j-1} e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t)}$$

où $\sigma_i = Re(p_i)$ et $\omega_i = Im(p_i)$

Nota : chaque fonction $y_{4i}(t)$ définit un mode du système

$$G(p) = \frac{b_m p^m + \cdots + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_0} = K \frac{\prod(p - z_j) \prod((p + \alpha_{zj})^2 + \beta_{zj}^2)}{\prod(p - p_i) \prod((p + \alpha_{pi})^2 + \beta_{pi}^2)}$$

▼ **Définition 1** : *mode*

La réponse transitoire $y_4(t)$ est constituée de la combinaison linéaire de fonctions du temps élémentaires définies par la nature (réelle, complexe conjuguée) des racines de l'équation caractéristique. Dans cette combinaison linéaire, chaque fonction élémentaire du temps est appelée mode du système. Ainsi, les racines

- *Chaque pôle réel p_i de multiplicité m_i est un mode apériodique*

$$y_{4i}(t) = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j t^{j-1} e^{p_i t} \ , \ \text{constante de temps } \tau_i = 1/p_i$$

- *Chaque paire de pôles complexes conjugués $(p_i, \overline{p}_i)$ de multiplicité m_i est un mode oscillant*

$$y_{4i}(t) = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) + \mu_j t^{j-1} e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t) \ , \ \text{pulsation } \omega_i$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

- A a n valeurs propres distinctes $p_1, \cdots, p_n$

$$x(t) = Pe^{\Lambda t}P^{-1}x_0 = \sum_{i=1}^{n} e^{p_i t} v_i w_i' x_0$$

où $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix}'$

- A a k valeurs propres distinctes :

$$x(t) = Pe^{Jt}P^{-1}x_0 = \sum_{i=1}^{n} e^{p_i t} M_i(t) x_0 = \left[\sum_{i=1}^{k} T_k e^{J_k t} U_k\right] x_0$$

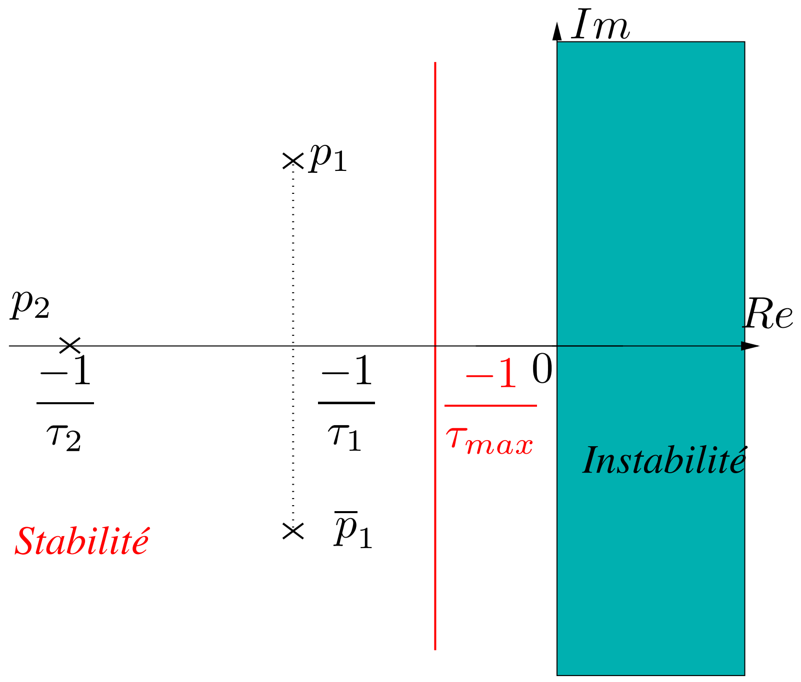
▼ **Définition 2** : *mode*

Les différents termes des sommes sont appelés les modes du système

▼ Définition 3 : *rapidité*

Le temps de disparition de la composante transitoire associée à un mode définit la rapidité de ce mode

$$\boxed{\tau_i = -1/Re[p_i]}$$



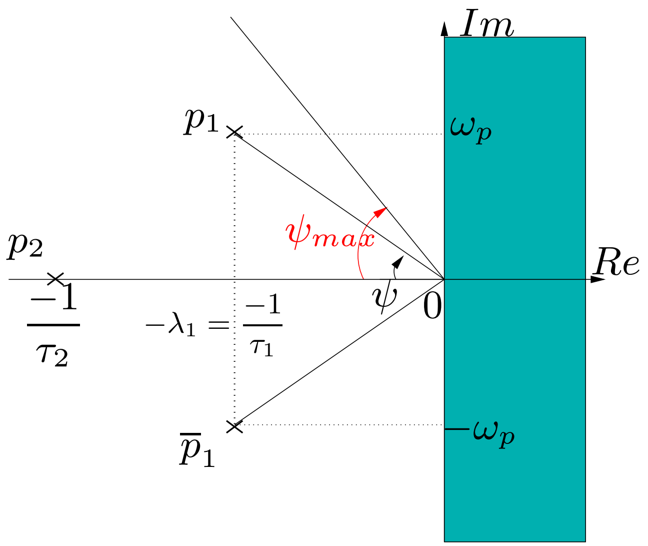
$$\boxed{\forall\ i \quad : \quad \tau_i < \tau_{max}}$$

▼ **Définition 4** : *facteur d'amortissement*

Pour un mode oscillatoire, la convergence des oscillations est caractérisée par le paramètre $0 \leq \xi \leq 1$ *appelé facteur d'amortissement*

$$\boxed{\xi_i = \left|\frac{Re(p_i)}{p_i}\right| = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i^2+\omega_{pi}^2}}}$$

pour $p_i = -\lambda_i + j\omega_{pi}$



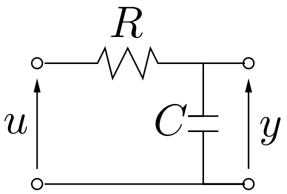
$$\boxed{\forall\ i \quad \xi_i \geq \xi_{min} = \cos(\psi_{max})}$$

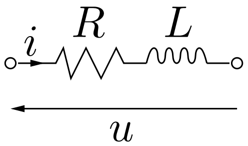
Les systèmes du premier ordre

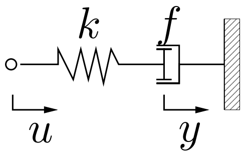
➥ Equation différentielle et fonction de transfert :

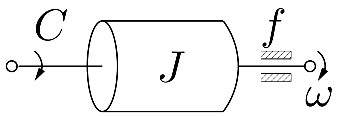
$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \qquad\qquad H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{1+Tp}$$

Nota : T est la constante de temps









Exemple : moteur à cc

Hypothèse : $\tau_L \lll \tau_f$

$$\frac{\omega(p)}{V_f(p)} \sim \frac{K_m/fR_f}{(\tau_f p + 1)}$$

➥ La réponse transitoire :

$$y_4(t) = \lambda e^{-t/T}$$

➥ Réponse impulsionnelle :

$$U(p) = 1$$

$$\boxed{y(t) = y_4(t) + y_3(t) = \lambda e^{-t/T} = \frac{K}{T} e^{-t/T} \quad t \geq 0}$$

➥ Réponse indicielle :

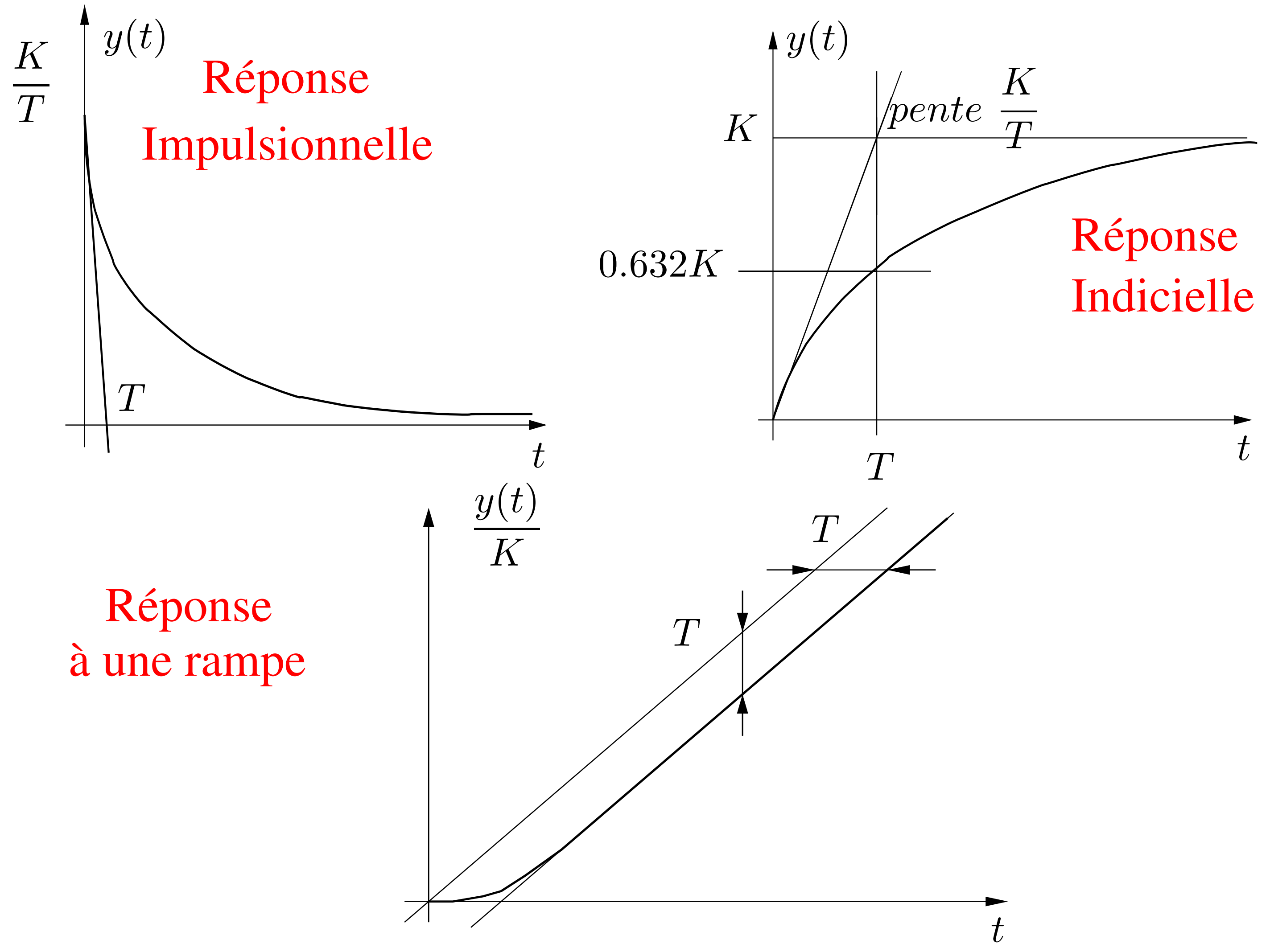
$$U(p) = 1/p$$

$$\boxed{y(t) = y_4(t) + y_3(t) = \lambda e^{-t/T} + K = K(1 - e^{-t/T}) \quad t \geq 0}$$

➥ Réponse à une rampe :

$$U(p) = 1/p^2$$

$$\boxed{y(t) = y_4(t) + y_3(t) = \lambda e^{-t/T} + Kt - KT = K(t - T + Te^{-t/T}) \quad t \geq 0}$$



K/T
y(t)
Réponse
Impulsionnelle
T
t
y(t)
K
pente K/T
0.632K
Réponse
Indicielle
T
t
y(t)/K
T
T
Réponse
à une rampe
t

➥ Equation différentielle :

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

➥ Fonction de transfert :

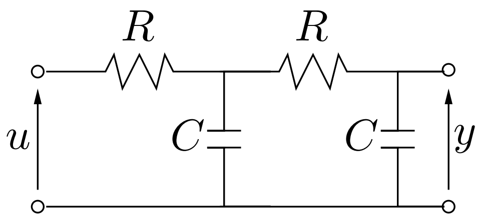
$$H(p) = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

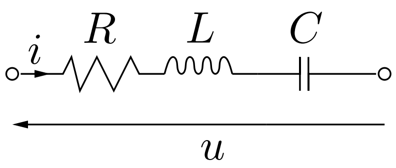
$$H(p) = \frac{K}{\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\frac{p}{\omega_n} + 1} = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

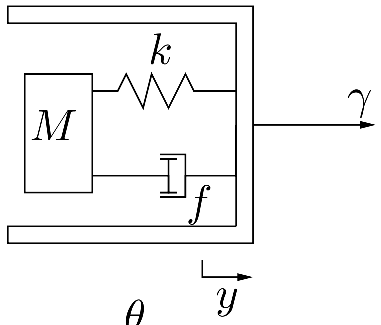
- $K = \frac{b_0}{a_0}$ est le gain statique
- $\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ est la pulsation propre non amortie
- $\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$ est le coefficient (facteur) d'amortissement

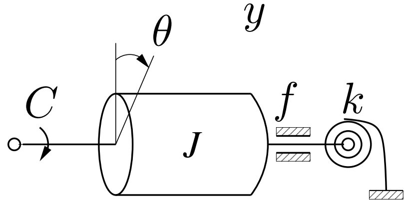
Exemples de systèmes du second ordre

$$H(p) = \frac{K}{\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\frac{p}{\omega_n} + 1} = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$









- Polynôme caractéristique :

$$p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2 = 0$$

- Discriminant :

$$\Delta' = (\xi^2 - 1)\omega_n^2$$

$\xi > 1$

$$\boxed{y(t) = K\left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-t/T_2}\right]}$$

$$p_2^1 = -\frac{1}{T_2^1} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

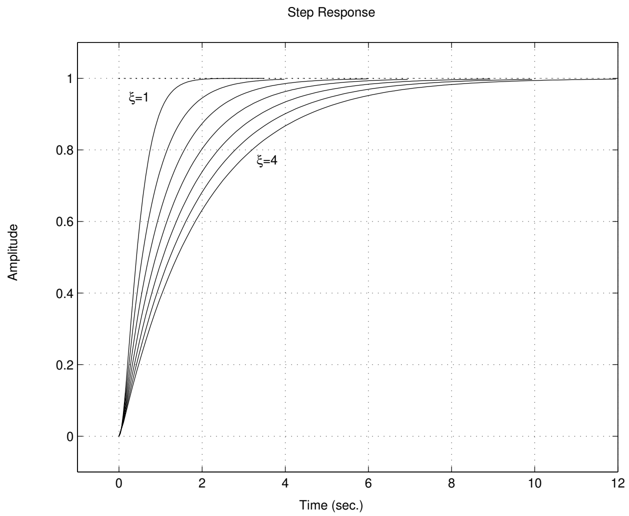
$$y_4(t) = \lambda_1 e^{-t/T_1} + \lambda_2 e^{-t/T_2} \quad y_3(t) = K$$

$\xi = 1$

$$\boxed{y(t) = K\left[1 - (1 + t/T) e^{-t/T}\right]}$$

$$p = -\frac{1}{T} = -\xi\omega_n = -\omega_n$$

$$y_4(t) = (\lambda + \mu t) e^{-t/T} \quad y_3(t) = K$$



Réponse indicielle des systèmes sous-amortis : $\xi < 1$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y(t) & = & K\left[1 - \frac{\sin(\omega_p t + \psi)}{\sin(\psi)} e^{-\mathrm{cotan}(\psi)\omega_p t}\right] \\ y(t) & = & K\left[1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos(\omega_p t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_p t)\right)\right] \end{array}}$$

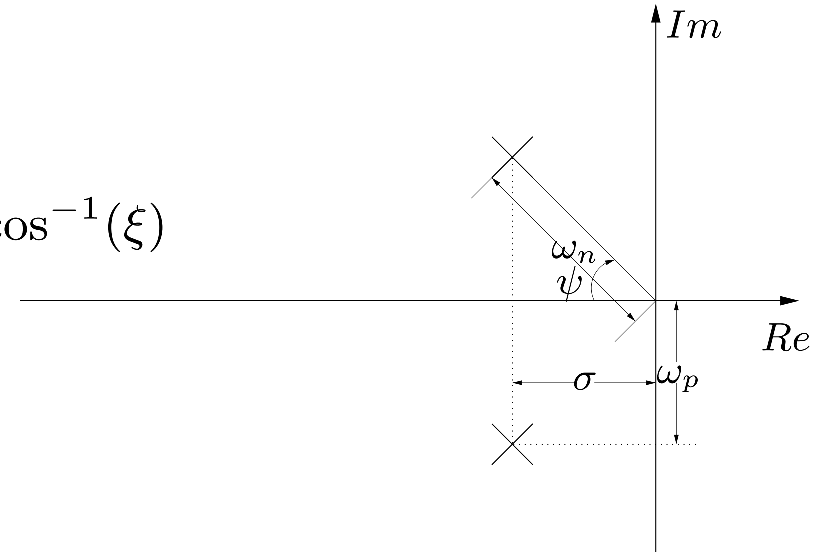
$$p_2^1 = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\begin{array}{rcl} y_4(t) & = & e^{-t/T}\left[\lambda_1 e^{j\omega_p t} + \lambda_2 e^{-j\omega_p t}\right] \\ & = & Ae^{-t/\tau}\sin(\omega_p t + \psi) \\ y_3(t) & = & K \end{array}$$

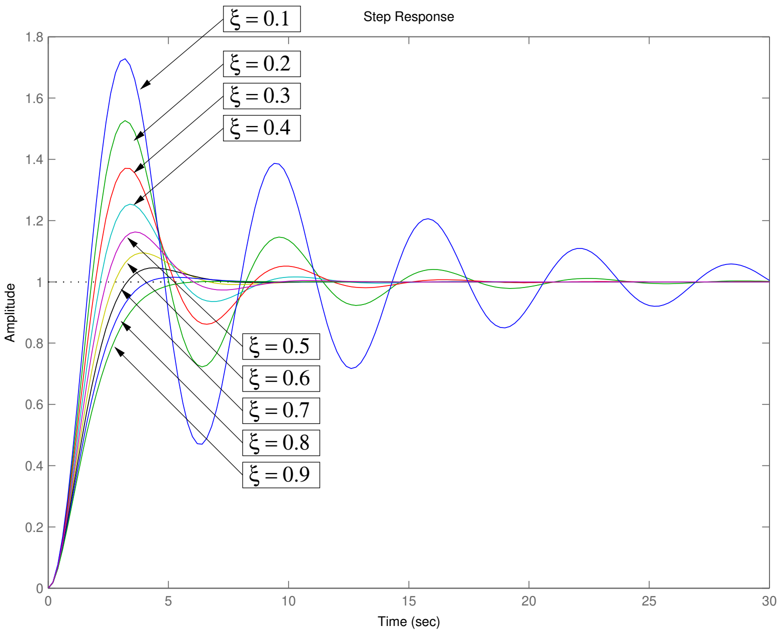
$$\psi = \cos^{-1}(\xi)$$

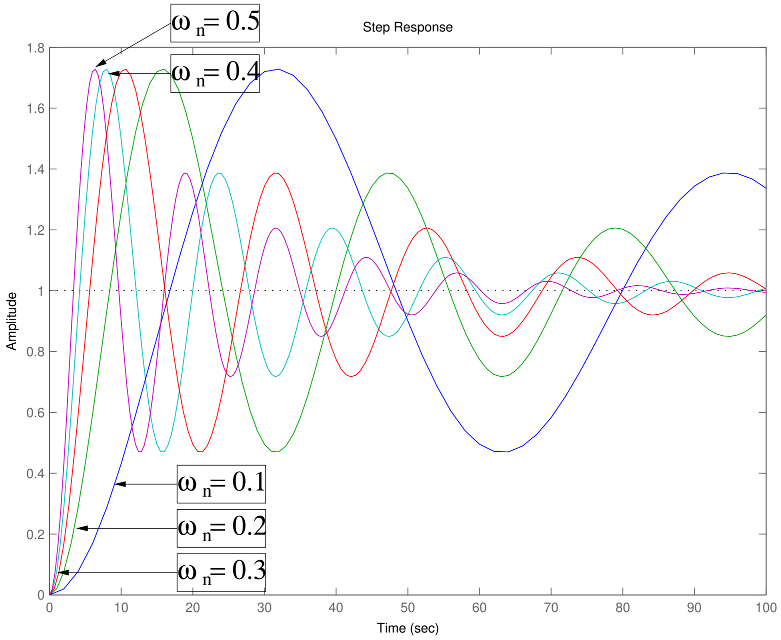
$$\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} = \frac{1}{\sigma}$$

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$



Réponse indicielle des systèmes sous-amortis : $\xi < 1$

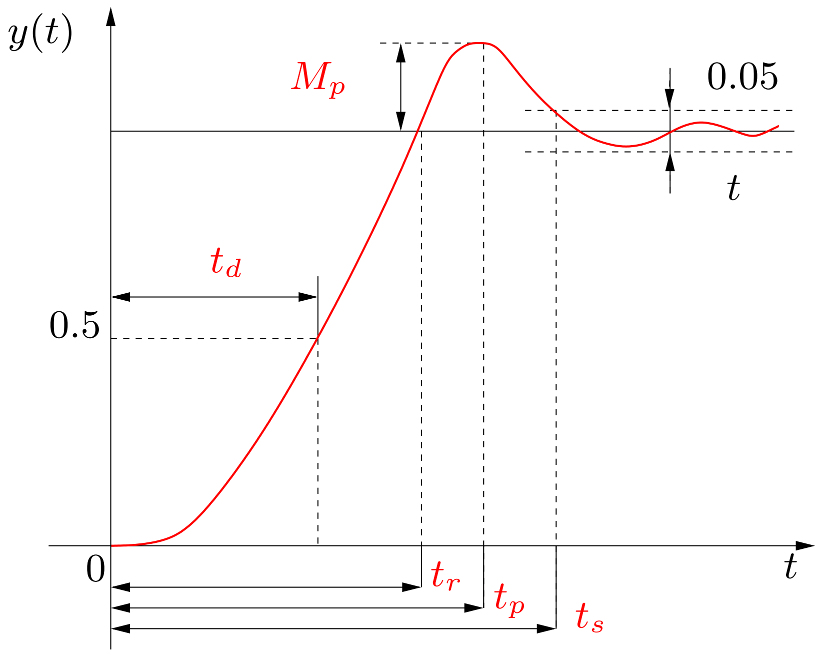




$$\begin{aligned} D_k &= \frac{y(kT/2)-y(\infty)}{y(\infty)} \\ &= -[e^{-\pi \mathrm{cotan}(\psi)}]^k \\ &= -(-D_1)^k \end{aligned}$$

$$\xi = \left(1 + \frac{\pi^2}{\ln^2(D_1)}\right)^{-1/2}$$

$$D_1 = e^{-\pi \mathrm{cotan}(\psi)} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



Spécifications de performance

- Dépassement maximal (overshoot) M_p

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \begin{cases} 5\ \% & \xi = 0.7 \\ 16\ \% & \xi = 0.5 \end{cases}$$

- Temps de montée (rise time) t_r

$$t_r = \frac{\pi - \psi}{\omega_p} = \frac{\pi - \cos^{-1}(\xi)}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \qquad t_r \geq \frac{1.8}{\omega_n}$$

- Temps d'établissement (settling time) t_s

$$t_s = -\frac{1}{\xi\omega_n}\ln\left(c_{ts}\sqrt{1-\xi^2}\right)$$
$$t_s^{5\%} = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{\sigma} \qquad t_s^{1\%} = \frac{4.6}{\xi\omega_n} = \frac{4.6}{\sigma}$$

- temps de crête (peak time) $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_p}$

$$H(p) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(p - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(p - p_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p - p_i} \qquad h(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{p_i t} \qquad a_i = K\frac{\prod_{k\neq i}^{m}(p_i - z_k)}{\prod_{j\neq i}^{n}(p_i - p_j)}$$

- si $\exists\ z_k \sim p_i$, la contribution de p_i sera faible
- si $\exists\ p_k \sim p_i$, leurs contributions seront prépondérantes

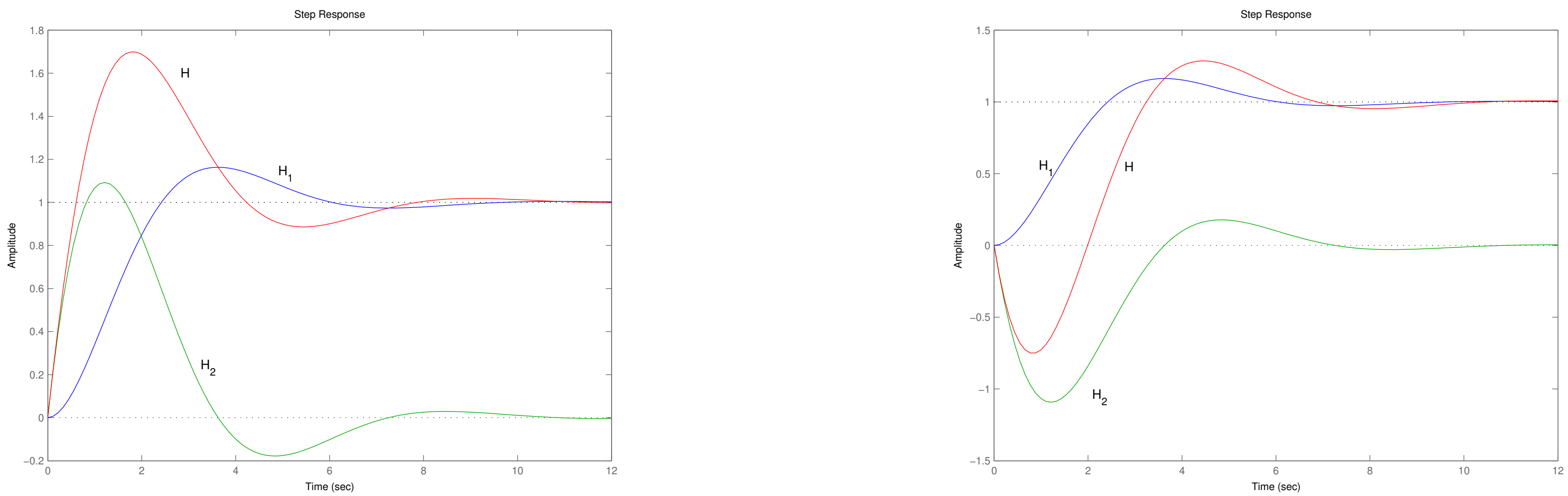
$$y(t) = K + \sum_{i=1}^{n} b_i e^{p_i t} \qquad b_i = a_i / p_i$$

▼ **Définition 5** : *pôles dominants*

Les pôles les plus proches de l'axe imaginaire seront appelés les pôles dominants

Exemple : $\omega_n = 1$:

$$H(p) = \frac{\frac{p}{\alpha\xi}+1}{p^2+2\xi p+1} = \underbrace{\frac{1}{p^2+2\xi p+1}}_{H_1(p)} + \underbrace{\frac{1}{\alpha\xi}\frac{p}{p^2+2\xi p+1}}_{H_2(p)} \qquad h_2(t) = \frac{1}{\alpha\xi}\frac{dh_1(t)}{dt}$$



- $p_{add} + p_{dom}$ augmente le temps de montée si $|p_{add}| \leq 4|Re(p_{dom})|$
- z stable $+\ p_{dom}$ augmente le dépassement si $|z_{add}| \leq 4|Re(p_{dom})|$
- z instable $+\ p_{dom}$ diminue le dépassement mais provoque le phénomène de réponse inverse