Représentation et analyse des systèmes linéaires

Petite classe No. 3

1 Compléments sur les formes canoniques compagnes

Toute matrice carrée réelle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ peut être transformée par une transformation de similarité en une des quatre formes suivantes appelées *formes compagnes* du polynôme caractéristique :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} & \mathbf{1}_{n-1} \\ \times & \times \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \times & \times \\ \mathbf{1}_{n-1} & \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \times & \mathbf{1}_{n-1} \\ \times & \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} & \times \\ \mathbf{1}_{n-1} & \times \end{bmatrix} \tag{1}$$

où la ligne ou colonne $\begin{bmatrix} \times & \times \end{bmatrix}$ est construite avec les coefficients $-a_0$, $-a_1$, $\cdots$,$-a_{n-1}$ du polynôme caractéristique $\det(\lambda\mathbf{1}_n - A)$ de la matrice A. Cette propriété est maintenant mise en œuvre sur les modèles d'état des systèmes dynamiques LTI.

1.1 Formes compagnes de commandabilité

On considère une réalisation d'état LTI commandable donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{array} \tag{2}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{r\times m}$. On suppose que les matrices B et C sont de rang plein. La fonction de transfert associée à la représentation d'état (2) s'écrit :

$$F(p) = C(p\mathbf{1} - A)^{-1}B + D = \frac{b_n p^n + \cdots + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0} = b_n + \frac{\alpha_{n-1}p^{n-1} + \cdots + \alpha_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0} \tag{3}$$

La matrice de commandabilité associée à la réalisation d'état (2) est une matrice inversible donnée par :

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{4}$$

Son inverse est notée par $\mathcal{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \times \\ q \end{bmatrix}$ où $q \in \mathbb{R}^{1\times n}$ est sa dernière ligne. Nous définissons une première transformation de similarité caractérisée par sa matrice de passage $P = P_1^{-1}$.

$$P_1 = \begin{bmatrix} q \\ qA \\ \vdots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Cette transformation de similarité permet de passer de la réalisation d'état (2) à la forme compagne de commande définie dans le cours par :

$$A_{c_1} = P_1 A P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_i & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_{c_1} = P_1 B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$C_{c_1} = C P_1^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \cdots & \alpha_i & \cdots & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad D_{c_1} = b_n$$

Une forme alternative de la forme (6) peut être obtenue en choisissant une transformation de similarité caractérisée par la matrice $P = P_2^{-1}$ où :

$$P_2 = \begin{bmatrix} qA^{n-1} \\ qA^{n-2} \\ \vdots \\ q \end{bmatrix} \tag{7}$$

On obtient alors la forme compagne de commande :

$$A_{c_2} = P_2 A P_2^{-1} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & \cdots & -a_i & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{c_2} = P_2 B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$C_{c_2} = C P_2^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_i & \cdots & \alpha_0 \end{bmatrix} \qquad D_{c_2} = b_n$$

Deux autres formes compagnes de commande peuvent être construites en utilisant une transformation de similarité adéquate. Pour $P = \mathcal{C}$, on obtient la forme canonique compagne de commande suivante.

$$A_{c_3} = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_i \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_{c_3} = P^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$C_{c_3} = CP = \begin{bmatrix} \beta_{n-1} & \cdots & \beta_i & \cdots & \beta_0 \end{bmatrix} \qquad D_{c_3} = b_n$$

où C_{c_3} n'a aucune structure particulière. Enfin, si l'on choisit la matrice de passage comme $P = \begin{bmatrix} A^{n-1}B & \cdots & AB & B \end{bmatrix}$, on obtient la dernière forme canonique compagne de commande :

$$A_{c_4} = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_i & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad B_{c_4} = P^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$C_{c_4} = CP = \begin{bmatrix} \beta_0 & \cdots & \beta_i & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \qquad D_{c_4} = b_n$$

où C_{c_4} n'a également aucune structure particulière.

1.2 Formes compagnes d'observabilité

Dans le cas où la réalisation d'état (6) est observable, des transformations identiques peuvent également être faites afin d'obtenir des formes compagnes d'observabilité particulières. On définit la matrice d'observabilité :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{11}$$

La n-ième colonne de la matrice d'observabilité est notée $\tilde{q} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. En définissant la matrice de passage $P = \begin{bmatrix} \tilde{q} & A\tilde{q} & \cdots & A^{n-1}\tilde{q} \end{bmatrix}$ on obtient la forme compagne d'observation :

$$A_{o_1} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_{o_1} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$C_{o_1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_{o_1} = b_n$$

Nous retrouvons la forme compagne d'observation introduite en cours. Une forme équivalente peut être obtenue en inversant les colonnes de la matrice de passage $P = \begin{bmatrix} A^{n-1}\tilde{q} & \cdots & A\tilde{q} & \tilde{q} \end{bmatrix}$ pour obtenir la deuxième forme compagne d'observation :

$$A_{o_2} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_1 & \vdots & & \ddots & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad B_{o_2} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$C_{o_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad D_{o_2} = b_n$$

Deux autres formes canoniques compagnes d'observation peuvent être définies en considérant la matrice de passage $P = \mathcal{O}^{-1}$ pour obtenir :

$$A_{o_3} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_i & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_{o_3} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$C_{o_3} = CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad D_{o_3} = b_n$$

et la matrice de passage P définie par l'inversion des colonnes de $\mathcal{O}^{-1}$ pour obtenir :

$$A_{o_4} = P_2AP_2^{-1} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & \cdots & -a_i & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{o_4} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$C_{o_4} = CP = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_{o_3} = b_n$$

Les matrices B_{c_3} et B_{c_4} n'ont pas de structure particulière.

2 Exercices

Exercice 1 :

Donner la forme modale réelle ainsi que les formes compagnes de commande et d'observation des réalisations d'état minimales associées aux fonctions de transfert suivantes. Dans ces deux derniers cas, on donnera la matrice de passage de la forme modale à chacune des formes compagnes.

$$1- \quad \frac{p+3}{p^2+3p+3} \qquad 2- \quad \frac{(p+2.5)}{(p+2.5)(p-1)} \qquad 3- \quad \frac{(p+2)(p-1)}{p^2+2p-1}$$

$$4- \quad \frac{p}{p^3+2p^2-p} \qquad 5- \quad \frac{1}{p^2-p+1} \qquad 6- \quad \frac{1-p}{p+1}$$

Exercice 2 :

On considère un système dynamique décrit par ses équations d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

où

$$1- \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2- \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3- \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4- \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$5- \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Déterminer la matrice de changement de base permettant de passer à la forme compagne de commande et d'observation quand c'est possible.

3 Solution des exercices

Exercice 1 :

On note respectivement $(A_m,\ B_m,\ C_m,\ D_m)$, $(A_c,\ B_c,\ C_c,\ D_c)$ et $(A_o,\ B_o,\ C_o,\ D_o)$ les formes modales, canoniques de commannde et d'observation. P_c et P_o sont respectivement les matrices de passage de la forme modale à la forme compagne de commande et d'observation.

1-

$$A_m = \begin{bmatrix} -1.5 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1.5 \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad C_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_m = 0$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \quad D_c = 0$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B_o = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_o = 0$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad P_o^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2- Il y a une simplification pôle-zéro (-2.5) dans la fonction de transfert donc le pôle -2.5 est non commandable et/ou non observable. La réalisation minimale d'état associée à cette fonction de transfert est d'ordre 1.

$$A = -1 \quad B = 1 \quad C = 1 \quad D = 0$$

3-

$$A_m = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad C_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D_m = 1$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \quad D_c = 1$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B_o = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_o = 1$$

$$P_c = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \quad P_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4- Il y a une simplification pôle-zéro (0) dans la fonction de transfert donc le pôle 0 est non commandable et/ou non observable. La réalisation minimale d'état associée à cette fonction de transfert est d'ordre 2.

$$A_m = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad C_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D_m = 0$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_c = 0$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_o = 0$$

$$P_c = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad P_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5-

$$A_m = \begin{bmatrix} 0.5 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0.5 \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \quad C_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_m = 0$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_c = 0$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_o = 0$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \quad P_o^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6-

$$A = -1 \quad B = 2 \quad C = 1 \quad D = -1$$

Exercice 2 :

1- Le polynôme caractéristique est $\pi_p(p) = p^3 - 3p^2 + 2$.

$$P_c = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad P_o^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2- Le polynôme caractéristique est $\pi_p(p) = p^3 - 3p^2 + 2$.

$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_o^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3- Le polynôme caractéritique est $\pi_p(p) = p^3 + 7p^2 + 16p + 12$ et le système n'est pas observable.

$$P_c = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4- Le polynôme caractéristique est $\pi_p(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1$.

$$P_c = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad P_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 20 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

5- Le polynôme caractéritique est $\pi_p(p) = p^2 + 2p - 1$ et le système n'est pas observable.

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_o^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notes bibliographiques

La théorie de la réalisation est abordée dans le cadre des systèmes linéaires variant dans le temps et invariants (cas temps continu et temps discret) de manière très complète (existence et minimalité) dans le chapitre 5 de la référence [1]. [9] fournit également quelques éléments sur ce sujet dans son chapitre 2, en lien avec la simulation analogique des systèmes dynamiques linéaires temps invariant. Un traitement très complet quoique plus ancien sur ce sujet peut être aussi trouvé dans la référence [3] alors que quelques éléments sont donnés dans la section 5 du chapitre 3 de [17]. La section 8.8 de [14] rappelle les faits essentiels sur les formes canoniques compagnes. Les algorithmes de construction des réalisations canoniques compagnes sont rappelées au chapitre 3 de [7]. Le chapitre 12 de [4] est consacré à la théorie de la réalisation.

Une liste plus complète d'ouvrages et d'articles de référence sont recommandés en bibliographie et ont été regroupés ci-dessous suivant des catégories ayant trait à leur nature ou au sujet traité si ce dernier est particulièrement pertinent pour un des sujets de la petite classe 2.

- Articles fondateurs : [10], [11], [12], [18], [13] ;
- Manuels généraux : [15], [2], [6], [5], [16], [8] ;
- Manuels modernes : [7], [1] ;
- Formes canoniques compagnes : [?], [3], [17], [14], [9], [4], [2], [1] ;
- Théorie de la réalisation : [3], [17], [9], [4], [1].

Références

[1] P. J. Antsaklis and A. N. Michel. *Linear systems.* Birkhäuser, Boston, Massachussets, USA, 2006.

[2] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. *Modélisation et Identification des Processus, tome 1.* Méthodes et pratique de l'ingénieur. Technip, Paris, France, 1992.

[3] R. W. Brockett. *Finite dimensional linear systems.* John Wiley, New York, New York, USA, 1970.

[4] W. L. Brogan. *Modern Control Theory.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1991.

[5] R. C. Dorf and R. H. Bishop. *Modern control systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.

[6] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeni. *Feedback control of dynamic systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 2009.

[7] B. Friedland. *Control system design.* Dover publications, Mineola, New York, USA, 2009.

[8] G.C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado. *Control system design.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2001.

[9] T. Kailath. *Linear Systems.* Prenticed Hall Information and System Sciences Series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1980.

[10] R. E. Kalman. Canonical structure of linear dynamical systems. *Proceedings of National Academic Science US*, Vol. 48 :596–600, 1962.

[11] R. E. Kalman. Mathematical description of linear dynamical systems. *SIAM journal of Control*, Vol. 1 :152–192, 1963.

[12] R. E. Kalman, Y. C. Ho, and K. S. Narendra. Controllability of linear dynamical systems. *Contributions to differential equations*, Vol. 1(2) :189–213, 1963.

[13] R.E. Kalman. Lectures on controllability and observability. In *C.I.M.E. Ecole d'été de Pontecchio Marconi*, pages 1–149, Bologne, Italie, 1968.

[14] D. G. Luenberger. *Introduction to dynamic systems.* John Wiley, New York, New York, USA, 1979.

[15] K. Ogata. *Modern control engineering.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1990.

[16] W. J. Palm. *Modeling, analysis and control of dynamical systems.* John Wiley, New York, New York, USA, 2000.

[17] H. H. Rosenbrock. *State-space and multivariable theory.* Nelson, London, UK, 1970.

[18] L. Weiss and R. E. Kalman. Contributions to linear system theory. Technical Report N64-30508, RIAS, Avril 1964.