Représentation et analyse des systèmes linéaires

Petite classe No 2

1 Compléments sur les formes modales diagonales et de Jordan

1.1 Définitions

Etant donnée une représentation d'état d'un système dynamique LTI continu,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Nous rappelons que les formes modales sont obtenues à partir de la connaissance des propriétés spectrales, (valeurs propres et vecteurs propres) de la matrice dynamique $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Déf. 1.1 (valeurs propres d'une matrice carrée)
Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Les **valeurs propres** de A sont les racines du polynôme caractéristique $\phi(\lambda) = -\det(\lambda I - A)$. On associe à chaque valeur propre λ_i, **un vecteur propre** x_i tel que :

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

De plus, le polynôme caractéristique s'écrit :

$$\phi(\lambda) = (-\lambda)^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

Propriété 1

- Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure sont égales à ses éléments diagonaux.
- Les valeurs propres de $(cI + A)$ sont $c + \lambda_1, \cdots c + \lambda_n$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A.
- Les valeurs propres de A^k sont $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k$.
- Les valeurs propres de A sont égales aux valeurs propres de A'.
- Comme $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, les coefficients c_i sont nécessairement réels et de ce fait si $\lambda_i \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A alors $\overline{\lambda}_i$ l'est également.
- $\mathrm{trace}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = (-1)^{n+1}c_{n-1}$.
- $\det(A) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = c_0$.

Déf. 1.2 (multiplicité algébrique et géométrique)
Si le polynôme caractéristique de A se factorise comme :

$$\phi(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

alors cela signifie qu'une valeur propre λ_i de A peut être multiple d'ordre m_i. m_i est appelée **la multiplicité algébrique** de la valeur propre λ_i. De ce fait, on a nécessairement :

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = n$$

On définit également **la multiplicité géométrique** ou **dégénérescence** de la valeur propre λ_i comme :

$$q_i = n - \mathrm{rang}(A - \lambda_i \mathbf{1})$$

1.2 Calcul de la forme de Jordan d'une matrice

La détermination de la forme modale de A et de la représentation d'état associée repose essentiellement sur le calcul des vecteurs propres associés de A qui permettent de construire la matrice de passage P appelée dans ce cas **matrice modale**. Le calcul de l'ensemble complet de vecteurs propres de la matrice A dépend alors de la multiplicité des différentes valeurs propres de A. En particulier, dans le cas où il existe des valeurs propres multiples, différents cas doivent être considérés en fonction des valeurs respectives de la multiplicité algébrique et de la multiplicité géométrique de la valeur propre considérée. On pourra se reporter au polycopié au chapitre II.8 du premier tome. Nous détaillons ici le cas le plus délicat qui consiste à calculer les chaines de vecteurs propres généralisés associés à une valeur propre multiple dont les multiplicités vérifient $1 < q_i < m_i$. En effet, dans ce cas, il existe q_i vecteurs propres indépendants associés à λ_i donnant lieu à q_i blocs de Jordan dont la taille respective n'est pas fixée a priori par la seule connaissance de q_i et m_i. A ce stade, Il demeure une ambiguité dans la forme de Jordan associée qui ne peut être levée que par le calcul systématique des chaines de vecteurs propres généralisés associées à chaque vecteur propre.

Déf. 1.3 (Chaine de Jordan)
On appelle k-ième vecteur propre généralisé de **la chaine de Jordan**, associé à λ valeur propre de la matrice A, un vecteur e vérifiant :

$$(A - \lambda \mathbf{1}_n)^k e = \mathbf{0}$$

$$(A - \lambda \mathbf{1}_n)^{k-1} e \neq \mathbf{0}$$

Déf. 1.4 (Indexe de λ_i)
Etant donnée une valeur propre λ_i de multiplicité algébrique m_i et géométrique q_i avec $1 < q_i < m_i$ alors **l'indexe** k_i de λ_i est le plus petit entier tel que :

$$\text{rang}(A - \lambda_i \mathbf{1})^{k_i} = n - m_i$$

L'indexe indique la longueur de la chaine de Jordan la plus longue, soit la taille du bloc de Jordan le plus grand. De plus, si $\text{rang}(\lambda_i \mathbf{1} - A) = \alpha_i$ alors il y a $(n - \alpha_i) = q_i$ chaines de Jordan associées à λ_i. Pour chaque chaine de Jordan de longueur $k_j,\ j = 1, \cdots \alpha_j$, il existe un vecteur propre généralisé e de rang égal à k_j et vérifiant donc :

$$(A - \lambda_i \mathbf{1})^{k_j} e = 0 \quad (A - \lambda_i \mathbf{1})^l e \neq 0 \ \ l < k_j$$

Algorithme 1.1 (Triangularisation)

1- Calculer les valeurs propres de la matrice A en déterminant les racines du polynôme caractéristique.

$$\det(\lambda \mathbf{1} - A) = 0$$

Soient $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots, \lambda_l$, les valeurs propres de multiplicités algébriques respectives $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_l$ alors pour chaque valeur propre λ_i :

2- Calculer le nombre de chaines de Jordan et leur dimension.
 - Calculer l'indexe k_i de λ_i. Cela donne la dimension de la chaine de Jordan la plus grande.
 - Calculer le nombre de chaines de Jordan donné par la multiplicité géométrique $q_i = n - \alpha_i = n - \text{rang}(A - \lambda_i \mathbf{1})$.

3- Calculer les chaines de vecteurs propres généralisés. Pour chaque chaine de Jordan $j = 1, \cdots, q_i$,
 - Calculer un vecteur propre généralisé de rang k_j, e tel que :

$$(\lambda_i \mathbf{1}_n - A)^{k_j} e = \mathbf{0}$$

$$(\lambda_i \mathbf{1}_n - A)^{k_j - l} e \neq \mathbf{0} \quad \forall\ l = 1, 2, \cdots, k_j - 1$$

 - Calculer la chaine de Jordan des vecteurs propres généralisés associée.

$$e_l = (\lambda_i \mathbf{1}_n - A)^{k_j - l} e \qquad l = 1, 2, \cdots, k_j$$

ou par le calcul récurrent :

$$\begin{aligned}
&e_1 = e\\
&e_2 = (\lambda_i \mathbf{1}_n - A)e_1\\
&\vdots\\
&e_{k_j} = (\lambda_i \mathbf{1}_n - A)e_{k_j-1}
\end{aligned}$$

3- On construit alors la matrice de changement de base à partir des vecteurs propres généralisés calculés en colonnes.

$$P = [e_1\ e_2\ \cdots e_{m_1}\ \cdots\ e_{m_l}]$$

Remarques 1.1
La matrice de passage P doit vérifier la relation $PJ = AP$.

Exemple :

Soit à calculer la forme de Jordan de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{1} - A) = \lambda(\lambda - 2)^5$$

avec deux valeurs propres,

1- 0 de multiplicité algébrique et géométrique 1,

- 2 de multiplicité algébrique $m = 5$.
- La multiplicité géometrique est donnée par $q = n - \text{rang}(A - 2\mathbf{1}_6) = 2$. Il y aura donc deux chaînes de Jordan de vecteurs propres généralisés associés à la valeur propre 2.

L'ambiguité n'est pas encore totalement levée puique l'on peut avoir deux configurations différentes pour la longueur des chaînes : 4×1 ou 3×2. Elle peut être levée par le calcul de l'indexe :

$$\text{rang}(2\mathbf{1}_6 - A)^4 = \text{rang}(2\mathbf{1}_6 - A)^3 = 1$$

L'indexe est donc $k = 3$. La chîne la plus longue est donc de longueur 3. C'est donc la deuxième configuration qui doit être retenue. Il y a donc un bloc de Jordan de dimension 3 et un bloc de Jordan de dimension 2. Le calcul de la matrice modale est obtenue à partir du calcul des chaînes de Jordan.
Première chaîne de Jordan :
On choisit comme vecteur propre généralisé de rang 3, $e = [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]'$ qui vérifie :

$$(2\mathbf{1}_6 - A)^3 e = \mathbf{0}$$

$$(2\mathbf{1}_6 - A)^2 e \neq \mathbf{0}$$

$$(2\mathbf{1}_6 - A)e \neq \mathbf{0}$$

Cela permet d'obtenir la première chaine de vecteurs propres généralisés :

$$e^1 = (2\mathbf{1}_6 - A)^2 e = [2\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0]'$$

$$e^2 = (2\mathbf{1}_6 - A)e = [-1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]'$$

$$e^3 = e$$

Deuxième chaîne de Jordan :
La deuxième chaine est batie à partir du vecteur propre généralisé de rang 2, $f = [0\ 0\ 1\ \ -1\ 1\ 1]'$, linéairement indépendant de e et qui donne :

$$(2\mathbf{1}_6 - A)^2 f = \mathbf{0}$$

$$f^1 = (2\mathbf{1}_6 - A)f = [0\ 0\ \ -2\ 2\ 0\ 0]'$$

$$f^2 = f$$

La deuxième valeur propre est de multiplicité simple, ce qui permet de calculer le vecteur propre associé $g = [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ \ -1]'$, ce qui permet d'obtenir la matrice modale et la forme de Jordan :

$$P = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} e^1 & e^2 & e^3 & f^1 & f^2 & g \end{array}\right]$$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

2 Compléments sur les critères de Kalman

Etant donnée une représentation d'état d'un système dynamique LTI continu,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Déf. 2.1 (commandabilité)
Le modèle d'état est **complètement commandable** si et seulement s'il est possible de déterminer $u(t)\ /\ [t_0\ \ t_f]$ conduisant **tout** état initial $x(t_0) = x_0$ vers $x(t_1) = 0$ en un temps fini $t_0 \leq t_1 \leq t_f$.

On suppose sans perte de généralités que l'état final est l'origine 0 dans l'espace d'état et que l'instant initial est égal à 0. La solution de l'équation d'état est donnée par :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

En appliquant la définition précédente de la commandabilité complète du système, on obtient,

$$x(t_1) = 0 = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Soit :

$$x(0) = -\int_0^{t_1} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

On sait que :

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k$$

Cela permet d'écrire :

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \underbrace{\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau}_{\beta_k}$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned} x(0) &= -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k \\ &= -\left[\begin{array}{ccccccc} B & \vdots & AB & \vdots & \cdots & \vdots & A^{n-1}B \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \beta_0 \\ \cdots \\ \beta_1 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \beta_{n-1} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Afin que le système soit complètement commandable, il est alors nécessaire et suffisant que cette équation soit vérifiée pour tout état initial $x(0)$. Pour cela, il est nécessaire et suffisant que la matrice $n \times nr$:

$$\left[\begin{array}{ccccccc} B & \vdots & AB & \vdots & \cdots & \vdots & A^{n-1}B \end{array} \right]$$

soit de rang n.

3 Stabilisabilité et détectabilité

Les propriétés de commandabilité et d'observabilité d'une représentation d'état sont des propriétés relativement fortes qui peuvent ne pas être vérifiées simultanément pour une représentation d'état donnée. Cela ne signifie pas pour autant que la représentation d'état en question est dénuée d'intérêt. Deux propriétés plus faibles peuvent alors être staisfaites et permettre au concepteur d'utiliser cette représentation d'état.

Déf. 3.1 (stabilisabilité)
Une représentation d'état d'un système LTI :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

est dite **stabilisable** (la paire (A,B) est stabilisable) si tous ses modes instables sont commandables. Cela signifie de manière équivalente que tous ses modes non commandables sont stables.

Déf. 3.2 (détectabilité)
Une représentation d'état d'un système LTI :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

est dite **détectable** (la paire (A,C) est détectable) si tous ses modes instables sont observables. Cela signifie de manière équivalente que tous ses modes non observables sont stables.

Exemple :

La représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

n'est ni commandable ni observable (le mode -2 est non commandable et le mode -1 est non observable) mais est stabilisable et détectable.

4 Exercices

Exercice 1 :

On considère un système dynamique décrit par ses équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

où :

$$1- \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2- \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3- \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer dans chaque cas les valeurs propres de A ainsi que la fonction de transfert associée.

Exercice 2 :

Donner la forme modale réelle des matrices suivantes :

$$1 - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -27 & -10 \end{bmatrix} \quad 2 - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3 - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad 4 - \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Exercice 3 :

Calculer la forme canonique de Jordan de la matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & -1 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 4 :

On considère un système dynamique décrit par ses équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

où :

$$1- \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2- \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3- \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 20 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Etudier la commandabilité et l'observabilité de ces systèmes.

Exercice 5 :

Un système dynamique est donné par sa représentation d'état :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{array} \right. \tag{2}$$

Le même système peut être représenté par les matrices d'état :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Montrer que la première représentation d'état est commandable mais non observable et que la deuxième est non commandable mais observable. Expliquer cette différence.

Exercice 6 :

Les équations d'état linéarisées du mouvement latéral d'un avion pour un ensemble donné de conditions de vol sont données par :

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -0.7 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -0.7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \\ \beta \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 2.8 \\ 0 & -3.13 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix}$$

où δ_a est la commande d'aileron et δ_r la commande de gouverne. On suppose qu'il est impossible d'utiliser l'entrée de commande δ_r. Est-il possible de contrôler l'avion à l'aide de la seule commande δ_a ? Vérifier que l'avion est commandable avec les deux commandes.

Exercice 7 :

Pour les modèles d'état suivant, détailler les pôles commandables et observables.

$$1- \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2- \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3- \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4- \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5- \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$6- \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

5 Solution des exercices

Exercice 1 :

On obtient le spectre Λ des matrices A ainsi que la fonction de transfert $F(p)$ associée au modèle d'état.

1-

$$\Lambda = \{-2.3247,\ -0.3376 \pm 0.5623j\} \quad F(p) = \frac{1}{p^3 + 3p^2 + 2p + 1}$$

2-

$$\Lambda = \{-1,\ -1\} \quad F(p) = \frac{p+2}{p^2 + 2p + 1}$$

3-

$$\Lambda = \{-1,\ -1,\ 0\} \quad F(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + p}$$

Exercice 2 :

$$1- \quad A_{mod.} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad 2- \quad A_{mod.} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3- \quad A_{mod.} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad 4- \quad A_{mod.} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Exercice 3 :

Calculer la forme canonique de Jordan de la matrice A.

$$A_J = \left[\begin{array}{ccc|cc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exercice 4 :

1- Le système est commandable et observable puisque rang$(\mathcal{C}) = 3$ et rang$(\mathcal{O}) = 3$.
2- Le système est commandable et non observable puisque rang$(\mathcal{C}) = 3$ et rang$(\mathcal{O}) = 2$.
3- Le système est commandable et observable puisque rang$(\mathcal{C}) = 3$ et rang$(\mathcal{O}) = 3$.

Exercice 5 :

Le modèle (2) est commandable et non observable puisque rang$(\mathcal{C}) = 2$ et rang$(\mathcal{O}) = 1$. De même, le modèle (3) est non commandable et observable puisque rang$(\mathcal{C}) = 1$ et rang$(\mathcal{O}) = 2$. Cette non observabilité (dans le premier cas) ou non commandabilité (dans le deuxième cas) proviennent d'une simplification pôle-zéro dans la fonction de transfert :

$$H(p) = C(p\mathbf{1} - A)^{-1}B = \frac{p + 0.8}{(p + 0.8)(p + 0.5)}$$

Le pôle -0.8 est donc soit non observable soit non commandable suivant le choix effectué pour les variables d'état. En fait, les propriétés de commandabilité et d'observabilité sont associées à une représentation d'état donnée et non au système physique représenté par différents modèles d'état. Ce point est bien commenté dans le chapitre 11, section 2.3 de [7].

Exercice 6 :

Lorsque l'entrée de commande δ_r ne peut plus être utilisée, le modèle d'état associé au mouvement latéral de l'avion devient alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & -0.7 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -0.7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ r \\ \beta \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_a$$

Le critère de Kalman indique que le système n'est pas commandable puisque $\text{rang}(\mathcal{C}) = 2 < 4$. Si l'on conserve les deux commandes, le système reste commandable puisque $\text{rang}(\mathcal{C}) = 4$.

Exercice 7 :

1- Les pôles -2, -3 sont commandables et observables alors que le pôle -1 est commandable et non observable.
2- Le pôle double -1 n'est ni commandable ni observable.
3- Le pôle double -1 est commandable et observable.
4- Le pôle double -1 est non commandable et non observable.
5- Le pôle double -1 est commandable et non observable.
6- Le pôle double -2 est commandable et non observable alors que le pôle -3 est non commandable et observable.

Notes bibliographiques

Un traitement très moderne et complet des notions de commandabilité, d'observabilité, d'accessibilité et de reconstructibilité pour les modèles linéaires variant dans le temps continus et discrets est proposé dans le chapitre 3 de [2]. Les grammiens associés sont également définis et de nombreux exemples numériques permettent de mieux appréhender ces notions. La section 2.3 de la référence [18] fournit des remarques intéressantes sur la construction historique des notions de commandabilité et d'observabilité en rappelant les liens avec certains problèmes de commande optimale et de problème de synthèse de systèmes de commande à temps de réponse finie (finite-settling-time design). A l'heure du tout numérique, le traitement de l'auteur qui aborde ces notions à travers la problématique du choix des conditions initiales pour la simulation analogique des systèmes dynamiques, peut paraître un peu daté mais ajoute une interprétation physique originale de ces notions souvent considérées comme trop abstraites par les débutants. C'est également une des rares références présentant le test de Popov-Belevitch-Hautus (PBH) pour la commandabilité et l'observabilité. Il est possible de trouver également quelques références historiques sur l'origine de ces notions dans [12] avec quelques exemples physiques de systèmes non commandables et non observables. Un point de vue plus géométrique est donné dans [3] avec des liens avec les notions d'accessibilité et de reconstructibilité définies dans le cadre plus général des modèles linéaires variant dans le temps (à noter dans cette dernière référence, l'interprétation en termes de simplifications pôles-zéros). Ce point de vue géométrique est aussi clairement développé dans le chapitre 11 de [7] où l'on pourra trouver de nombreux exercices corrigés ainsi qu'une courte section sur les notions de stabilisabilité et de détectabilité. Enfin, la référence [45] bien qu'ancienne rappelle le théorème de dualité de Kalman, donne une caractérisation alternative de la commandabilité à l'aide des formes de Jordan dans le cas monovariable et fait un exposé détaillé des notions de commandabilité et d'observabilité pour les modèles linéaires variant dans le temps.

Une liste plus complète d'ouvrages et d'articles de référence sont recommandés en bibliographie et ont été regroupés ci-dessous suivant des catégories ayant trait à leur nature ou au sujet traité si ce dernier est particulièrement pertinent pour un des sujets de la petite classe 2.

- Articles fondateurs : [4], [28],[19], [20], [21], [22], [23], [13], [10], [42], [6], [25],[24] ;
- Manuels historiques : [41], [34], [36], [45], [3] ;
- Article moderne : [43] ;
- Manuels généraux : [33], [5], [11], [8], [32], [35], [15], [26] ;
- Manuels modernes : [14], [1], [2], [44] ;
- Formes de Jordan : [18], [16], [7], [5], [2] ;
- Commandabilité et observabilité : [45], [39], [40], [37], [30], [27], [38], [29], [31], [18], [12], [7], [11], [14], [35], [9], [17], [2], [44] ;
- Dualité : [18], [7], [2], [44] ;
- Théorie de la réalisation : [18], [7], [2], [44] ;
- Grammiens de commandabilité et d'observabilité : [18], [12], [7], [14], [2], [44].

Références

[1] A. Abramovici and J. Chapsky. *Feedback control systems : A fast-track guide for scientists and engineers.* Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts, USA, 2000.

[2] P. J. Antsaklis and A. N. Michel. *Linear systems.* Birkhäuser, Boston, Massachussets, USA, 2006.

[3] M. Athans and P. L. Falb. *Optimal Control.* McGraw-Hill book company, New York, New York, USA, 1966.

[4] A. R. Bergen and J. R. Ragazzini. Sampled-data processing techniques for feedback control systems. *Transactions of American Institute of Electrical Engineers*, 73(236), 1954.

[5] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. *Modélisation et Identification des Processus, tome 1.* Méthodes et pratique de l'ingénieur. Technip, Paris, France, 1992.

[6] R. W. Brockett and M. Mesarovic. The reproducibility of multivariable systems. In *Joint Automatic Control Conference*, pages 481–486, USA, 1964.

[7] W. L. Brogan. *Modern Control Theory.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1991.

[8] R. C. Dorf and R. H. Bishop. *Modern control systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.

[9] S. Engelberg. *A mathematical introduction to control theory.* Imperial College Press, Singapore, Singapore, 2005.

[10] P. L. Falb and M. Athans. A direct proof of the criterion for complete controllability of time-invariant linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-9 :189–190, 1964.

[11] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeni. *Feedback control of dynamic systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 2009.

[12] B. Friedland. *Control system design.* Dover publications, Mineola, New York, USA, 2009.

[13] E. G. Gilbert. Controllability and observability in multivariable control systems. *SIAM journal of Control*, Vol. 1 :128–151, 1963.

[14] T. Glad and L. Ljung. *Control theory : Multivariable and nonlinear methods.* Taylor and Francis, New York, New York, USA, 2000.

[15] G.C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado. *Control system design.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2001.

[16] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix analysis.* Cambridge University Press, New York, New York, USA, 1987.

[17] L. Jaulin. *Représentation d'état pour la modélisation et la commande des systèmes.* Hermès, Paris, France, 2005.

[18] T. Kailath. *Linear Systems.* Prenticed Hall Information and System Sciences Series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1980.

[19] R. E. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Sociedad Mat. Mex.*, 5 :102–119, 1960.

[20] R. E. Kalman. On the general theory of control systems. In 1^{st} *IFAC International Congress on Automatic Control*, Moscou, USSR, 1960.

[21] R. E. Kalman. Canonical structure of linear dynamical systems. *Proceedings of National Academic Science US*, Vol. 48 :596–600, 1962.

[22] R. E. Kalman. Mathematical description of linear dynamical systems. *SIAM journal of Control*, Vol. 1 :152–192, 1963.

[23] R. E. Kalman, Y. C. Ho, and K. S. Narendra. Controllability of linear dynamical systems. *Contributions to differential equations*, Vol. 1(2) :189–213, 1963.

[24] R.E. Kalman. Lectures on controllability and observability. In *C.I.M.E. Ecole d'été de Pontecchio Marconi*, pages 1–149, Bologne, Italie, 1968.

[25] E. Kreindler and P. E. Sarachik. On the concept of controllability and observability of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-9 :129–136, 1964.

[26] B. C. Kuo and F. Golnaraghi. *Automatic control systems.* John Wiley, New York, New York, USA, 2003.

[27] H. K. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear optimal control systems.* John Wiley, New York, New York, USA, 1972.

[28] J.P. LaSalle. Time optimal control systems. *Proceedings of the National Academy of Science*, 45 :573–577, 1959.

[29] J. M. Layton. *Multivariable control theory.* Peter Peregrinus LTD, London, UK, 1976.

[30] J Lifermann. *Systèmes linéaires - variables d'état.* Masson, Paris, France, 1972.

[31] D. G. Luenberger. *Introduction to dynamic systems.* John Wiley, New York, New York, USA, 1979.

[32] A. G. O. Mutambara. *Design and analysis of control systems.* CRC press, Boca Raton, Florida, USA, 1999.

[33] K. Ogata. *Modern control engineering.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1990.

[34] R. Oldenburg and H. Sartorius. *Dynamics of automatic control systems.* Oldenburg, Munich, Allemagne, 1951.

[35] W. J. Palm. *Modeling, analysis and control of dynamical systems.* John Wiley, New York, New York, USA, 2000.

[36] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mischenko. *The mathematical theory of optimal processes.* Interscience Publishers, New York, USA, 1962.

[37] H. H. Rosenbrock. *State-space and multivariable theory.* Nelson, London, UK, 1970.

[38] W. J. Rugh. *Mathematical description of linear systems.* Marcel Dekker, New York, New York, USA, 1975.

[39] D. G. Schultz and J. L. Melsa. *State functions and linear control systems.* McGraw-Hill book company, New York, New York, USA, 1967.

[40] L. K. Timothy and B. E. Bona. *State space analysis : An introduction.* McGraw-Hill book company, New York, New York, USA, 1968.

[41] Y.Z. Tsypkin. *Theory of intermitent control systems.* Automation Telemechanica, Moscou, URSS, 1950.

[42] L. Weiss and R. E. Kalman. Contributions to linear system theory. Technical Report N64-30508, RIAS, Avril 1964.

[43] J.C. Willems. The behavioral approach to open and interconnected systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 6 :46–99, Décembre 2007.

[44] D. Xue, Y. Chen, and D. P. Atherton. *Linear feedback control : Analysis and design with MATLAB©.* Advances in design and control. SIAM, Philadelphy, Pennsylvania, USA, 2007.

[45] L. A. Zadeh and C. A. Desoer. *Linear systems theory.* McGraw-Hill book company, New York, New York, USA, 1963.