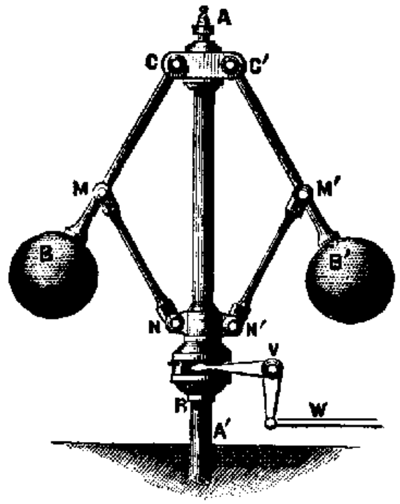
Représentation et analyse des systèmes linéaires

PC 2

Forme de Jordan

Commandabilité et observabilité



Transformation de similarité

- Non unicité de la représentation d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad \xrightarrow{x = P\tilde{x}} \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \underbrace{P^{-1}AP}_{\tilde{A}}\,\tilde{x}(t) + \underbrace{P^{-1}B}_{\tilde{B}}\,u(t) \\ y(t) &= \underbrace{CP}_{\tilde{C}}\,\tilde{x}(t) + \underbrace{D}_{\tilde{D}}\,u(t) \end{aligned}$$

- Le choix de la matrice de passage P détermine différentes formes

1. Formes modales - diagonale ou de Jordan
2. Formes compagnes du polynôme caractéristique (PC3)

Les formes modales

La matrice de passage P est la matrice de passage dans la base des vecteurs propres de A

- Le polynôme caractéristique

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}_n) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

- La multiplicité algébrique de chaque valeur propre λ_i est m_i
- La multiplicité géométrique ou dégénérescence de λ_i est

$$q_i = n - \text{rang}(A - \lambda_i \mathbf{1})$$

1. Il existe n valeurs propres toutes distinctes et simples
2. Il existe $p < n$ valeurs propres pouvant être multiples

1- Valeurs propres simples : $m_i = 1 \; \forall \; i = 1, \cdots, n$

- Matrice dynamique :

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Matrice de passage : $P = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$
- Vecteurs propres : $Ae_i = \lambda_i e_i \; \forall \; i = 1, \cdots, n$
- Matrices système : $\tilde{B} = P^{-1}B \quad \tilde{C} = CP$

2- Valeurs propres multiples : $p < n$

- $q_i = m_i$: dégénérescence pleine

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \boxed{J_i} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p \end{bmatrix} \qquad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

où $J_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$

La matrice de passage :

$$P = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_i^1 & \cdots & e_i^{m_i} & \cdots & e_p \end{bmatrix}$$

2- Valeurs propres multiples : $p < n$

- $q_i = 1$: dégénérescence simple

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \boxed{J_i} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p \end{bmatrix} \qquad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

où $J_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}$ bloc de Jordan

La matrice de passage :

$$P = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & \underbrace{e_i^1 \quad \cdots \quad e_i^{m_i}}_{v.p.\ généralisés} & \cdots & e_p \end{bmatrix}$$

2- Valeurs propres multiples : $p < n$

- $1 < q_i < m_i$: dégénérescence quelconque

  Il existe q_i blocs de Jordan associés à λ_i

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \boxed{J_i} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p \end{bmatrix} \text{ où } J_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i} = \mathrm{diag}(J_i^1, \cdots, J_i^{q_i})$$

La matrice de passage (algorithme de triangularisation) :

$$P = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & \underbrace{e_i^1 \quad \cdots \quad e_i^{m_i}}_{v.p.\ généralisés} & \cdots & e_p \end{bmatrix}$$

- Diagonalisation dans $\mathbb{C}$:

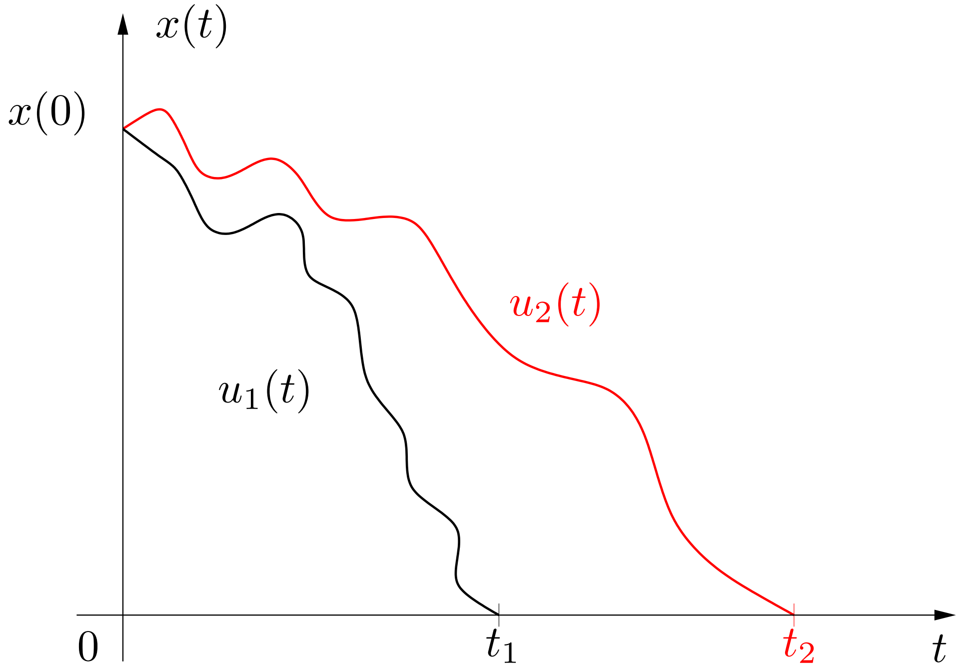
$$\begin{bmatrix} \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p^* \end{bmatrix}$$

- Diagonalisation dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

Soit le modèle d'état LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$



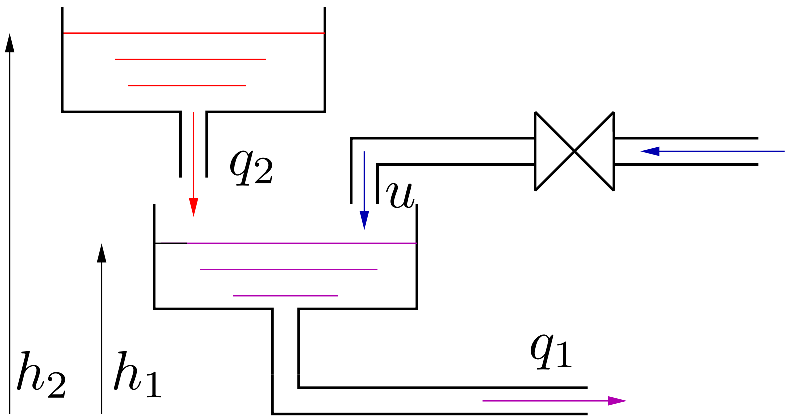
▼ **Définition 1** : *commandabilité*

Le modèle d'état est complètement commandable si et seulement s'il est possible de déterminer $u(t)$ / $[t_0 \;\; t_f]$ *conduisant* **tout** *état initial* $x(t_0) = x_0$ *vers* $x(t_1) = 0$ *en un temps fini* $t_0 \leq t_1 \leq t_f$.

✍ **Remarques 1** :

- *Si un système n'est pas complètement commandable alors pour certaines x_0 $\nexists$ u pouvant ramener le système à 0*
- *Propriété caractéristique de la paire (A, B) et donc de la relation entrée-sortie*
- *Un système trivialement non commandable est tel que $B = \mathbf{0}$*

Exemple :

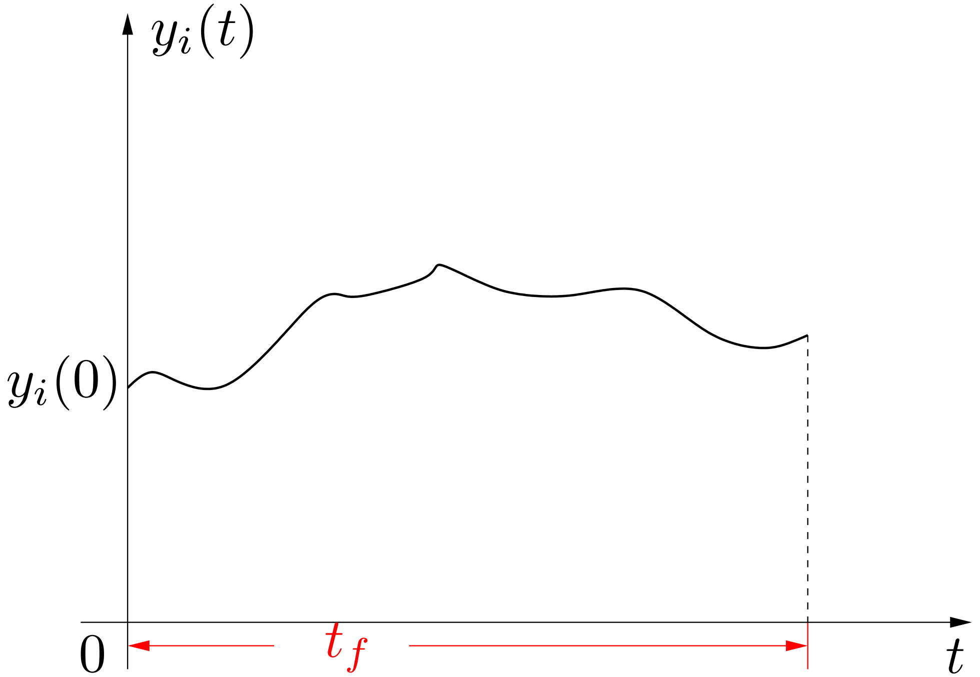


$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = -q_2 = -\frac{h_2}{R_2}$$

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q_2 - q_1 + u = \frac{h_2}{R_2} - \frac{h_1}{R_1} + u$$

Soit le modèle d'état LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$



▼ **Définition 2** : *observabilité*

Le modèle d'état est complètement observable si et seulement s'il est possible de déterminer **toute** *condition initiale* $x(t_0) = x_0$ *connaissant* $y(t)$ / $[t_0 \;\; t_f]$.

✍ **Remarques 2** :

- *Notion importante pour les systèmes où l'état n'est pas directement mesurable*
- *Mesurabilité $\neq$ observabilité*

Exemple : satellite 1 axe

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I_{zz} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad \text{où } x = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Si $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, à partir de la vitesse angulaire, on ne peut reconstruire la position angulaire et la vitesse

Les critères de Kalman :

❒ **Théorème 1** : *commandabilité*

(A, B) où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est complètement commandable ssi la matrice de commandabilité $\mathcal{C}$ est de rang n,

$$\text{rang}(\mathcal{C}) = \text{rang}\left(\left[\begin{array}{ccccccc} B & \vdots & AB & \vdots & \dots & \vdots & A^{n-1}B \end{array}\right]\right) = n$$

❒ **Théorème 2** : *observabilité*

(A, C) où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ est complètement observable ssi la matrice d'observabilité $\mathcal{O}$ est de rang n,

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = \text{rang}\left(\left[\begin{array}{cccc} C' & A'C' & \cdots & (CA^{n-1})' \end{array}\right]'\right) = n$$

Exemple 1 : bacs d'eau

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_1C_1^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rg}(\mathcal{C}) = 1$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1C_1} & \frac{1}{R_2C_1} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rg}(\mathcal{O}) = 2$$

$$\Sigma \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

$$\Sigma_{dual} \quad \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A'\xi(t) + C'\nu \\ \eta &= B'\xi(t) \end{aligned}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$

❒ **Théorème 3** :

- $\Sigma\ (A, B)$ *est commandable ssi* $\Sigma_{dual}\ (A', B')$ *est observable*
- $\Sigma\ (A, C)$ *est observable ssi* $\Sigma_{dual}\ (A', C')$ *est commandable*

▼ **Définition 3** : **système dual**

Le système Σ_{dual} *est appelé système* **dual** *du système* Σ

Soit le modèle d'état LTI

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} x(t)$$

❒ **Théorème 4** :

- *Le mode associé à p_i est commandable ssi la ligne b_i correspondante est non nulle*
- *Le mode associé à p_i est observable ssi la colonne c_i correspondante est non nulle*

Soit le modèle d'état LTI

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} p_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & p_i & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & p_i \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \boxed{b_n} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \boxed{c_1} & c_2 & \cdots & \cdots & c_n \end{bmatrix} x(t)$$

❒ **Théorème 5** :

- *Le mode associé à p_i est commandable ssi la ligne b_n correspondante est non nulle*
- *Le mode associé à p_i est observable ssi la colonne c_1 correspondante est non nulle*

Soit le modèle d'état LTI

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & J_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & J_s \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \boxed{b_{n_1}} \\ \cdots \\ \boxed{b_{n_k}} \\ \cdots \\ \boxed{b_{n_s}} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \boxed{c_1} & \vdots & \boxed{c_{1_k}} & \vdots & \boxed{c_{1_s}} \end{bmatrix} x(t)$$

❒ **Théorème 6** :

- *L'état associé à p_i est commandable ssi*

$$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} \boxed{b_{n_1}} \\ \vdots \\ \boxed{b_{n_k}} \\ \vdots \\ \boxed{b_{n_s}} \end{bmatrix}\right) = s$$

- *L'état associé à p_i est observable ssi*

$$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} \boxed{c_1} & \cdots & \boxed{c_{1_k}} & \cdots & \boxed{c_{1_s}} \end{bmatrix}\right) = s$$

✍ **Remarques 3** :

Une condition nécessaire de commandabilité (resp. d'observabilité) est que le nombre d'entrées (resp. de sorties) soit supérieur ou égal à s. Cela signifie que pour un système monovariable, un mode multiple n'est commmandable ou observable que si un seul bloc de Jordan lui est associé

Exemple :

Soit la représentation d'état définie par :

$$A = \mathrm{diag}\left\{0, -2, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, -4\right\}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 2 & \vdots & 2 & 1 & 0 & \vdots & 1 & -1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

- Les modes 0 et -4 sont commandables alors que -2 et -1 sont non commandables
- Le mode simple -2 est observable alors que les modes 0, -1 et -4 sont non observables