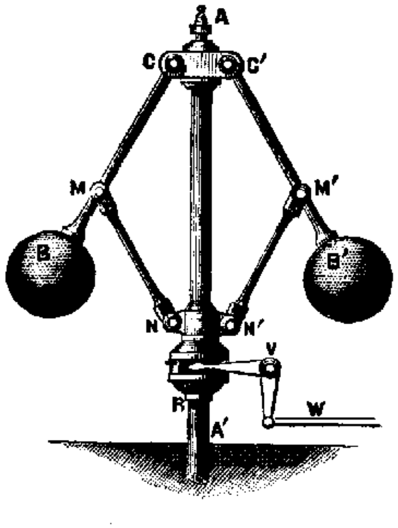
# Représentation et analyse des systèmes linéaires

# PC 1

# Les modèles graphiques

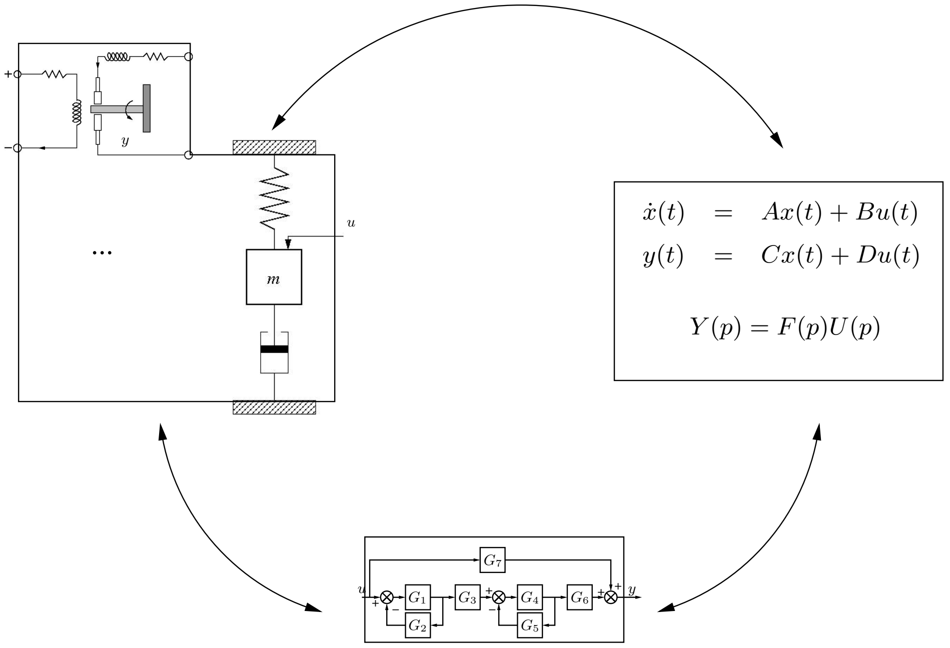


# Les modèles graphiques



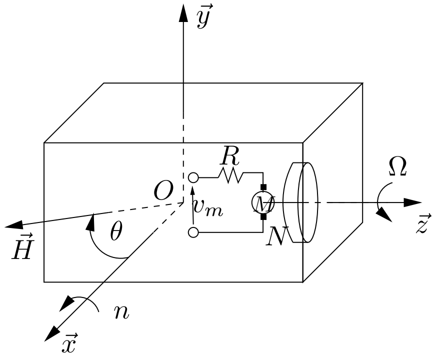
▼ **Définition 1** :

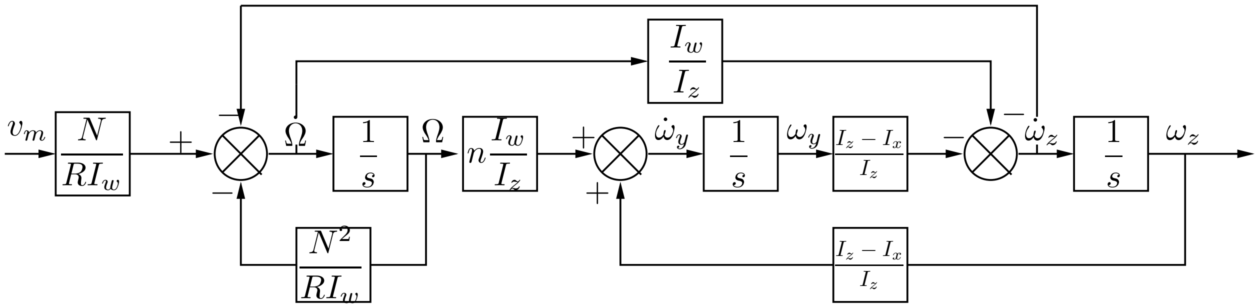
*Représentation figurée d'un ensemble d'équations différentielles (dans le domaine temporel ou fréquentiel) constituée par une interconnexion de symboles élémentaires (représentant des opérations mathématiques de base) telle que le modèle graphique global obéit au modèle mathématique du système*




- **Les schémas fonctionnels** (block diagrams)
- les graphes de fluence (signal-flow graphs)
- les bond graphs (bond graphs)

## Amortissement actif du mouvement de nutation d'un satellite artificiel

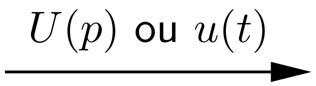


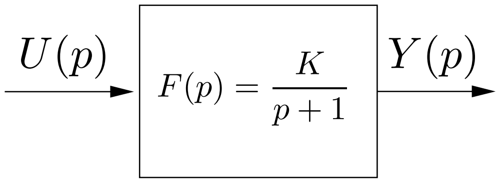

♥ **Propriétés 1** :

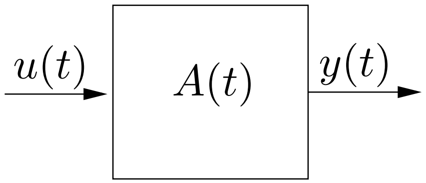
- *Décomposition d'un système complexe en composants élémentaires*
- *Décrire les interrelations entre composants élémentaires*
- *Indiquer graphiquement de manière réaliste les fluxs de signaux*
- *Information sur la structure interne du système*
- *Très adaptés aux modèles décrits dans le domaine fréquentiel (opérations algébriques)*
- *Résolution des équations par simplification graphique*
- *Décrire graphiquement les relations cause-effet internes à un système complexe*

- **Arcs orientés :**

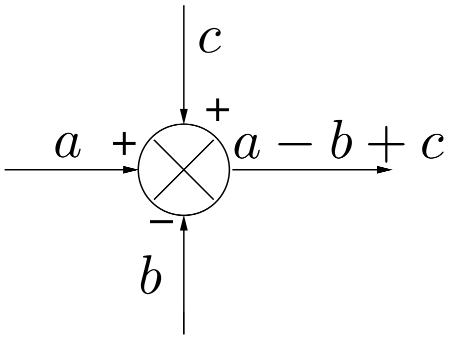



- **Blocs fonctionnels :**




- **Blocs sommateurs :**



## Principe de construction :

1- Ecrire les équations de la physique associées à chaque élément constituant le système

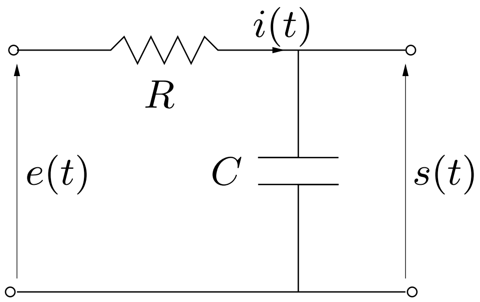
2- Appliquer la transformée de Laplace

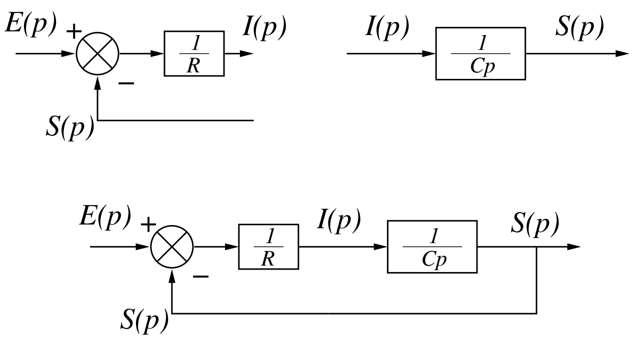
3- Calculer la fonction de transfert associée à chaque élément en supposant les conditions initiales nulles

4- Identifier les relations inter-signaux et les relations signaux-blocs

5- Tracer le schéma fonctionnel

## Exemple : circuit électrique



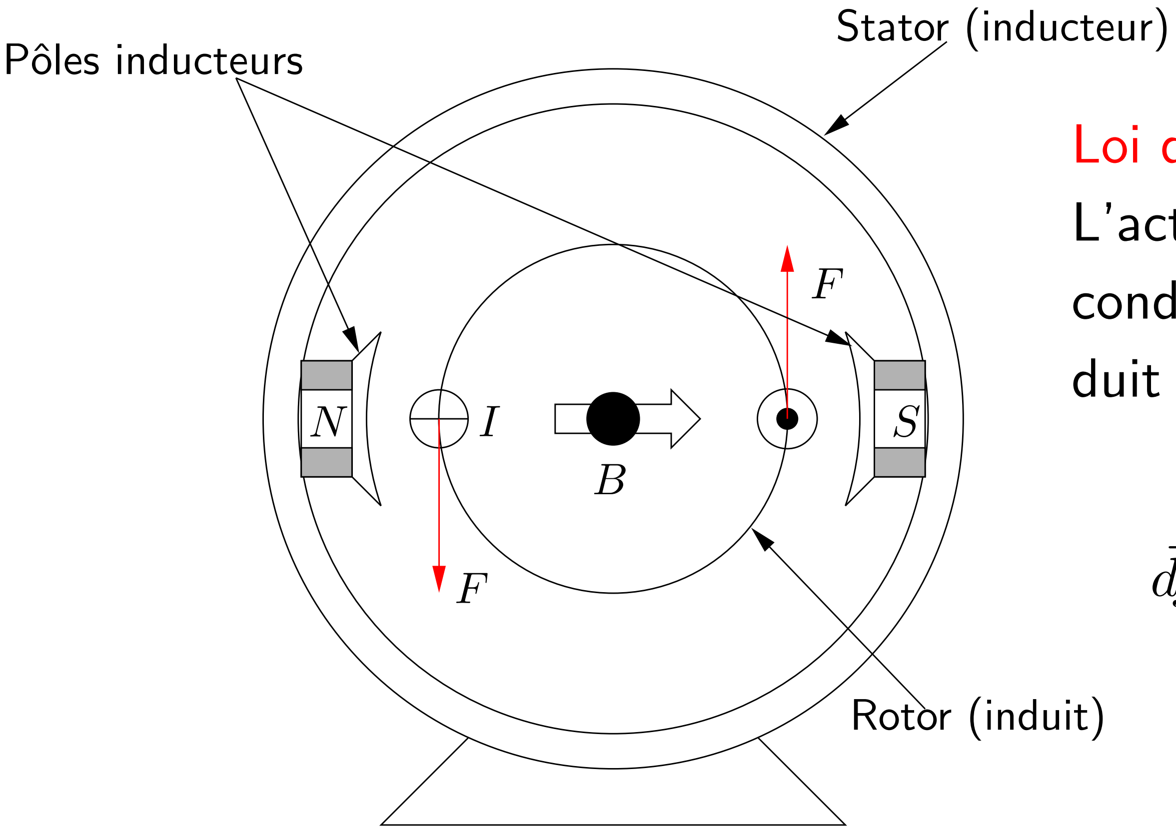




$$e(t) - s(t) = Ri(t)$$

$$s(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

$$V_R(p) = E(p) - S(p) = RI(p)$$

$$S(p) = \frac{1}{Cp}I(p)$$



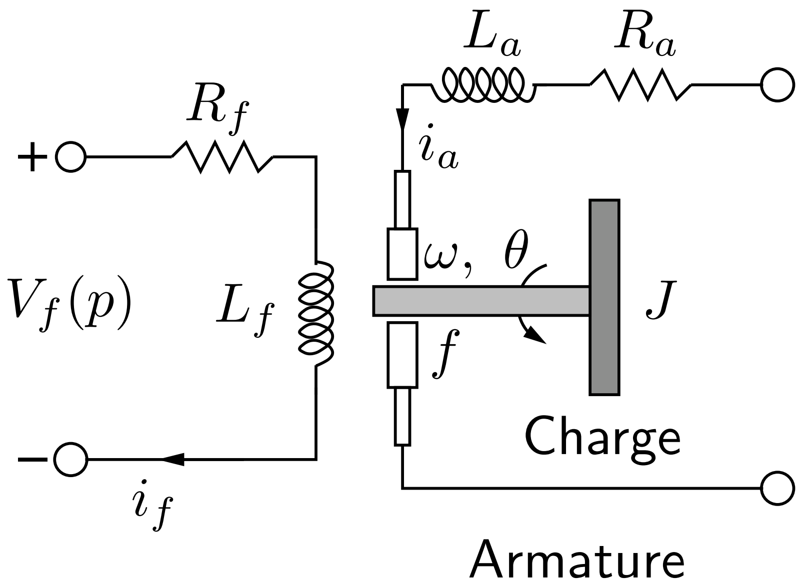

**Loi de Laplace :**

L'action d'un champ magnétique sur un conducteur traversé par un courant $i$ produit une force

$$\vec{df} = i.\vec{dl} \wedge \vec{B}$$

- Couple élevé, large contrôle en vitesse, portabilité, bonnes caractéristiques couple-vitesse
- Actionneur : robotique, tête de lecture, servovalves, machines outils

## Moteur commandé par le courant inducteur :




**Modèle physique idéal**

Equations électriques :

$$\Phi = K_f i_f(t)$$

$$V_f = R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt}$$

Equation électro − mécanique :

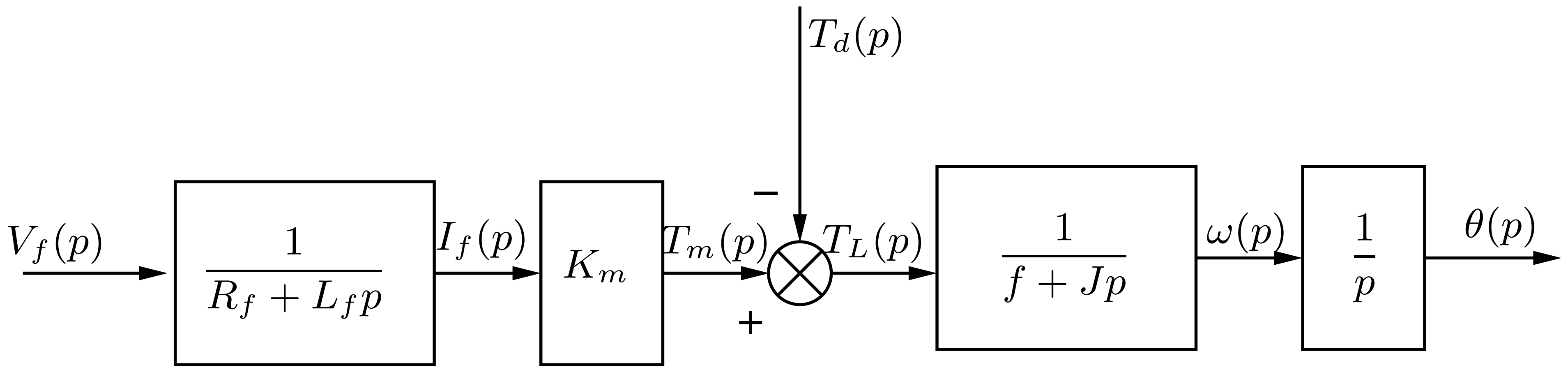
$$T_m = K_1 \Phi i_a(t) = K_1 K_f i_f(t) i_a(t) = K_m i_f(t)$$

Equations mécaniques :

$$T_m = T_d + T_L$$

$$T_L = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + f\frac{d\theta}{dt}$$

**Modèle mathématique idéal**



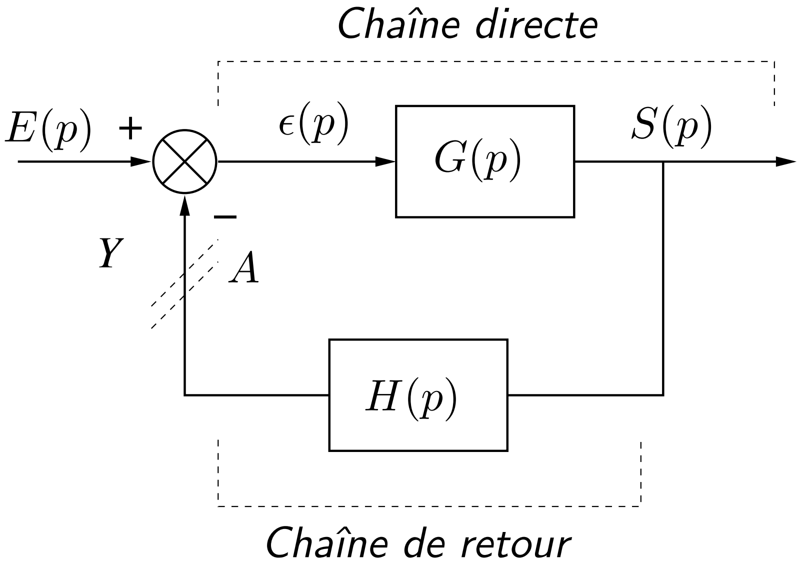

$$T_m(p) = K_m I_f(p) \qquad T_L(p) = T_m(p) - T_d(p)$$

$$T_L(p) = (Jp^2 + fp)\theta(p) \qquad V_f(p) = (R_f + L_f p) I_f(p)$$

$$\boxed{\frac{\theta(p)}{V_f(p)} = \frac{K_m}{p(Jp+f)(L_f p + R_f)} = \frac{K_m/fR_f}{p(\tau_f p + 1)(\tau_L p + 1)}}$$

▼ **Définition 2** : *F.T. en B.O.*

*La fonction de transfert en* **boucle ouverte** *ou gain de boucle*




*est :*

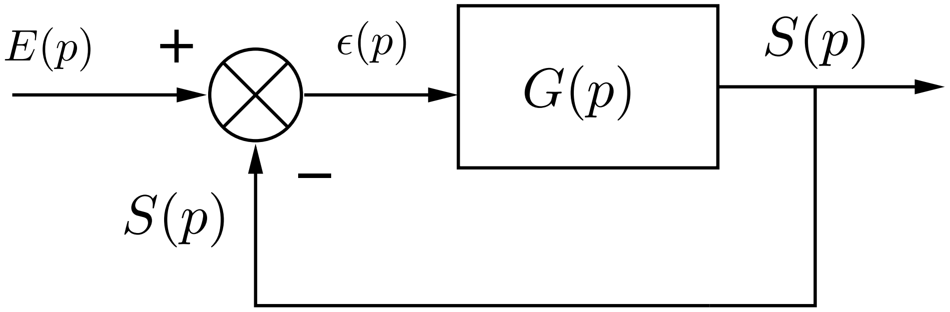
$$\boxed{\frac{Y(p)}{E(p)} = G(p)H(p)}$$

▼ **Définition 3** : *F.T. en B.F.*

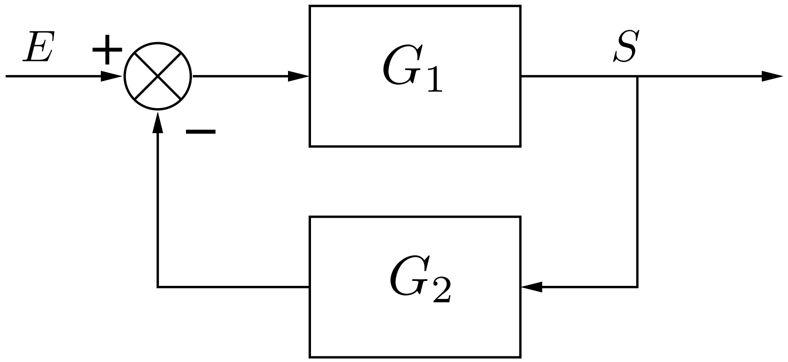
*La fonction de transfert en boucle fermée est :*

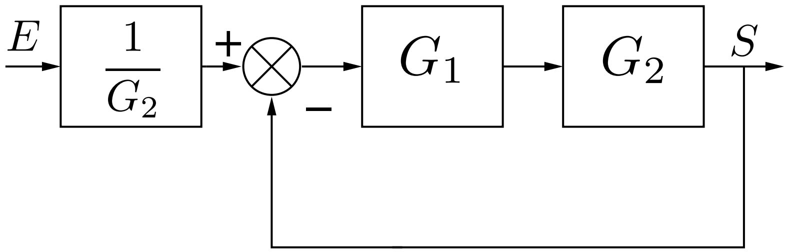
$$\boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)}}$$

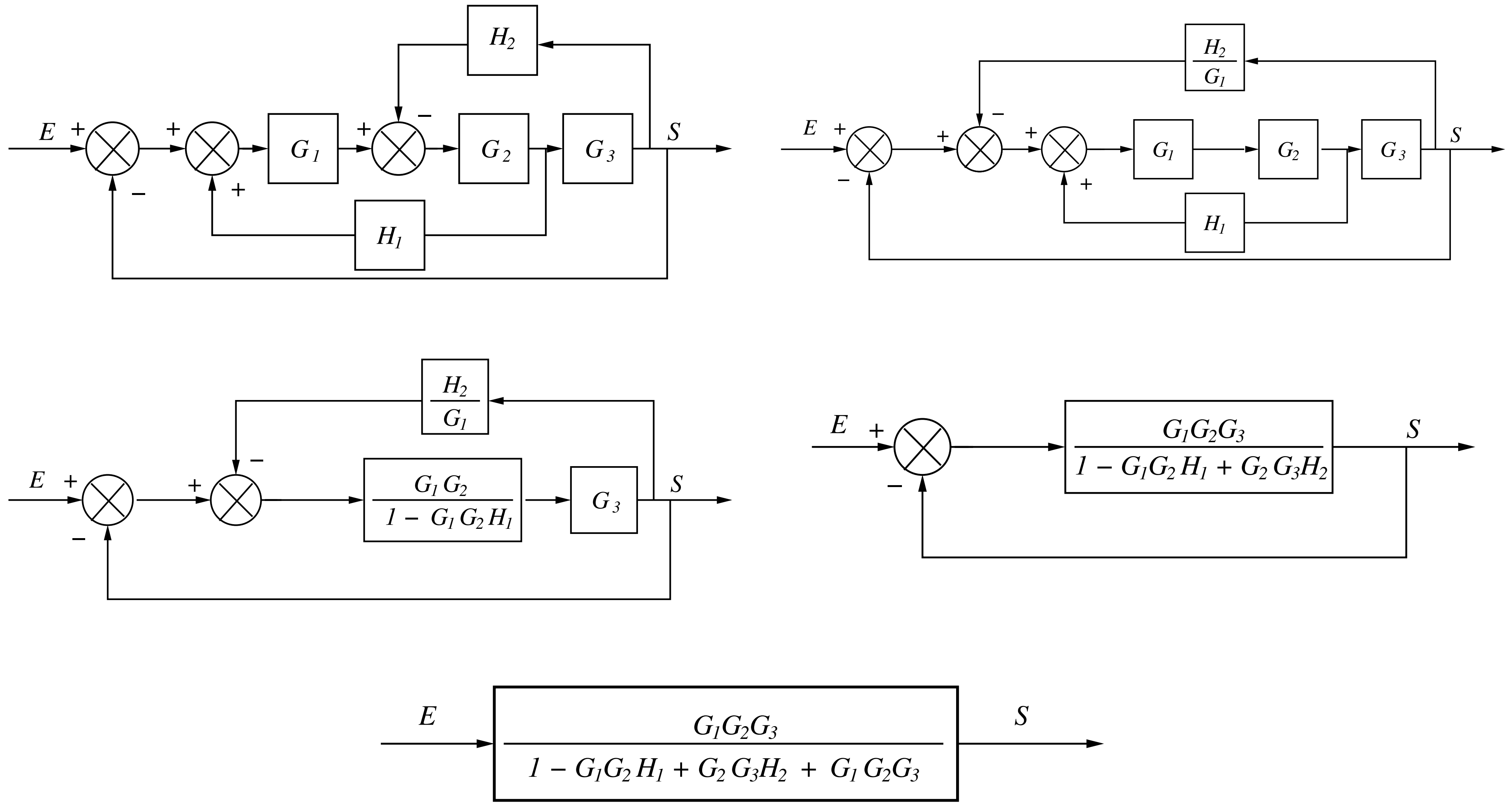
# Règles d'algèbre 




$$\boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{B.O.}{1+B.O.}}$$



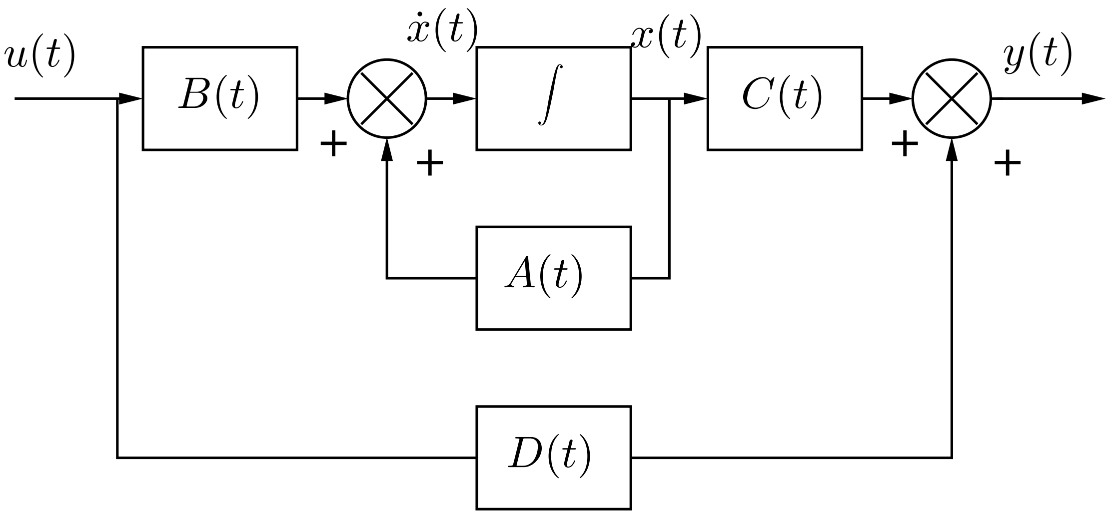




E
S
G1
G2
G3
H1
H2
H2/G1
G1G2 / (1 − G1G2H1)
G1G2G3 / (1 − G1G2H1 + G2G3H2)
G1G2G3 / (1 − G1G2H1 + G2G3H2 + G1G2G3)

- Equations d'état :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

- Schéma fonctionnel :

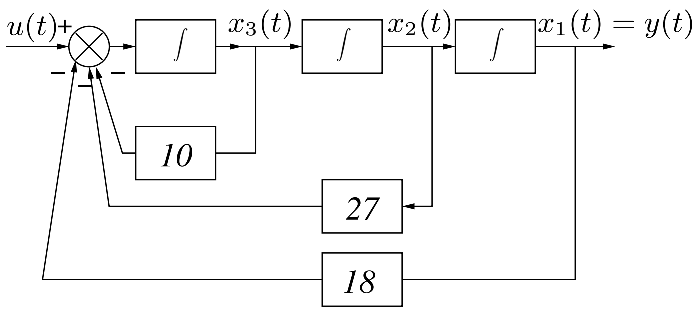


# Schéma fonctionnel et modèle d'état LTI : exemple



## Equations d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -27 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$




$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

## Correcteur LQG :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_K &= (A + BK_r - K_f C)x_K + K_f y \\ u &= K_r x_K \end{aligned}}$$