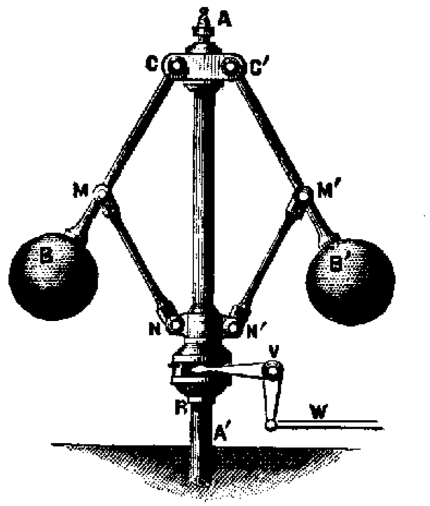
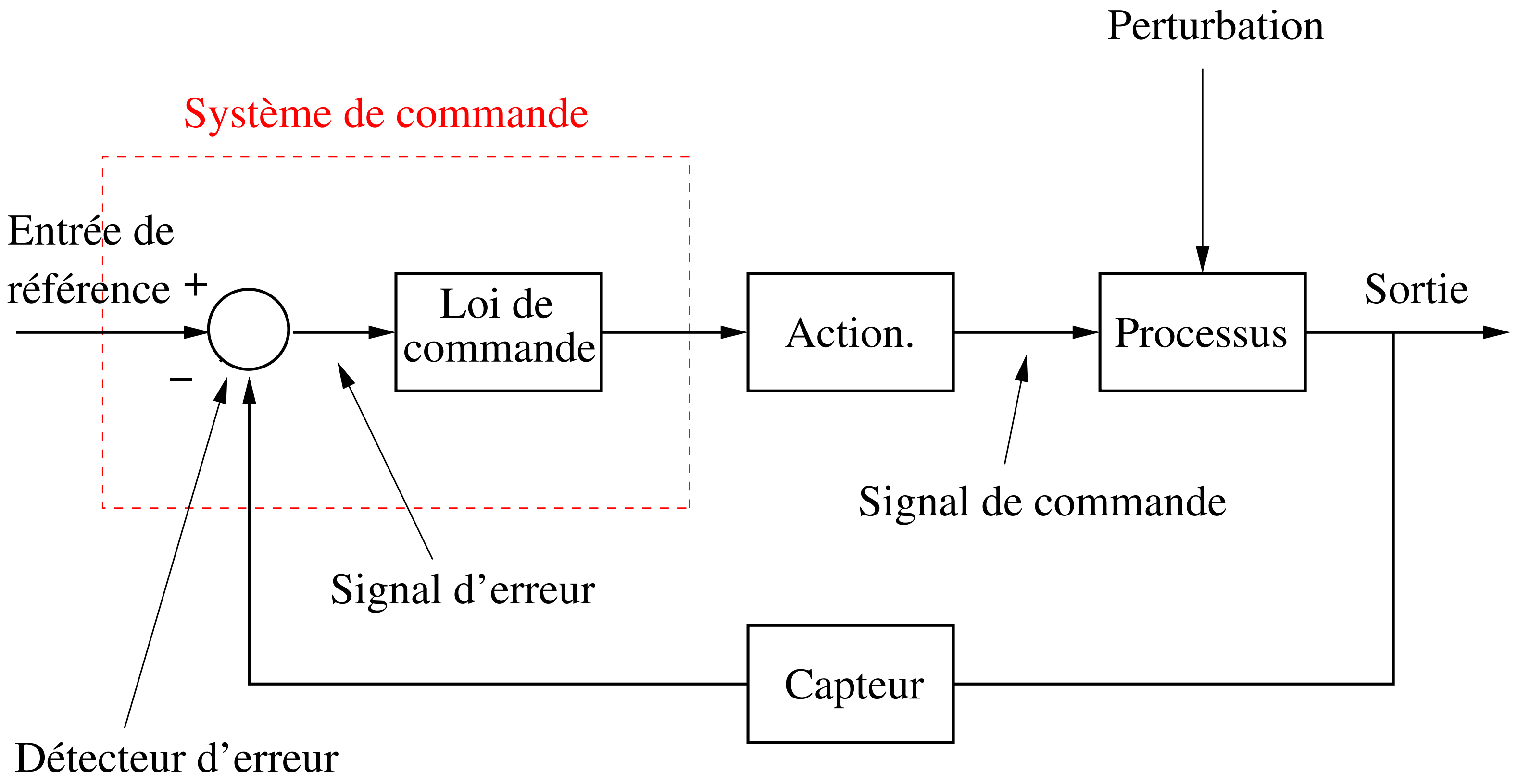
Représentation et analyse des systèmes linéaires

Cours 4

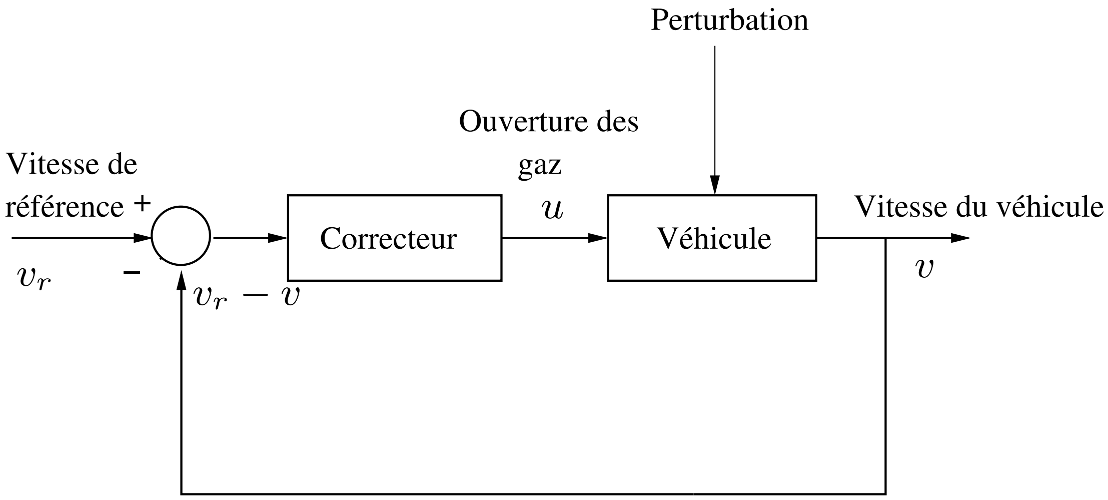
Analyse des systèmes bouclés





Principe :

Observer les effets des actions que l'on produit et les corriger en fonction des résultats observés



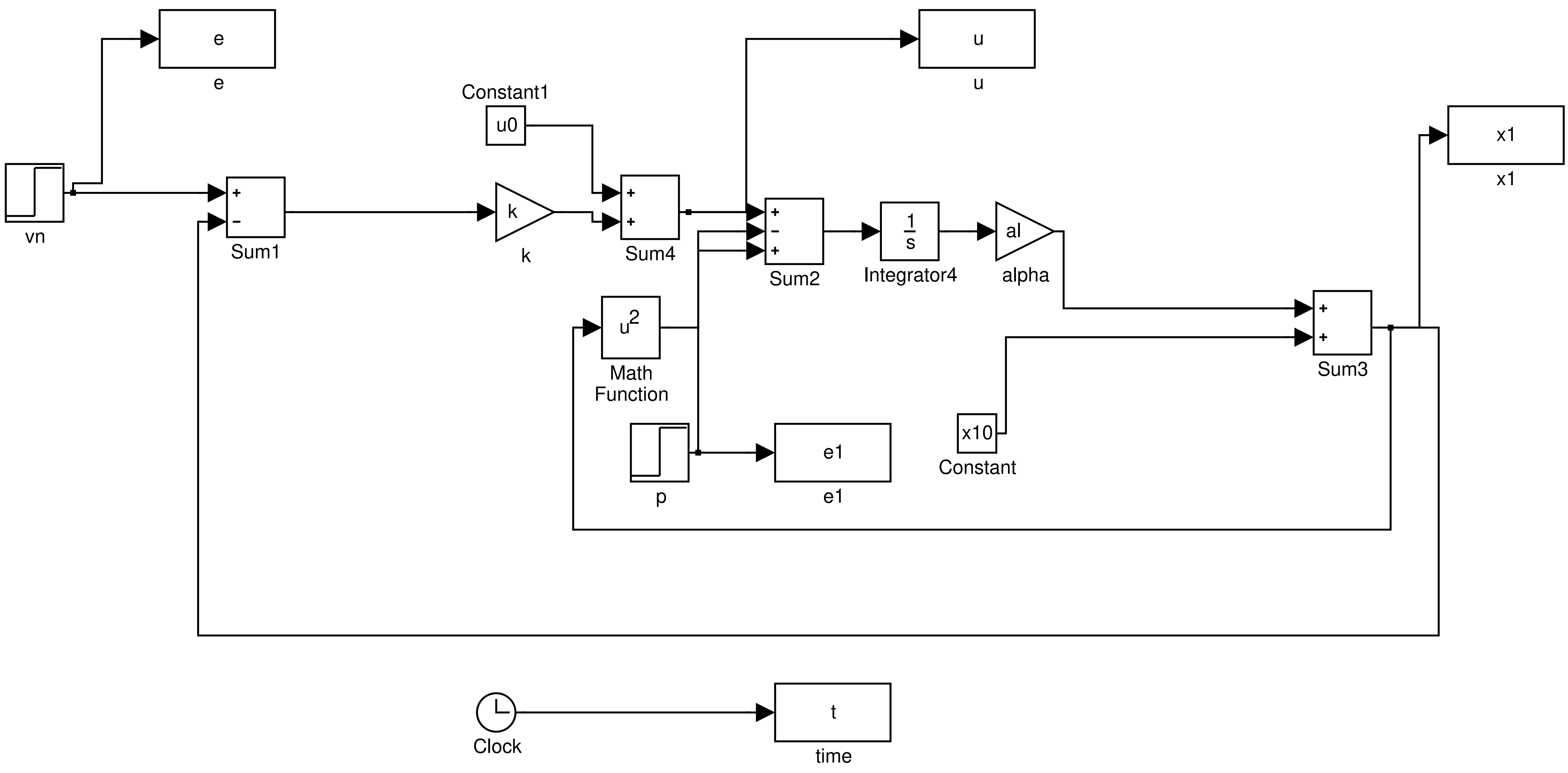
➥ Modèle dynamique :

$$\dot{v}_n(t) = \frac{\sqrt{\rho c}}{m}\left[u(t) - v_n^2(t)\right] \quad \text{où } v_n = v/v_{max} \text{ et } 0 \leq u(t) \leq 1$$

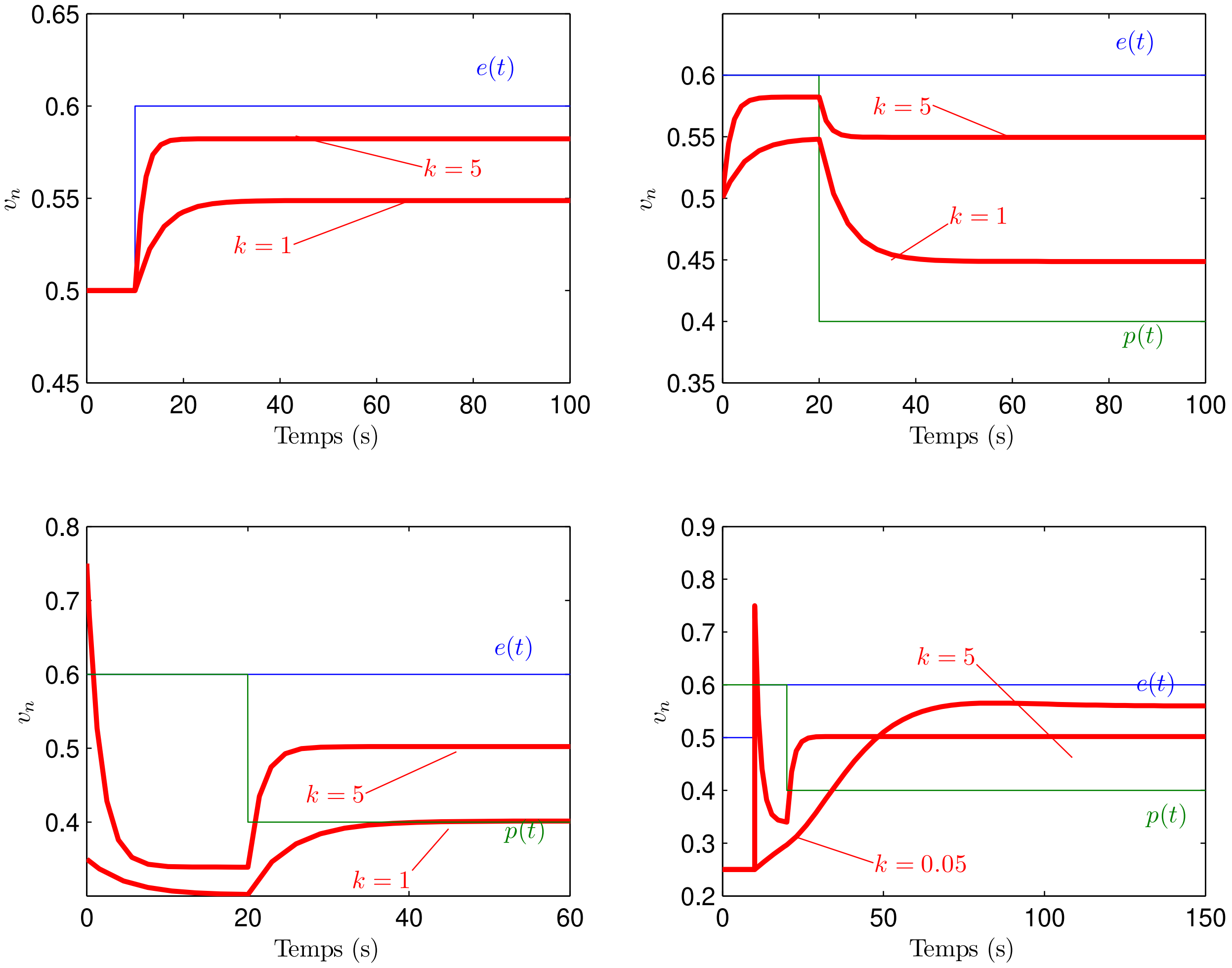
➥ Loi de commande proportionnelle : $\boxed{u(t) = k(v_{nr}(t) - v_n(t))}$

➥ Modèle d'état : $x(t) = v_n(t)$, $e(t) = v_{nr}(t)$ et $\alpha = \dfrac{\sqrt{\rho c}}{m}$

$$\boxed{\dot{x}_1(t) = -\alpha k x_1(t) - \alpha x_1^2(t) + \alpha k e(t)}$$


e
e
Constant1
u0
u
u
x1
x1
vn
+
-
Sum1
k
k
+
+
Sum4
+
-
+
Sum2
1
s
Integrator4
al
alpha
u2
Math
Function
+
+
Sum3
p
e1
e1
x10
Constant
Clock
t
time

Analyse des systèmes bouclés : exemple (suite)



Rejet de perturbation : $\dot{x}_1(t) = -\alpha k x_1(t) - \alpha x_1^2(t) + \alpha k e(t) + p(t)$

➥ Loi de commande intégrale :

$$\dot{u}(t) = k(v_{nr}(t) - v_n(t))$$

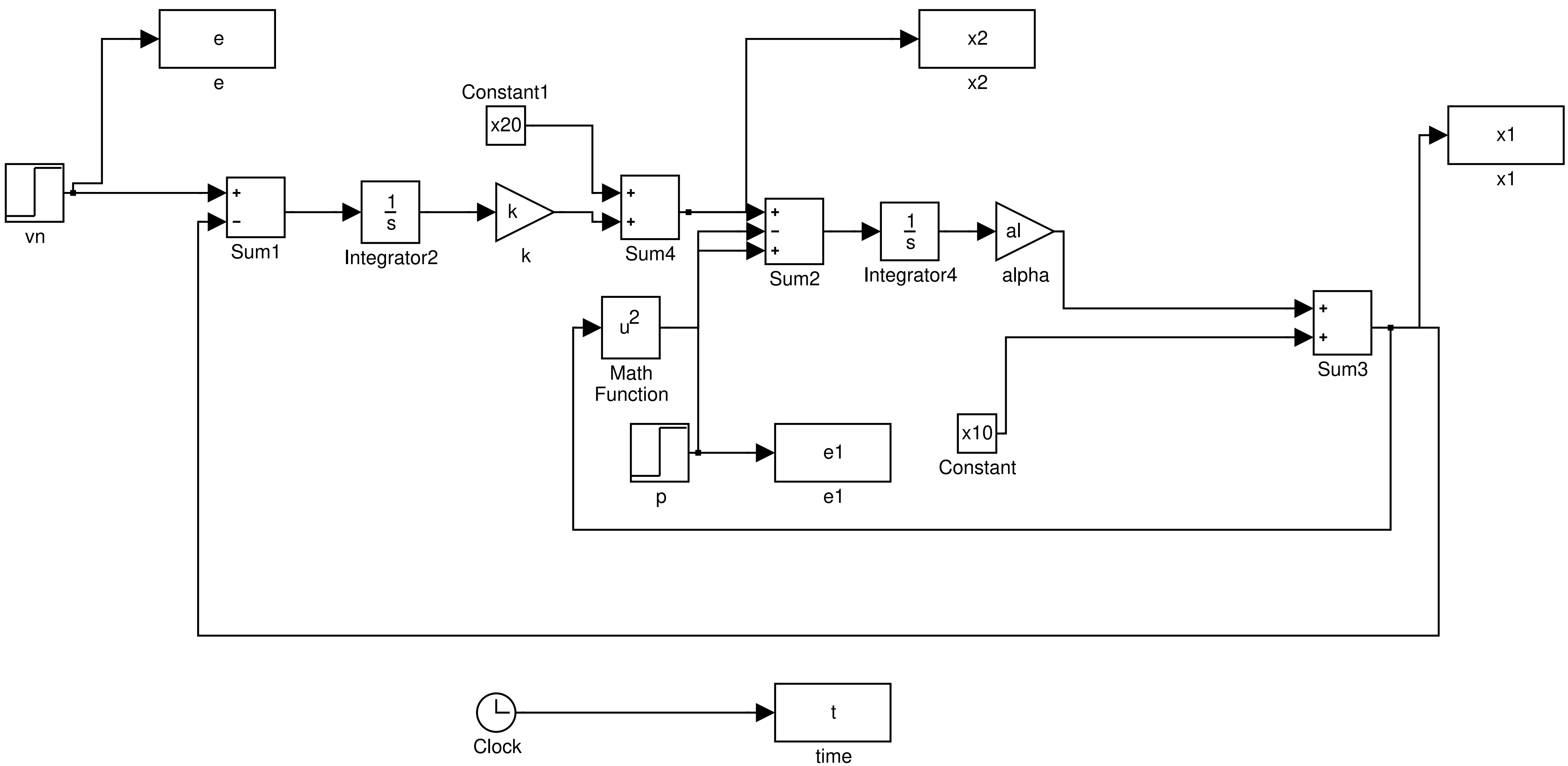
$$u(t) = u(0) + k\int_0^t (v_{nr}(s) - v_n(s))ds$$

➥ Modèle d'état :

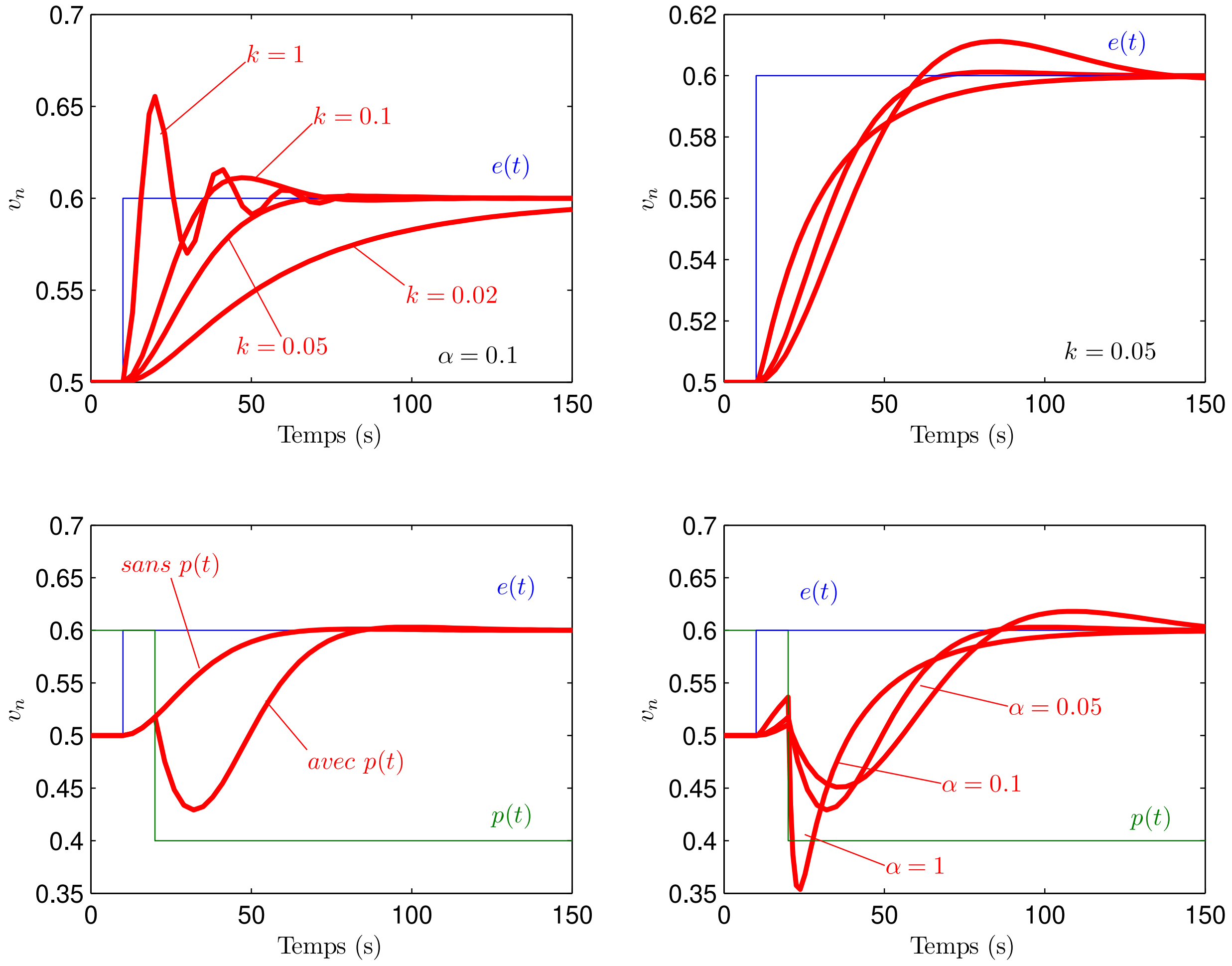
$x(t) = [v_n(t) \;\; u(t)]' = [x_1 \;\; x_2]'$, $e(t) = v_{nr}(t)$ et $\alpha = \dfrac{\sqrt{\rho c}}{m}$

$$\dot{x}_1(t) = -\alpha x_1^2(t) + \alpha x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -kx_1(t) + ke(t)$$



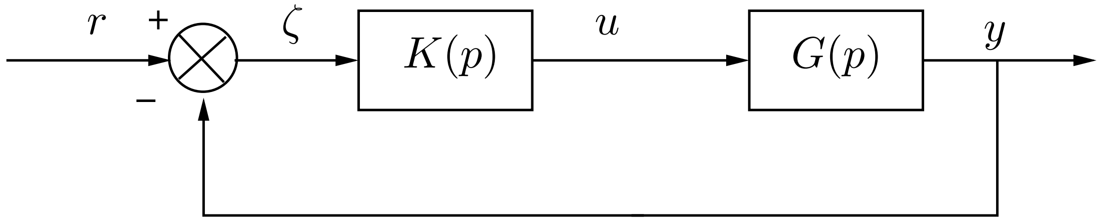
e
e
Constant1
x20
vn
+
-
Sum1
1
s
Integrator2
k
k
+
+
Sum4
x2
x2
+
-
+
Sum2
1
s
Integrator4
al
alpha
x1
x1
u2
Math
Function
+
+
Sum3
p
e1
e1
x10
Constant
Clock
t
time



Rejet de perturbation : $\dot{x}_1(t) = -\frac{\sqrt{\rho c}}{m} x_1^2(t) + \frac{\sqrt{\rho c}}{m} x_2(t) + p(t)$

- Avantages :
  - ♥ Amélioration de la précision en boucle fermée
  - ♥ Robustesse du système bouclé / variations paramétriques
  - ♥ Amélioration du rejet de perturbation
- Inconvénients :
  - ♠ Stabilité de la boucle fermée
  - ♠ Saturation des signaux de commande
  - ♠ Bruits de mesure

Analyse de stabilité de la boucle fermée



Boucle fermée :

$$T(p) = \frac{G(p)K(p)}{1 + G(p)K(p)}$$

➥ Equation caractéristique :

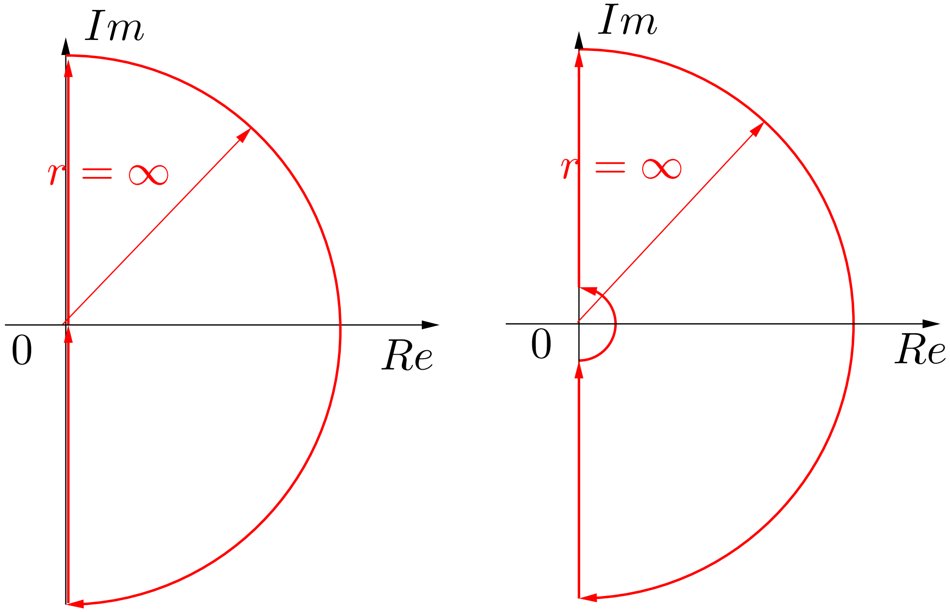
$$K(p) = \frac{N_K(p)}{D_K(p)} \quad G(p) = \frac{N_G(p)}{D_G(p)}$$

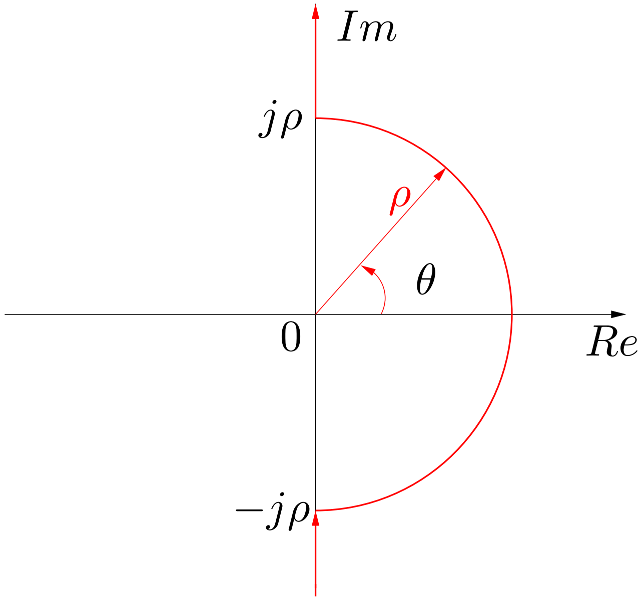
$$1 + K(p)G(p) = D_G(p)D_K(p) + N_G(p)N_K(p) = 0$$

➥ Critère de Nyquist :

Critère fréquentiel de stabilité fondé sur des résultats d'analyse complexe (transformations conformes, théorème de Cauchy) et utilisant le tracé du lieu de transfert en boucle ouverte dans le plan de Nyquist

▼ **Définition 1** : *contour de Nyquist $\mathcal{C}_N$*





$$p = \rho e^{j\theta} \text{ avec } \rho \to 0$$

$$-\pi/2 \leq \overset{\circlearrowleft}{\theta} \leq \pi/2$$

▼ **Définition 2** : *lieu de Nyquist complet*

Quand $p = \sigma + j\omega$ *parcourt* $\mathcal{C}_N$, $K(p)G(p)$ *parcourt le lieu de Nyquist complet. Il est constitué par :*

- $K(j\omega)G(j\omega)$, *pour* $\omega \geq 0$
- *Le symétrique / l'axe ox :* $K(j\omega)G(j\omega)$, *pour* $\omega \leq 0$
- *Une fermeture dans le cas d'une indentation du contour de Nyquist*

❒ **Théorème 1** :

Le système à contre-réaction est stable asymptotiquement ssi le lieu de Nyquist complet de $K(p)G(p)$ *fait un nombre de tours comptabilisés dans le sens trigonométrique autour du point critique* $(-1, 0)$ *égal au nombre de pôles à partie réelle strictement positive de* $K(p)G(p)$

Procédure 1 :

1- *Calculer la boucle ouverte. Identifier le nombre de pôles sur l'axe imaginaire et tracer le contour de Nyquist correspondant* $\mathcal{C}_N$

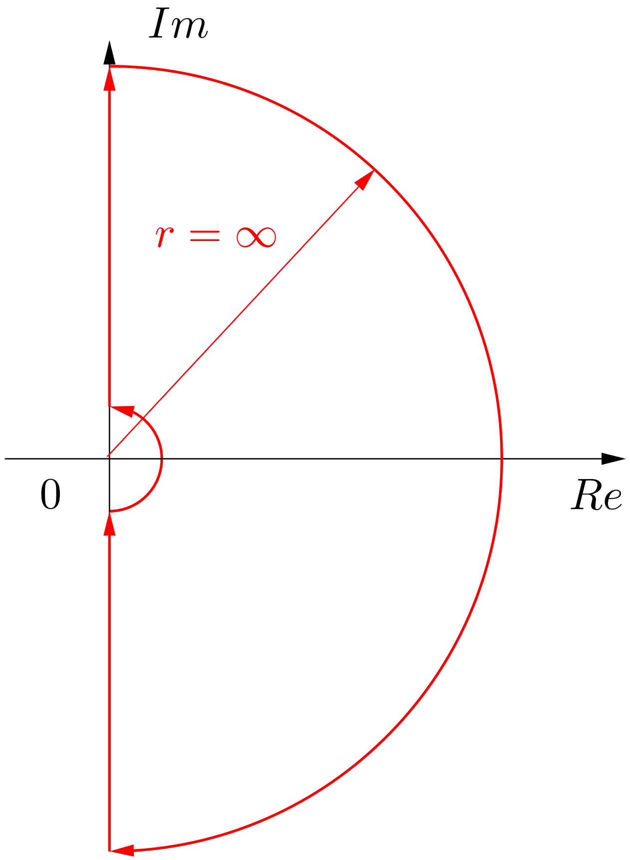
2- *Tracer le lieu de Nyquist complet de la boucle ouverte*

3- *Compter le nombre de tours dans le sens trigonométrique autour du point critique* $(-1, 0)$ *: N*

4- *Compter le nombre de pôles instables de la boucle ouverte : P. Le nombre de racines instables du polynôme caractéristique en boucle fermée Z obéit à la relation :*

$$\boxed{Z = P - N}$$

$$G(p) = \frac{K}{p(1+Tp)} \quad T > 0 \quad K > 0$$



- Fonction de transfert sinusoïdale :

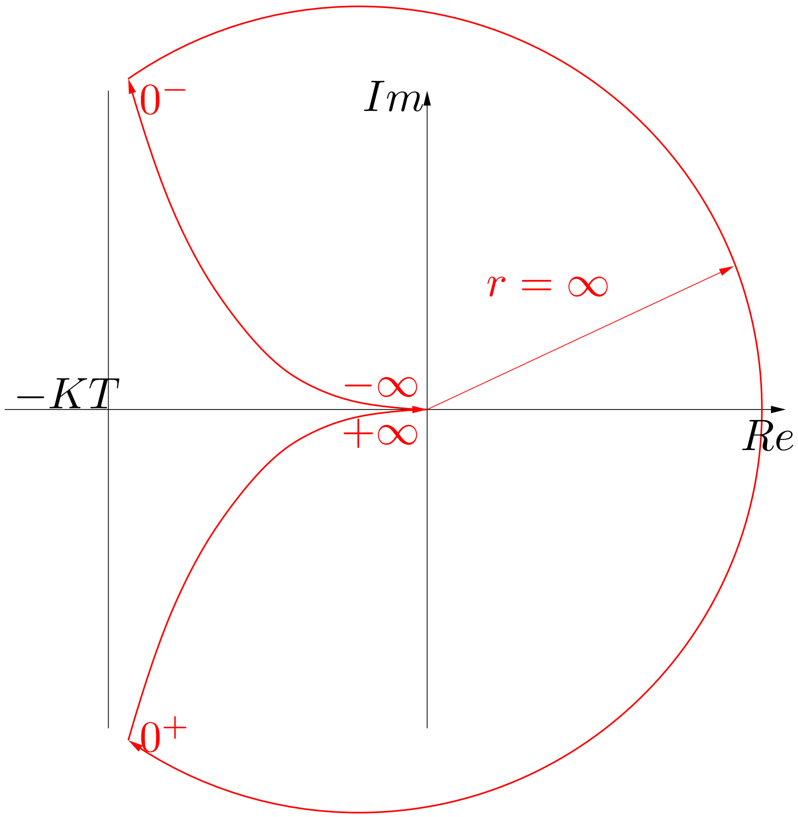
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(Tj\omega + 1)}$$

- Parties réelles et imaginaires :

$$Re[G] = \frac{-KT}{T^2\omega^2 + 1}$$

$$Im[G] = \frac{-K}{\omega(T^2\omega^2 + 1)}$$

Critère de Nyquist : exemple (suite)



$$p = \rho e^{j\theta} \quad \rho \to 0$$

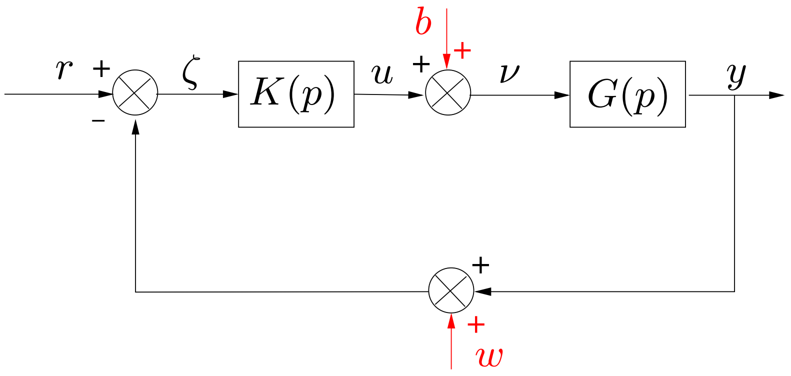
$$-\pi/2 \leq \overset{\circlearrowleft}{\theta} \leq \pi/2$$

$$G(p) \sim \frac{K}{p} \sim \frac{K}{\rho} e^{-j\theta}$$

$$\frac{K}{\rho} \to \infty \qquad -\pi/2 \leq \overset{\circlearrowleft}{\theta} \leq \pi/2$$

$$N = 0 \quad P = 0$$

L'asservissement est donc stable asymptotiquement



➥ Relations élémentaires :

$$y(p) = G(p)\nu(p) \qquad \nu(p) = b(p) + u(p)$$
$$u(p) = K(p)\zeta(p) \qquad \zeta(p) = r(p) - w(p) - y(p)$$

➥ Transferts en boucle fermée :

$$\boxed{y(p) = \underbrace{(1 + G(p)K(p))^{-1}}_{S(p)} G(p)b(p) + \underbrace{(1 + G(p)K(p))^{-1} G(p)K(p)}_{T(p)}(r(p) - w(p))}$$

▼ **Définition 3** : *sensibilité et sensibilité complémentaire*

$$S(p) = \frac{1}{1 + G(p)K(p)} \qquad T(p) = \frac{G(p)K(p)}{1 + G(p)K(p)}$$

➥ Transferts en boucle fermée :

$$\epsilon(p) = S(p)r(p) - S(p)G(p)b(p) + T(p)w(p)$$
$$u(p) = K(p)S(p)(r(p) - w(p)) - T(p)b(p)$$
$$\nu(p) = K(p)S(p)(r(p) - w(p)) + S(p)b(p)$$

➥ Les 4 fonctions de sensibilité :

$$S(p) \quad , \quad S(p)G(p) \quad , \quad T(p) \quad , \quad S(p)K(p)$$

Objectifs de commande :

- Un bon suivi du signal de référence : $S(p)$ faible en amplitude
- Une bonne rejection des perturbations : $S(p)G(p)$ faible
- Les bruits de mesure atténués : $T(p)$ est faible sur la plage de fréquence concernée
- L'effort de commande faible : $S(p)K(p)$ et $T(p)$ faible
- La commande délivrée au système faible : $S(p)$ et $S(p)K(p)$ faibles

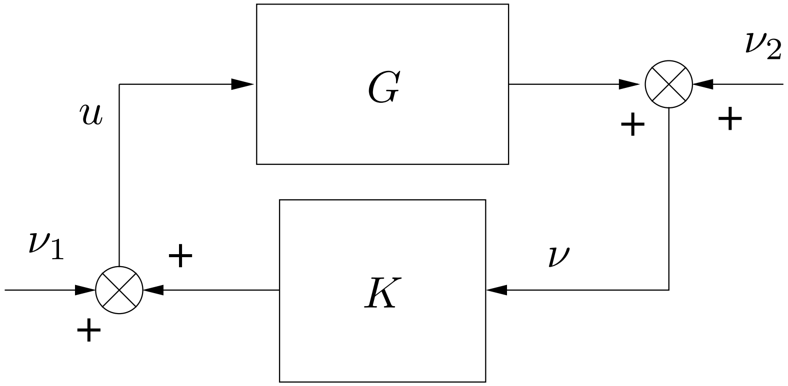
Motivation par un exemple

$$G(p) = \frac{10-p}{p^2(10+p)} \qquad K(p) = \frac{36+33p}{10-p}$$

➥ Fonctions de sensibilité :

$$S(p) = \frac{p^2(10+p)}{(p+3)^2(p+4)} \qquad K(p)S(p) = \frac{p^2(36+33p)(10+p)}{(p+3)^2(p+4)(10-p)}$$

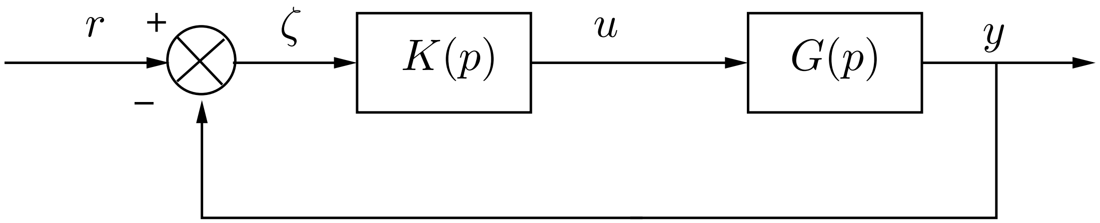
$$T(p) = \frac{36+33p}{(p+3)^2(p+4)} \qquad G(p)S(p) = \frac{10-p}{(p+3)^2(p+4)}$$



▼ **Définition 4** *:*
La boucle à contre-réaction vérifie la propriété de stabilité interne si les quatre fonctions de transfert des entrées $\nu_1,\ \nu_2$ *aux sorties* $u,\ \nu$ *sont stables asymptotiquement.*

$$H_{\nu_1 u}(p) = \frac{G(p)K(p)}{1 - G(p)K(p)} \qquad H_{\nu_1 \nu}(p) = \frac{G(p)}{1 - G(p)K(p)}$$

$$H_{\nu_2 u}(p) = \frac{K(p)}{1 - G(p)K(p)} \qquad H_{\nu_2 \nu}(p) = \frac{1}{1 - G(p)K(p)}$$



Théorème du faible gain

❒ **Théorème 2** :

On suppose que $G(p)$ et $K(p)$ sont asymptotiquement stables. L'asservissement de boucle ouverte $K(p)G(p)$ est stable de manière interne si :

$$\max_{\omega} |K(j\omega)G(j\omega)| < 1$$

✍ **Remarques 1** :

Ce résultat est moins fort que le théorème de Nyquist puisque l'on suppose la stabilité en boucle ouverte et que ce théorème ne constitue qu'une condition suffisante