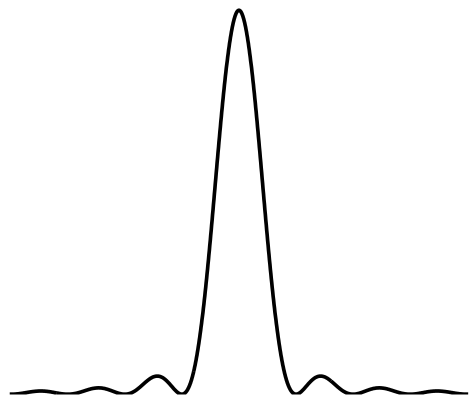
Signaux aléatoires

Cours 1

Introduction et rappels de probabilités



INSA

Troisième année

Organisation du cours

Enseignant Denis Arzelier : chargé de recherche au LAAS-CNRS

Contacts Tel : 05 61 33 64 76 - email : arzelier@laas.fr

Web-page http://www.laas.fr/~arzelier

Organisation du cours

❶ 5 Cours 1h15 : 6h15

- ➩ Support de cours polycopié
- ➩ Transparents téléchargeables sur site internet

❷ 5 travaux dirigés 1h15 : 6h15

- ➩ Exercices analytiques sur papier

❸ 1 Examen

Durée totale : 12h30

Pré-requis

- Mathématiques :
  * Théorie et calcul des probabilités
    (variables aléatoires, densité de probabilité, moments...)
  * Analyse complexe
    (calcul opérationnel de Heaviside, fonctions complexes rationnelles, transformées de Fourier, en Z et de Laplace)
- Théorie du signal déterministe :
  * Représentation temporelle des signaux continus
  * Représentation fréquentielle des signaux continus
  * Analyse spectrale des signaux
- Automatique :
  * Modèles linéaires temps-invariant (LTI)
  * Analyse fréquentielle et temporelle des systèmes LTI
    (convolution, réponse fréquentielle...)

Objectifs du cours

- Introduction à la théorie des processus stochastiques :
  * Maîtrise du vocabulaire
  * Maîtrise de la modélisation des signaux aléatoires
  * Compréhension des principaux concepts (ergodicité...)
- Maîtrise des outils mathématiques associés :
  * Théorie des probabilités
  * Théorie des transformations
- Fournir les bases pour :
  * Cours de traitement du signal
  * Cours de théorie de l'estimation
  * Cours d'Automatique (observateurs et commande robuste)

Motivations

☞ Notion de signal déterministe insuffisante :

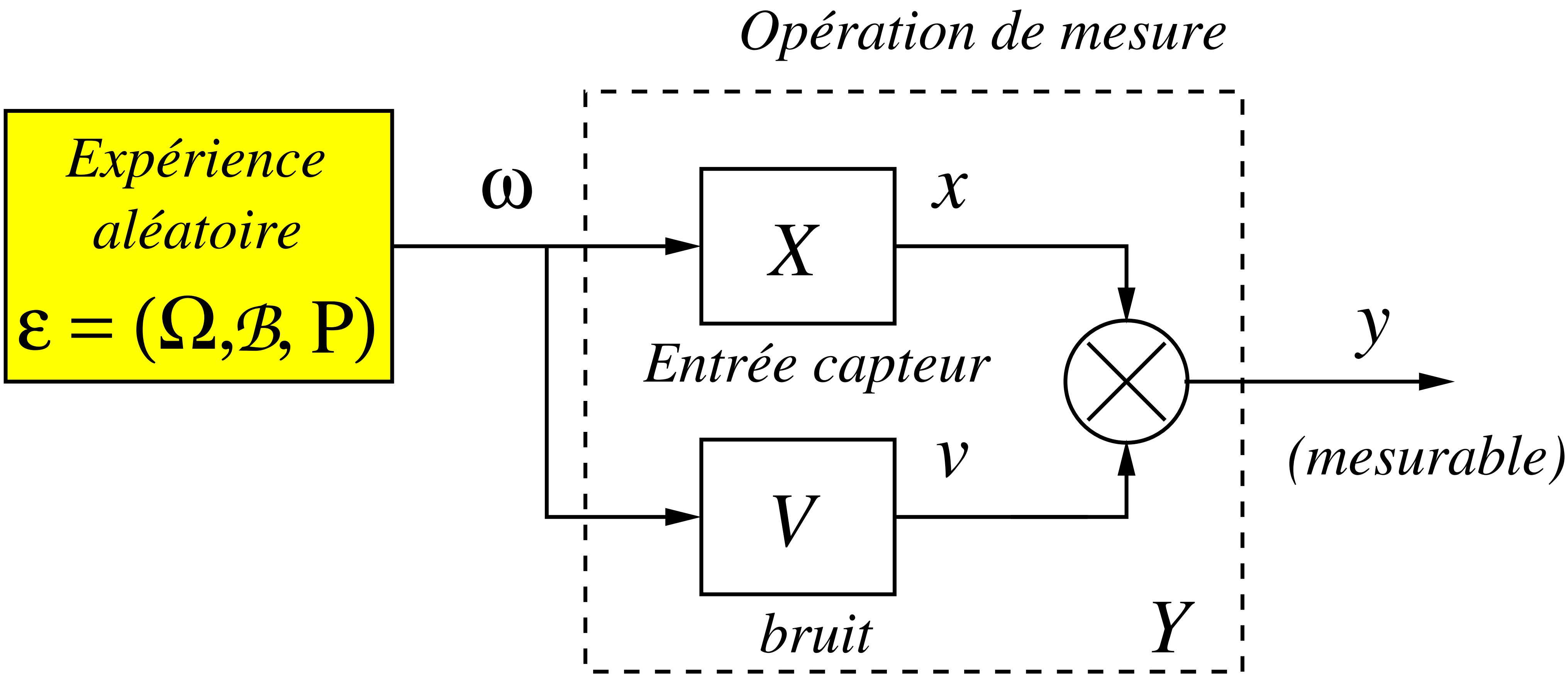
- Aucun modèle mathématique ne peut représenter exactement la réalité
- Tout signal naturel est plus ou moins imprévisible
  (signal correspondant à la prononciation d'un mot)
- Possibilités de perturbations non prévisibles de manière déterministe
- Tous les systèmes technologiques délivrent des signaux bruitées

Bruit : signal aléatoire de contenant pas d'information utile

☞ Axiome de base de la théorie de l'information
"Seuls les signaux ayant certaines caractéristiques aléatoires peuvent transmettre de l'information"

☞ Disposer du cadre de travail mathématique de la théorie axiomatique des probabilités

Motivation : exemple



▼ **Définition 1** :

Un signal est une fonction scalaire ou vectorielle d'une ou plusieurs variables servant de support à la transmission d'une commande ou d'une information

- Signaux temporels ou spatio-temporels
- Signaux analogiques ou numériques
- Signaux continus ou discrets
- Signaux réels ou complexes
- Signaux aléatoires ou déterministes
- Signaux périodiques ou apériodiques
- Signaux transitoires (à énergie finie) ou permanents (à puissance finie)

Rappels de probabilités

- Espace probabiliste :

  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ structure de σ-algèbre

  Axiomes de Kolmogorov

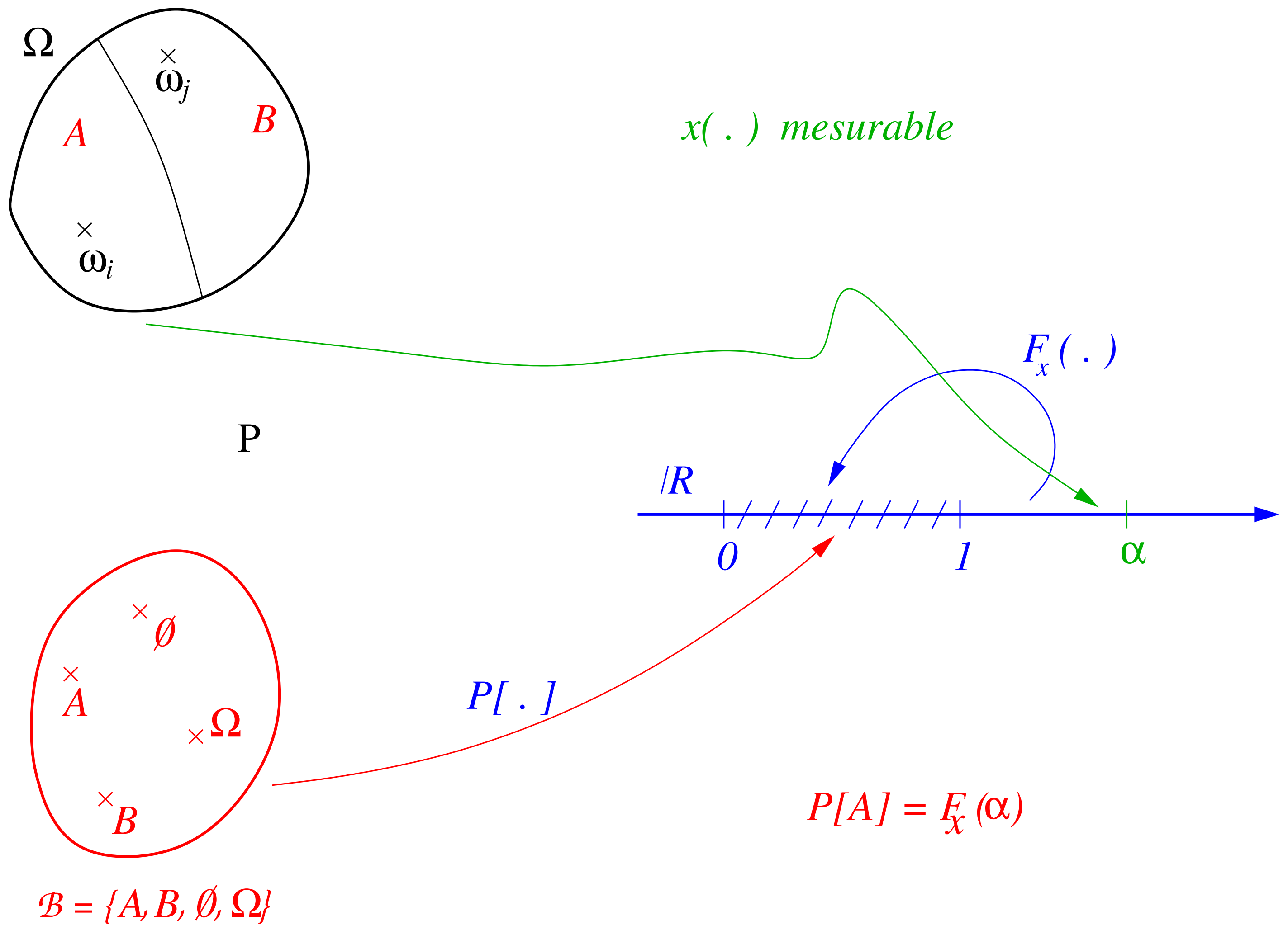
- Variable aléatoire :
  $x(\omega)$ assigne une valeur numérique réelle au résultat d'une expérience aléatoire

- Fonction de répartition de la v.a. :

$$F_x(\alpha) = P[\{\omega \in \Omega \mid x(\omega) \leq \alpha \ , \ \alpha \in \mathbb{R}\}]$$

- Fonction densité de probabilité :
  $f_x(\alpha)$ contient toute l'information *a priori* concernant x pour un nombre infini d'essais

$$F_x(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_x(\xi) d\xi \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_x(\xi) d\xi = 1$$


Ω
ωj
ωi
A
B
x(.) mesurable
P
Fx (.)
/R
0
1
α
Ø
A
Ω
B
P[.]
P[A] = Fx (α)
ℬ = {A, B, Ø, Ω}

Rappels de probabilités : caractérisations statistiques

- Opérateur espérance mathématique :

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f_x(\alpha) d\alpha$$

- Moments et moments centrés d'ordre k :

$$m_k = E[x^k] \qquad \mu_k = E[(x - E[x])^k]$$

- Moyenne, variance et écart-type :

$$M = m_1 = E[x] \qquad \mathrm{var}(x) = \sigma^2 = E[x^2] - E^2[x]$$

- Covariance et coefficient de corrélation :

$$\mathrm{cov}(x, y) = E[(x - E[x])(y - E[y])] \qquad \rho(x, y) = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

▼ **Définition 2** : *A. De Moivre 1733*

Une v.a. x est dite normale ou (gaussienne) si sa densité de probabilité et sa fonction de répartition s'écrivent :

$$f_x(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\alpha - m)^2}{2\sigma^2}} \qquad F_x(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{(v - m)^2}{2\sigma^2}} dv$$

Nota : $x \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$

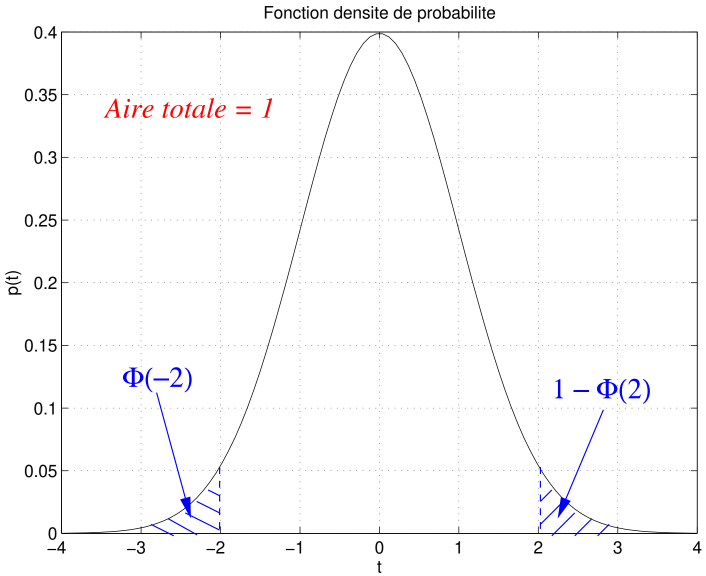
- m : *moyenne et* σ *écart-type*
- *Une v.a. normale x est dite réduite si* $x \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\Phi(\alpha) = F(\alpha)_{|x \sim \mathcal{N}(0,1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

Nota :

La fonction de répartition est une fonction tabulée

$$F_x(\alpha) = \Phi(\frac{\alpha - m}{\sigma}) \quad \Phi(\alpha) = \begin{cases} 0.5(1 + \mathrm{erf}(\alpha/\sqrt{2})) & \alpha \geq 0 \\ 0.5(1 - \mathrm{erf}(\alpha/\sqrt{2})) & \alpha < 0 \end{cases} \quad \mathrm{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-v^2} dv$$



$$F_x(\alpha < x \leq \beta) = \Phi(\frac{\beta - m}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - m}{\sigma})$$

$$P[|x - m| < \sigma] = 2\Phi(1) \sim 0.68 \quad (68\%)$$

$$P[|x - m| < 2\sigma] = 2\Phi(2) \sim 0.95 \quad (95\%)$$

$$P[|x - m| < 3\sigma] = 2\Phi(3) \sim 0.997 \quad (99.7\%)$$

❐ **Théorème 1** : *limite centrale*

Pour n *v.a. indépendantes* $x_1, \cdots, x_n$ *de moyenne* m_i *et de variance* σ_i *alors :*

$$y_n = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_i)}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}} \quad \underrightarrow{n \rightarrow \infty} \quad y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Nota :

L'hypothèse gaussienne est valide si le phénomène aléatoire considéré est du à un effet cumulatif d'un grand nombre de sources indépendantes d'incertitudes dont les effets individuels sont uniformément faibles et négligeables

▼ **Définition 3** *: Loi de Poisson*

Une v.a. x est distribuée de manière poissonienne avec un paramètre a si sa distribution est donnée par :

$$p_x(k) = P[x = k] = e^{-a}\frac{a^k}{k!} \qquad k = 0, 1, \cdots$$

La densité de probabilité est alors donnée par :

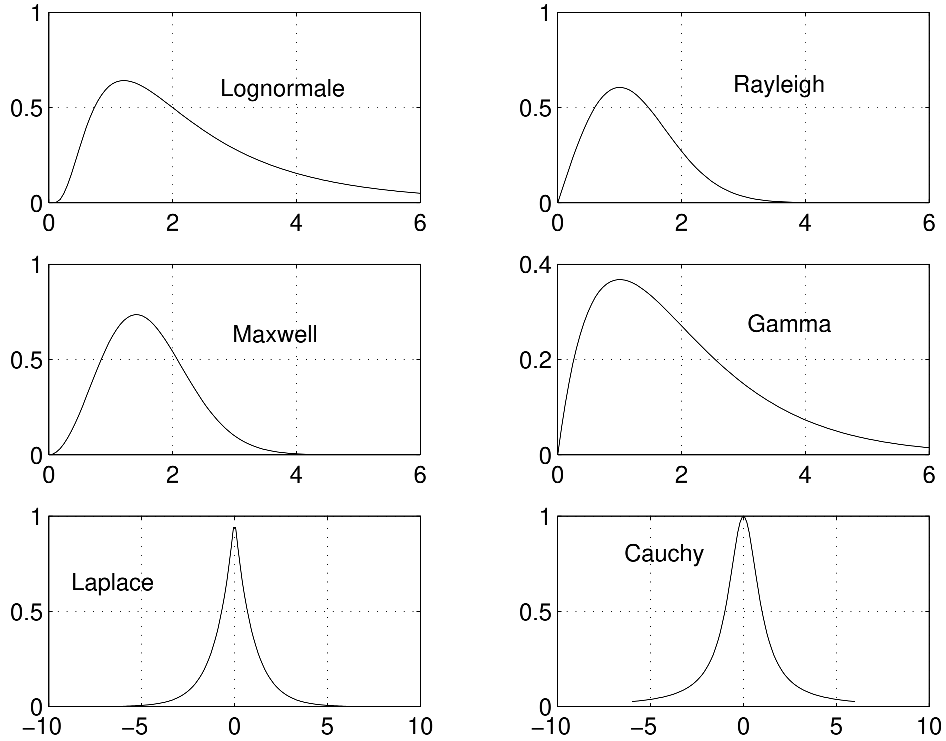
$$f_x(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} P[x = k]\delta(\alpha - k) = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\delta(\alpha - k)$$

Nota :

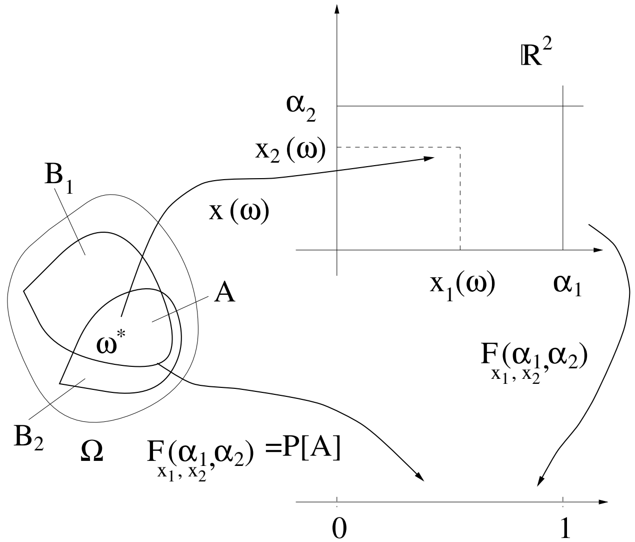
$$\frac{P[x = k-1]}{P[x = k]} = \frac{k}{a}$$

Rappels de probabilités : exemples de lois

Nom	expression de la densité
Lognormal	$\frac{1}{\sqrt{2}\sigma\alpha}\exp[-\frac{(\ln(\alpha)-\mu)^2}{2\sigma^2}]$
Rayleigh	$\alpha\exp[-\alpha^2/2]$
Maxwell	$\alpha^2\exp[-\alpha^2/2]$
Beta	$\alpha^b(1-\alpha)^c$
Gamma	$\alpha^n\exp[-\alpha]$
Laplace	$\exp[-\lvert\alpha\rvert]$
Cauchy	$\frac{1}{1+\alpha^2}$



Rappels de probabilités : vecteurs aléatoires



- Vecteur aléatoire : $X = [x_1, \;\cdots\;, x_n]'$

- Fonction densité de probabilité conjointe : $f_X(\alpha) = f_{x_1,\cdots,x_n}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

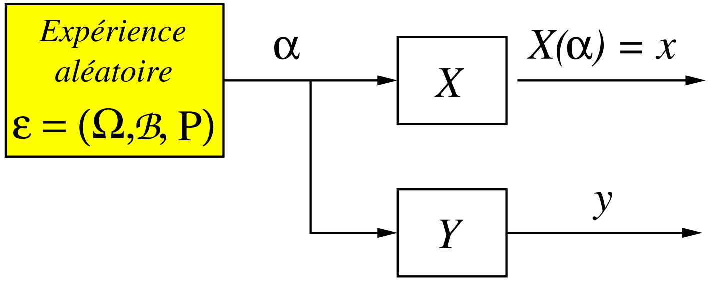
- Vecteur moyenne :

$$M_X = E[X] = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \alpha_1 \cdots \alpha_n f_X(\alpha) d\alpha_1 \cdots d\alpha_n$$

- Matrices de covariance et de corrélation :

$$P_X = E[(X - M_X)(X - M_X)'] \qquad C_X = E[XX'] \qquad P_X = C_X - M_X M_X'$$

Rappels de probabilités conditionnelles



- Densité de probabilité conditionnelle :

$$f_{X/Y}(\alpha/\beta) = \frac{f_{X,Y}(\alpha,\beta)}{f_Y(\beta)} = \frac{f_{Y/X}(\beta/\alpha)f_X(\alpha)}{f_Y(\beta)} \qquad \text{(Rêgle de Bayes)}$$

- Moments conditionnels et covariances conditionnelles :

$$M_{X/Y} = \int_{\mathbb{R}} \alpha f_{X/Y}(\alpha/\beta)d\alpha \qquad \mathrm{cov}(x_i, x_j/\beta) = E[(x_i - m_{x_i/y})(x_j - m_{x_j/y})/\beta]$$

- Indépendance $\Rightarrow$ décorrélation :

$$f_{x,y}(\alpha,\beta) = f_x(\alpha)f_y(\beta) \qquad f_{X/Y}(\alpha/\beta) = f_X(\alpha)$$

▼ **Définition 4** :

Soit $Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ *conjointement gaussiens, alors* Z *est gaussien et est caractérisé par* (m_Z, Q_Z) :

$$f_Z(\gamma) = \left[(2\pi)^{(m+n)/2}(\det(Q_Z))^{1/2}\right]^{-1} e^{-\dfrac{(\gamma - m_Z)' Q_Z^{-1}(\gamma - m_Z)}{2}}$$

Notation :

$$Z \sim \mathcal{N}(m_Z, Q_Z)$$

♥ **Propriétés 1** :

Si Z *est gaussien alors* X *et* Y *sont également gaussiens*

♥ **Propriétés 2** :

- *Deux vecteurs gaussiens non corrélés sont indépendants*
- *Si Z est gaussien, $W = CZ + A$ est également gaussien tel que :*

$$W \sim \mathcal{N}[A + Cm_Z, CQ_ZC']$$

- *Si $X \sim \mathcal{N}(m_X, Q_X)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_Y, Q_Y)$ alors $p_{X/Y}$ est normale :*
  - *moyenne conditionnelle*

$$E[X/Y] = m_X + Q_{XY}Q_Y^{-1}(\beta - m_Y)$$

  - *covariance conditionnelle*

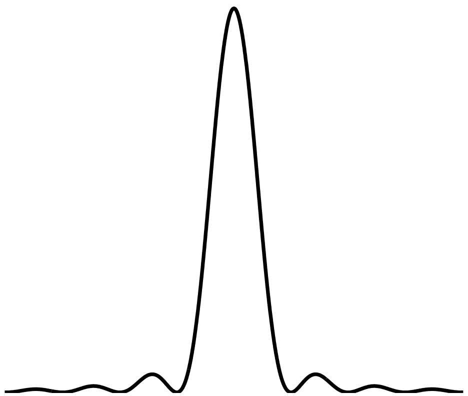
$$Q_{X/Y} = Q_X - Q_{XY}Q_Y^{-1}Q_{YX}$$

  - $V = X - E[X/Y]$ *est un vecteur aléatoire gaussien indépendant de* Y

Signaux aléatoires

Cours 2

Les processus stochastiques : définitions et caractérisations



INSA

Troisième année

▼ Définition 5 :

Un signal aléatoire (scalaire ou vectoriel) est une famille de variables ou vecteurs aléatoires indexée par un ensemble de paramètres $t \in T$ (le temps)
La notation est

$$\{x_t(\omega) \mid t \in T\} \quad T \text{ discret ou continu}$$

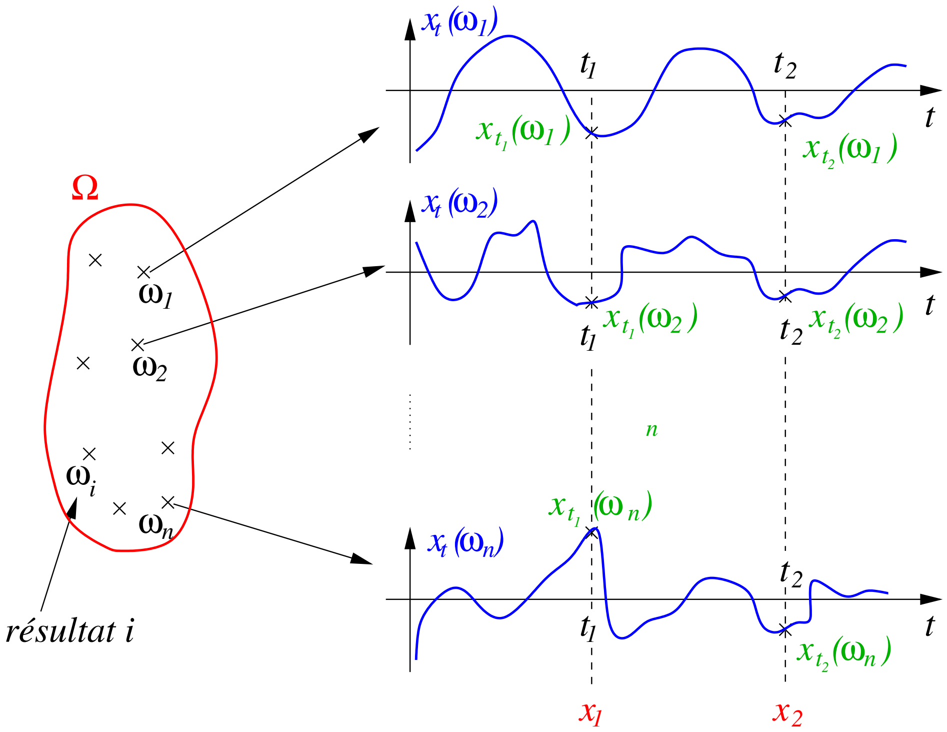
Nota :

- $x_t(\omega)$ est une fonction de deux paramètres : le temps t et ω paramètre aléatoire lié au résultat d'une expérience aléatoire
- Si la variable (vecteur) aléatoire prend ses valeurs dans un espace discret : signal numérique ou chaîne en temps discret x_t ou continu $x(t)$
- Si la variable (vecteur) aléatoire prend ses valeurs dans un espace continu : signal analogique ou processus stochastique en temps discret ou continu

- Pour chaque t, $x_t(\bullet)$ est une variable aléatoire égale à l'état du processus considéré à l'instant t

- Pour ω fixé , $x_\bullet(\omega)$ est une réalisation du processus qui est une fonction du temps

- Pour t et ω fixés, $x_t(\omega)$ est un nombre



Soit le signal aléatoire $\{x_t(\omega) \mid t \in T\}$ où T est continu ou discret

▼ **Définition 6** *: loi de distribution*

Pour toute partition $\{t_1, \cdots, t_n\}$ de T, on définit la loi de distribution finie du signal aléatoire comme la loi de distribution conjointe des variables aléatoires $x_{t_1}, \cdots, x_{t_n}$

La caractérisation du signal aléatoire est donnée pour toutes les partitions $\{t_i\}$ de T par :

- la fonction de répartition conjointe :

$$F_{x_{t_1}, \cdots, x_{t_n}}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

- la fonction densité de probabilité conjointe :

$$f_{x_{t_1}, \cdots, x_{t_n}}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

Caractérisation probabiliste : exemple

Soit le signal aléatoire défini par $x(t) = a + bt$ où a et b sont deux variables aléatoires normalement distribuées :

$$a \sim \mathcal{N}(m_a, \sigma_a) \qquad\qquad b \sim \mathcal{N}(m_b, \sigma_b)$$

❒ **Théorème 2** :

Z étant un vecteur gaussien, $Z \sim \mathcal{N}(m_Z, Q_Z)$ alors $W = CZ + A$ est gaussien, $W \sim \mathcal{N}(A + Cm_Z, CQ_ZC')$

Comme,

$$X = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ \vdots \\ x(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

le vecteur X est gaussien de moyenne et de covariance déduites de celles de a et b

Soit un processus stochastique $\{x_t(\omega) \mid t \in T\}$

- Densité du premier ordre :

$$\boxed{f_{x(t)}(\alpha) = p(\alpha, t)}$$

- Densité du deuxième ordre :

$$\boxed{f_{x(t),x(\tau)}(\alpha, \beta) = p(\alpha, \beta, t, \tau)}$$

▼ **Définition 7** : *processus du second ordre*

Un processus stochastique caractérisé entièrement par ses lois de distributions au premier et deuxième ordre est appelé processus du second ordre

Exemple :

Le signal aléatoire défini par $x(t) = a + bt$ où a et b sont deux variables aléatoires normalement distribuées :

$$a \sim \mathcal{N}(m_a, \sigma_a) \qquad\qquad b \sim \mathcal{N}(m_b, \sigma_b)$$

▼ **Définition 8** : *moyenne*

Soit $\{x_t(\omega) \mid t \in T\}$ *noté* $x(t)$, *alors* **la moyenne de** $x(t)$ *est définie par:*

$$\boxed{m_x(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha p(\alpha, t) d\alpha}$$

▼ **Définition 9** : *matrice d'autocorrélation et d'autocovariance*

On peut définir la matrice d'autocorrélation

$$\boxed{R(t, \tau) = E[x(t)x(\tau)']}$$

dont les éléments sont :

$$r_{ij}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i \beta_j p[\alpha, t, \beta, \tau] d\alpha_i d\beta_j$$

et la matrice d'autocovariance :

$$\boxed{P(t, \tau) = E[(x(t) - m_x(t))(x(\tau) - m_x(\tau))']}$$

♥ **Propriétés 3** :

- $P(t,\tau) = P(\tau,t) \quad \forall\, t,\tau$
- $Q(t) = P(t,t) \geq 0 \quad \forall\, t$
- $R(t,\tau) = R(\tau,t) \quad \forall\, t,\tau$
- $R(t,t) \geq 0 \quad \forall\, t$
- $P(t,\tau) = R(t,\tau) - m_x(t)m_x(\tau)' \quad \forall\, t,\tau$

Auto $\neq$ Inter : $\{x_t(\omega) \mid t \in T_x\}$ et $\{y_t(\omega) \mid t \in T_y\}$

- Intercorrélation :

$$\Gamma_{xy}(t,\tau) = E[x(t)y(\tau)']$$

- Intercovariance :

$$C_{xy}(t,\tau) = E[(x(t) - m_x(t))(y(\tau) - m_y(\tau))']$$

Exemple :

Soit le processus stochastique :

$$x(t) = a + bt \qquad a \text{ v.a.} \sim \mathcal{N}(m_a, \sigma_a^2) \text{ et } b \text{ v.a.} \sim \mathcal{N}(m_b, \sigma_b^2)$$

$$m_x(t) = E[a] + tE[b] = m_a + tm_b$$

$$\begin{aligned} r(t,\tau) &= E[a^2] + (t+\tau)E[ab] + t\tau E[b^2] \\ &= \sigma_a^2 + m_a^2 + (t+\tau)(\rho(a,b)\sigma_a\sigma_b + m_a m_b) + t\tau(\sigma_b^2 + m_b^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(t,\tau) &= \text{var}(a) + \text{cov}(a,b)(t+\tau) + \text{var}(b)t\tau \\ &= \sigma_a^2 + (t+\tau)\rho(a,b)\sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 t\tau \end{aligned}$$

▼ **Définition 10** *: stationnarité au sens strict*

$x(t)$ *est dit stationnaire au sens strict (SSS) sur* T *intervalle de définition, si pour toute partition* $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ *de* T *:*

$$\forall\, n,\ \forall\, \theta,\quad f_{x(t_1),\cdots,x(t_n)}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) = f_{x(t_1+\theta),\cdots,x(t_n+\theta)}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

▼ **Définition 11** *: stationnarité au sens large*

$x(t)$ *est un processus stochastique stationnaire au sens large (SSL) si*

$$\begin{cases} m_x(t) = m_x \quad \text{(indépendant du temps)} \\ P(t,\tau) = P(t-\tau) \end{cases}$$

❐ **Lemme 1** :

Tout processus SSS est également SSL mais l'inverse n'est pas nécessairement vérifié

Exemple :
Soit le processus

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

où a, b sont des variables aléatoires non corrélées de moyenne nulle et de variance unité et ω est une constante

$$m(t) = 0 \quad r(t+\tau, t) = \cos(\omega\tau)$$

Le processus est stationnaire au sens large (SSL)

▼ **Définition 12** *:*

La moyenne temporelle d'un échantillon du processus stochastique $x(t)$ est définie par :

$$< x(t) >= \overline{x} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

Nota :

- Moyenne quadratique

$$< x^2(t) >= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)dt$$

- Moyenne temporelle de l'autocorrélation

$$\overline{R}_x(\tau) =< x(t)x(t+\tau) >= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

Nota :

- $\overline{x}$ et $\overline{R}_X(\tau)$ sont des variables aléatoires
- $E[\overline{x}] = m_x$
- $E[\overline{R}_X(\tau)] = R_X(\tau)$

▼ **Définition 13** *:*

Un processus stochastique $x(t)$ est ergodique si toutes les moyennes temporelles existent et ont même valeur pour tout échantillon

$$\boxed{\forall\ f \ \ : \quad \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(x(t))dt = E[f(x(t))]}$$

Nota : notion très difficile à vérifier

Ergodicité (suite)

▼ **Définition 14** :

- *Un processus est dit à moyenne ergodique si*

$$\overline{x} =< x(t) >= E[x(t)] = m_x$$

- *Un processus est dit à autocorrélation ergodique si*

$$\overline{R}_x(\tau) =< x(t)x(t+\tau) > \;\; = \;\; R_x(\tau)$$

Exemple :

$x(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$ où A et ω sont des constantes et Θ est une v.a.uniformément répartie sur $[-\pi \ , \ \pi]$

Puissance d'un processus stochastique SSL

▼ **Définition 15** *:*

La puissance moyenne d'un processus stochastique $x(t)$ SSL est définie par :

$$p = E[x'(t)x(t)]$$

♥ **Propriétés 4** *:*

$$p = E[x'(t)x(t)] = \text{trace}(R_x(0))$$

Exemple :

$x(t) = r\cos(\omega t + \phi)$ où ω est constant et r, ϕ sont deux v.a. indépendantes et ϕ uniforme sur $[-\pi\ ,\ \pi]$

$$p = \frac{1}{2}E[r^2]$$

Terminologie

Soit $x(t)$ un processus stochastique scalaire,

- $\overline{x} =< x(t) >$ est la composante continue du signal $x(t)$
- $[\overline{x}]^2 =< x(t) >^2$ est la puissance de la composante continue du signal $x(t)$
- $\overline{R}_x(0) =< x^2(t) >$ est la puissance moyenne totale du signal $x(t)$
- $\overline{\sigma}_x^2 =< x^2(t) > - < x(t) >^2$ est la puissance moyenne de la composante alternative
- $\overline{\sigma}_x$ est la valeur efficace du signal $x(t)$

Exemple :

$x(t) = r\cos(\omega t + \phi)$ où ω constant et r, ϕ sont deux v.a. indép. et ϕ uniforme sur $[-\pi\ ,\ \pi]$

- La composante continue $\overline{x} =< x(t) >= 0$ et sa puissance $< x(t) >^2 = 0$
- La puissance moyenne $\overline{R}_x(0) =< x^2(t) >= \dfrac{r^2}{2}$ et $\overline{\sigma}_x = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$

Soit $x(t)$ un signal aléatoire SSL de matrice de corrélation $R_x(\tau)$

▼ **Définition 16** : *formules de Wiener-Khinchin*

La densité spectrale de puissance ou spectre de puissance de $x(t)$ notée $\Psi_x(\omega)$ est définie comme la transformée de Fourier de la matrice de corrélation $R_x(\tau)$:

$$\boxed{\Psi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_x(\tau) d\tau}$$

Réciproquement,

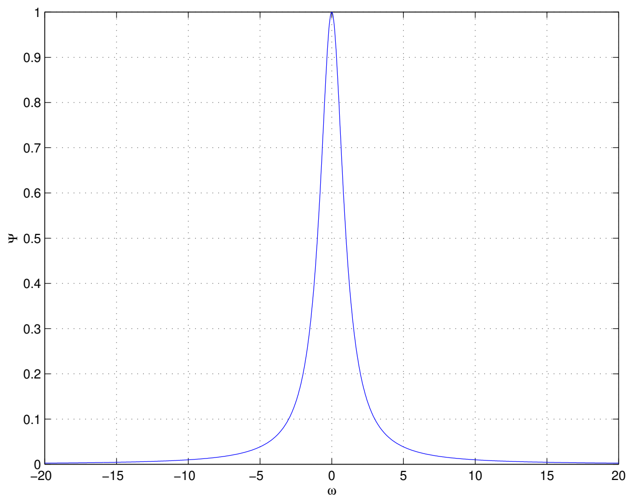
$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} \Psi_x(\omega) d\omega$$

♥ **Propriétés 5** :

- $\Psi_x(-\omega) = \Psi_x(\omega)' \quad \forall\ \omega$
- $\Psi_x^*(\omega) = \Psi_x(\omega) \quad \forall\ \omega$
- $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(\omega)d\omega = R_x(0)$
- $\Psi_x(\omega) \geq 0 \quad \forall\ \omega$

Exemple : le processus exponentiellement corrélé $x(t)$ SSL défini par sa moyenne nulle et sa corrélation $R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\frac{|\tau|}{\theta}}$ a une densité spectrale de puissance :

$$\Psi_x(\omega) = \frac{2\sigma^2\theta}{\theta^2\omega^2 + 1}$$



❒ **Théorème 3** :

Soit le processus stochastique $x(t)$, alors pour toute matrice symétrique $W(t)$:

$$E[x(t)'W(t)x(t)] = \mathrm{Trace}[W(t)R_x(t,t)]$$

Si, de plus, $x(t)$ est stationnaire au sens large de moyenne nulle et W est constante alors :

$$E[x(t)'Wx(t)] = \mathrm{Trace}[WR_x(0)] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Trace}[\int_{-\infty}^{\infty} W\Psi_x(\omega)d\omega]$$

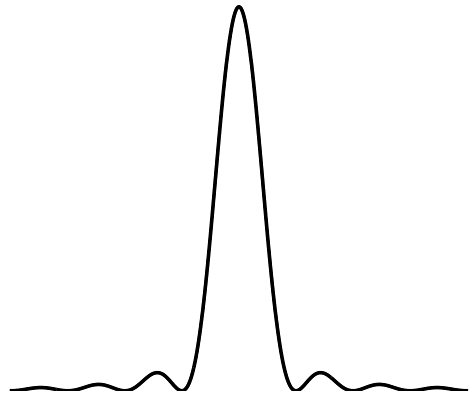
Nota :

$\Psi_x(\omega)$ représente la répartition harmonique de la puissance moyenne p de $x(t)$

Signaux aléatoires

Cours 3

Quelques processus stochastiques remarquables



INSA
Troisième année

▼ **Définition 17** *:*

Soient $\{x(t)\ ,\ t \in\ T_x\}$ *et* $\{y(t)\ ,\ t \in\ T_y\}$ 2 *processus stochastiques.*
$x(t)$ *et* $y(t)$ *sont indépendants si* $\{x(t_1), \cdots, x(t_n)\}$ *et* $\{y(t_1), \cdots, y(t_m)\}$ *sont des ensembles de vecteurs aléatoires indépendants pour toutes les partitions* $\{t_1, \cdots, t_n\} \in\ T_x$ *et* $\{t_1, \cdots, t_m\} \in\ T_y$

Nota : vecteurs aléatoires indépendants

$$F_{x,y}(\alpha, \beta) = F_x(\alpha)F_y(\beta) \qquad p_{x,y}(\alpha, \beta) = p_x(\alpha)p_y(\beta)$$

$$E[f(x)g(y)] = E[f(x)]E[g(y)] \qquad p_{x/y}(\alpha/\beta) = p_x(\alpha)$$

▼ **Définition 18** *:*

Un processus stochastique $\{x(t)\ ,\ t \in\ T\}$ *est à incréments stationnairement indépendants (ISI) si pour tous les ensembles* $\{t_i \in\ T\ :\ t_i < t_{i+1}\}$ *:*

- *Indépendance des incréments :*

$$x(t_2) - x(t_1), \cdots , x(t_n) - x(t_{n-1})$$

  sont des vecteurs aléatoires indépendants

- *Stationnarité :*

  $x(t+h) - x(\tau+h)$ *a la même distribution que* $x(t) - x(\tau)\ \ \forall\ t > \tau \in T,\ h > 0$

▼ **Définition 19** : *processus gaussien*

Le processus stochastique $x(t)$ est gaussien si pour toute partition $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ de T, le vecteur des variables aléatoires $[x(t_1), \cdots, x(t_n)]$ est gaussien

♥ **Propriétés 6** :

- *Un processus gaussien est un processus du second ordre*

$$p_x(\alpha, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(\alpha, t, \beta, \tau) d\beta$$

- *Un processus gaussien SSL est SSS*

❒ **Théorème 4** *limite centrale*

Soient $x_1, \cdots, x_n$ *une suite de vecteurs aléatoires indépendants alors le vecteur aléatoire*

$$x = x_1 + \cdots + x_n$$

a une densité de probabilité qui tend vers une densité de probabilité gaussienne quand $n \longrightarrow \infty$

Nota :

Le processus gaussien est un bon modèle pour les bruits dans :

- *Transmetteurs et récepteurs radio*
- *Radars*
- *Systèmes de commande*

▼ **Définition 20** :

Le processus stochastique $\{x(t)\ ,\ t \in\ T\}$ *est markovien si* $\forall\ \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ *de* T *:*

$$P[x(t_n) < \alpha_n / x(t_{n-1}), \cdots, x(t_1)] = P[x(t_n) < \alpha_n / x(t_{n-1})]$$

Soit en termes de fonction densité de probabilité :

$$p_{x(t_n)/x(t_{n-1}),\cdots,x(t_1)}(\alpha_n/\alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_1) = p_{x(t_n)/x(t_{n-1})}(\alpha_n/\alpha_{n-1})$$

▼ **Définition 21** :

$p_{x(t_n)/x(t_{n-1})}(\alpha_n/\alpha_{n-1})$ *est appelée fonction densité de probabilité de transition*

♥ **Propriétés 7** :

- *Toute l'information sur le passé est concentrée dans le dernier état "observé"*

- *Le processus de Markov généralise la propriété des équations différentielles ordinaires d'ordre 1*

$$x(t_2) = g(t_2, x(t_1), t_1) \quad \dot{x}(t) = f(x(t))$$

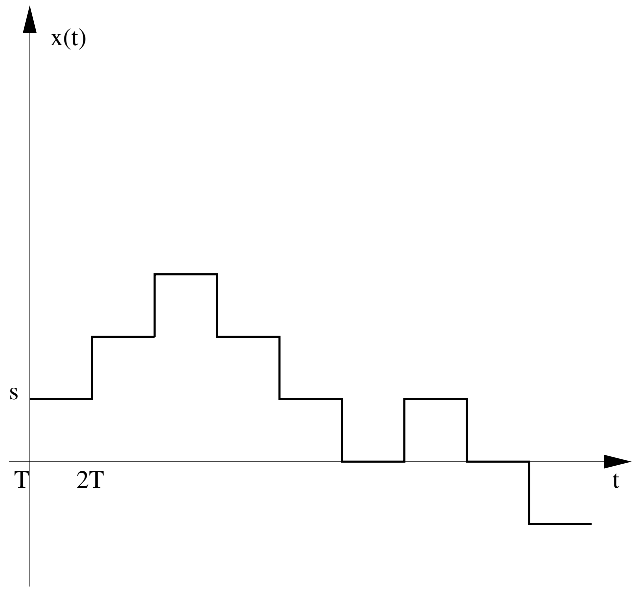
- *Le processus markovien est un processus du second ordre*

$$p_{x(t_n),x(t_{n-1}),\cdots,x(t_1)}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_1) = p_{x(t_n)/x(t_{n-1})}(\alpha_n/\alpha_{n-1}) \bullet$$
$$p_{x(t_{n-1})/x(t_{n-2})}(\alpha_{n-1}/\alpha_{n-2}) \cdots p_{x(t_2)/x(t_1)}(\alpha_2/\alpha_1) p_{x(t_1)}(\alpha_1)$$

Exemple : $w_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $x_0 \sim \mathcal{N}(\overline{x}_0, p^2)$ et indépendance mutuelle

$$x_{n+1} = x_n + w_n \quad n = 0, 1, \cdots ,$$

On lance une pièce non truquée toutes les T secondes et suivant que l'on obtient face ou pile, on effectue un pas à droite ou à gauche de longueur s



$$n \text{ tirages} \begin{cases} k \text{ fois pile} \\ n-k \text{ fois face} \end{cases}$$

$$x(nt) = ks - (n-k)s = ms = (2k-n)s$$

$$P[x(nT) = ms] = \frac{\mathcal{C}_n^k}{2^n} = \frac{\mathcal{C}_n^{\frac{m+n}{2}}}{2^n}$$

En posant $x(nT) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ où $x_i = \pm s$ v.a. taille du pas i

$$E[x_i] = 0 \quad E[x_i^2] = s^2 \quad E[x(nT)] = 0 \quad E[x^2(nT)] = ns^2$$

Pour n grand et pour k dans un $\sqrt{npq}$ voisinage de np

Formule de DeMoivre – Laplace $$\mathcal{C}_n^k \, p^k q^{n-k} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-(k-np)^2/2npq}$$

Ici, $p = q = 0.5$ et $m = 2k - n$, ce qui conduit à :

$$P[x(nT) = ms] \simeq \frac{1}{\sqrt{n\pi/2}} e^{-m^2/2n}$$

$$P[x(t) \leq ms] \simeq \Phi(m/\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{m}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \quad (n-1)T < t \leq nT$$

pour m de l'ordre de $\sqrt{n}$

▼ **Définition 22** :

Une séquence aléatoire blanche $\{x_n \ , \ n = 1, 2, \cdots\}$ *est une séquence de markov telle que :*

$$p_{x_k/x_l}(\alpha_k/\alpha_l) = p_{x_k}(\alpha_k) \qquad (k > l)$$

Si les x_k *sont normalement distribués alors c'est une séquence blanche gaussienne définie par sa moyenne et sa covariance :*

$$E[x_n] = m_n$$
$$P(n,k) = V_n \delta_{nk} \quad \text{Intensité} \ \ V_n \geq 0$$

Nota : indépendance des x_k

Bruit blanc

▼ **Définition 23** :

$x(t)$ *est* *un bruit blanc* *s'il vérifie :*

$$p_{x(t)/x(\tau)}(\alpha/\beta) = p_{x(t)}(\alpha) \quad t > \tau$$

▼ **Définition 24** :

Un bruit blanc gaussien *est un processus stochastique gaussien défini par :*

$$E[x(t)] = m_x(t)$$
$$P(t,\tau) = E[(x(t) - m_x(t))(x(\tau) - m_x(\tau))'] = V(t)\delta(t-\tau)$$

où $V(t) \geq 0$ *intensité du bruit blanc et* $\delta(\bullet)$ *impulsion de Dirac*

Si l'intensité du bruit blanc est constante, le processus est SSL et sa densité spectrale de puissance est donnée par :

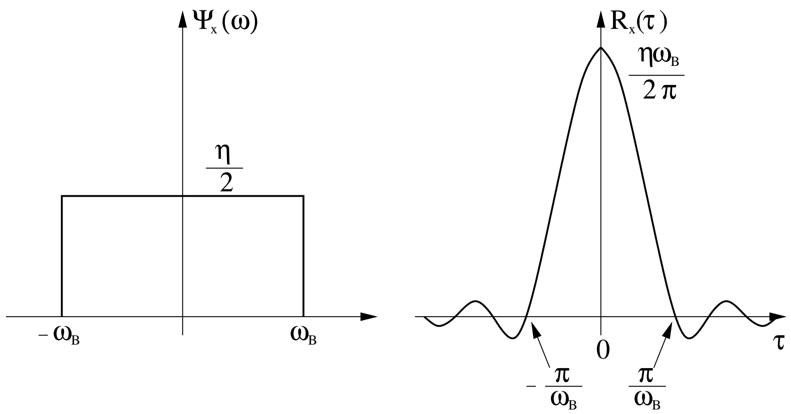
$$\Psi_x(\omega) = V$$

Bruit blanc à bande limitée

▼ Définition 25 :

Un signal aléatoire est dit être un bruit blanc à bande limitée si :

$$\Psi_x(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\eta}{2} & |\omega| \leq \omega_B \\ \\ 0 & |\omega| \geq \omega_B \end{cases}$$

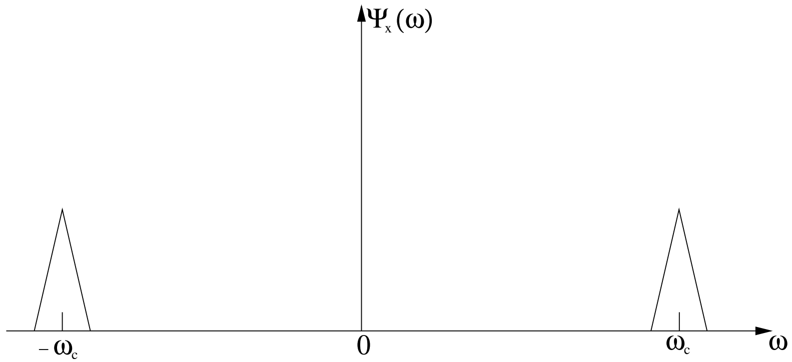


D'où l'on déduit que :

$$\boxed{R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_B}^{\omega_B} \frac{\eta}{2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{\eta\omega_B}{2\pi}\frac{\sin \omega_B\tau}{\omega_B\tau}}$$

▼ Définition 26 :

Soit $x(t)$ *un processus SSL de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance* $\Psi_x(\omega)$ *non nulle dans une bande de largeur* $2W$ *dont la valeur est faible par rapport à la fréquence centrale* ω_c *de cette bande. Le processus est dit à bande étroite*



$$x(t) = V(t)\cos(\omega_c t + \phi(t))$$

où $V(t)$ est un processus aléatoire appelé enveloppe et $\phi(t)$ est un processus aléatoire appelé phase

Tout processus à bande étroite peut être factorisé comme (décomposition cartésienne) :

$$x(t) = X_c(t)\cos\omega_c t - X_s(t)\sin\omega_c t$$

où $X_c = V(t)\cos\phi(t)$ est la composante en phase et $X_s(t) = V(t)\sin\phi(t)$ est la composante en quadrature

$$V(t) = \sqrt{X_c(t)^2 + X_s(t)^2} \quad \phi(t) = \mathrm{atan}\frac{X_s(t)}{X_c(t)}$$

♥ **Propriétés 8** *:*

- *X_s et X_c ont une densité spectrale identique :*

$$\Psi_{X_c} = \Psi_{X_s} = \Psi_x(\omega - \omega_c) + \Psi_x(\omega + \omega_c) \quad |\omega| \leq W$$

- *X_c et X_s ont même moyenne et même écart type que $x(t)$ et sont décorrélés*

▼ **Définition 27** *:*

Un processus $\{x(t)\ ,\ t \geq 0\}$ *est un processus de comptage si* $x(t)$ *représente le nombre total d'évènements intervenu aléatoirement dans* $(0\ ,\ t)$

♥ **Propriétés 9** *:*

1- $x(t) \geq 0$ *et* $x(0) = 0$

2- $x(t) \in \mathbb{N}$

3- $x(s) \leq x(t)$ *si* $s < t$

4- $x(t) - x(s)$ *est égal au nombre d'évènements intervenant dans* $(s\ ,\ t)$

Définition 28 *:*

Un processus de comptage $\{x(t)\ ,\ t \geq 0\}$ *est un processus de Poisson d'intensité* λ *si :*

1- $x(0) = 0$

2- $x(t)$ *est à incréments indépendants (indépendance du nombre d'évènements dans* $T_1 \cap T_2 = \emptyset$*)*

3- Le nombre d'évènements dans un intervalle de longueur t *suit une distribution de Poisson de moyenne* λt

$$\forall\ s\ ,\ t > 0 \qquad P[x(t+s) - x(s) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n = 0,\ 1, \cdots$$

Nota :

Modèle pour les arrivées d'appel à un central téléphonique, émission de particules d'une source radioactive, arrivées dans un magasin

♥ **Propriétés 10** :

1- $x(t)$ *est à incréments stationnaires*

2- Moment et variance :

$$E[x(t)] = \lambda t \qquad \mathrm{var}[x(t)] = \lambda t$$

3- $\forall\ t > 0 \qquad P[x(t+\Delta t) - x(t) = 0] = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$

4- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(t,s) = \lambda \min(t,s) + \lambda^2 ts$$

5- Le temps d'arrivée y *d'un évènement est une v.a. distribuée suivant la loi exponentielle :*

$$\forall\ t > 0 \quad P[y \leq t] = F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad p_y(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

▼ **Définition 29** : *processus de Wiener*

Un processus de Wiener est un processus stochastique continu $\{x_t \ , \ t \geq 0\}$ si :

- *Il est à incréments stationnairement indépendants*
- *Il est normalement distribué de moyenne nulle*
- $P[\{x_0 = 0\}] = 1$

Nota :

- Le processus de Wiener est la limite de la marche aléatoire quand $T \rightarrow 0$
- C'est un bon modèle pour le mouvement de particules dans un fluide (mouvement Brownien)

Le processus de Wiener : caractérisation

La distribution de $x(t)-x(\tau)$ pour $t>\tau\geq 0$ est normale caractérisée par :

- $E[x(t)-x(\tau)]=0$
- $R(t,\tau)=Q(\min(t,\tau))$ avec $Q(t)=E[x(t)x(t)']$

♥ **Propriétés 11** *:*

- $Q(\tau)\geq Q(t)\ \forall\ \tau\geq t$ *et* $Q(t)$ *abs. continue :* $Q(t)=\displaystyle\int_0^t V(s)ds$ *et* $V(s)=V(s)'\geq 0$
- *Processus gaussien-markovien*

$$R(t,\tau)=\int_0^{\min(t,\tau)} V(s)ds \quad \forall\ t,\ \tau>0$$
$$P(t,\tau)=E[((x(t)-x(\tau))(x(t)-x(\tau))']=Q(t)-Q(\tau)=\int_\tau^t V(s)ds$$

Soit $Z(t)$ le processus stochastique défini comme un bruit blanc.

$$E[Z(t)] = 0 \quad E[Z(t)Z(t)'] = \delta(t-\tau)$$

On définit le processus stochastique $W(t)$ processus de Wiener :

$$\boxed{W(t) = \int_0^t Z(\xi)d\xi}$$

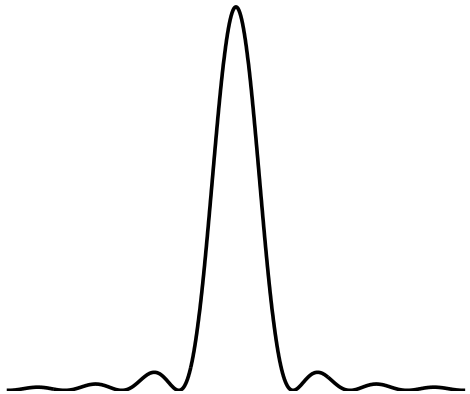
alors :

- $E[W(t)] = 0$
- $W(0)$: v.a. de valeur nulle
- $W(t)$ est à ISI
- $W(t)$ est normalement distribué

Signaux aléatoires

Cours 4

Transmission deans les systèmes linéaires



INSA

Troisième année

Filtrage linéaire des signaux aléatoires

Soit un système linéaire temps-invariant (LTI) défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou sa fonction de transfert $H(p) = \mathcal{L}[h(t)]$ et $x(t)$ un signal aléatoire

La réponse $y(t)$ est un signal aléatoire :

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Caractérisation statistique de $y(t)$:

- Moyenne de $y(t)$
- Corrélation de $y(t)$ et densité spectrale de puissance de $y(t)$

Filtrage linéaire : moyenne

$$
\begin{aligned}
m_y(t) = E[y(t)] \quad &= \quad E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right] \\
&= \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)E[x(t-\tau)]d\tau \\
&= \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)m_x(t-\tau)d\tau = h(t) * m_x(t)
\end{aligned}
$$

Si le signal d'entrée $x(t)$ est SSL alors :

$$
m_y(t) = m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)d\alpha = m_x H(0)
$$

La corrélation $R_y(t_1, t_2) = E[y(t_1)y(t_2)]$ se calcule par :

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_x(t_1 - \alpha, t_2 - \beta)d\alpha d\beta$$

Si le signal d'entrée $x(t)$ est SSL alors $R_x(t_1, t_2)$ est une fonction de la différence temporelle $t_2 - \beta - t_1 + \alpha = \tau - \beta + \alpha$ et donc $R_y(t_1, t_2)$ est une fonction de τ :

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_x(\tau + \alpha - \beta)d\alpha d\beta$$

❒ **Lemme 2** *:*

La transmission d'un signal d'entrée $x(t)$ SSL par un système linéaire temps-invariant résulte en un signal de sortie $y(t)$ SSL

En appliquant la transformée de Fourier à la corrélation

$$
\begin{aligned}
\Psi_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_x(\tau+\alpha-\beta)e^{-j\omega\tau} d\tau d\alpha d\beta \\
&= |H(\omega)|^2 \Psi_x(\omega)
\end{aligned}
$$

Nota : si l'on souhaite calculer la corrélation du signal de sortie

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \Psi_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

La puissance moyenne du signal de sortie est :

$$E[y^2(t)] = R_y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \Psi_x(\omega) d\omega$$

Filtrage linéaire des signaux aléatoires : exemple

Soit le processus stochastique $x(t)$ SSL de moyenne 2 et de corrélation $R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\frac{|\tau|}{\theta}}$ et le système LTI de réponse impulsionnelle $h(t) = 3e^{-2t}$:

- La moyenne $m_y(t)$:

$$m_y(t) = m_x(t)H(0) \quad H(p) = \frac{3}{p+2}$$

$$m_y(t) = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$$

- La densité spectrale de puissance $\Psi_y(\omega)$:

$$\Psi_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \Psi_x(\omega) \qquad \Psi_x(\omega) = \frac{2\sigma^2\theta}{\theta^2\omega^2 + 1}$$

$$\Psi_y(\omega) = \frac{18\sigma^2\theta}{(\theta^2\omega^2 + 1)(4 + \omega^2)}$$

▼ **Définition 30** :

Un signal aléatoire $x(t)$ SSL peut être caractérisé par sa réponse fréquentielle ou spectre complexe $\Phi_x(p)$ défini comme la transformée de Laplace bilatère de sa fonction d'autocorrélation :

$$\boxed{\Phi_x(p) = \mathcal{L}_2[R_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)e^{-\tau p}d\tau}$$

Nota : $\Phi_x(p) = \Phi_x(\omega)_{|\omega=-jp}$ $\qquad \Phi_x(\omega) = \Phi_x(p)_{|p=j\omega}$

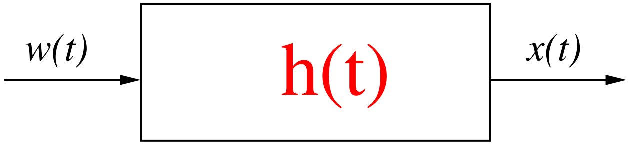
❒ **Théorème 5** :

La sortie d'un système LTI défini par sa fonction de transfert $H(p)$ dont l'entrée est un signal aléatoire $x(t)$ SSL de spectre complexe $\Phi_x(p)$ est un signal aléatoire $y(t)$ de SSL de spectre complexe :

$$\Phi_y(p) = H(-p)\Phi_x(p)H(p)$$

▼ Définition 31 *:*

Etant donné un signal aléatoire $x(t)$*, un filtre formeur de* $x(t)$ *est le filtre linéaire stable à minimum de phase de fonction de transfert* $H(p)$ *tel que* $x(t)$ *est généré comme la réponse de ce filtre à un bruit blanc* $w(t)$ *stationnaire d'intensité unitaire.*



On a donc les relations :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt$$

On obtient alors :

$$\Psi_x(p) = H(p)H(-p) \quad \Psi_x(\omega) = |H(\omega)|^2$$

☛ **Problème 1** :

Etant donnée une fonction positive et paire délimitant une surface finie $\Psi_x(\omega)$, déterminer une fonction de transfert à minimum de phase $H(p)$ telle que :

$$\Psi_x(\omega) = |H(\omega)|^2$$

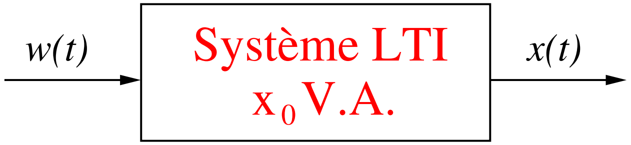
❒ **Théorème 6** :

Ce problème a une solution ssi $\Psi_x(\omega)$ vérifie la condition de Paley-Wiener :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln(\Psi_x(\omega))|}{1+\omega^2} d\omega < \infty}$$

Nota :
Le problème de factorisation de $\Psi_x(\omega)$ n'est pas simple en général. Un cas particulier est celui des spectres rationnels

Etant donné un système LTI décrit dans l'espace d'état



Il s'agit d' étudier sa réponse à un signal d'entrée aléatoire considérant que le vecteur d'état initial est aléatoire

Le vecteur d'état $x(t)$ est un processus stochastique : nature et aractérisation statistique

Modèles :

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)w(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

➥ **Hypothèses 1** *:*

- x_0 *est un vecteur aléatoire donné par* (m_0, P_0)
- $w(t)$ *est un bruit, processus stochastique tel que :*

$$E[w(t)] = \mu(t) \qquad \text{et} \qquad E[(w(t) - \mu(t))(w(\tau) - \mu(\tau))'] = Q(t, \tau)$$

- x_0 *et* $w(t)$ *sont* *indépendants*

Nature du processus stochastique

➥ **Hypothèses 2** :

$w(t)$ *est un bruit blanc indépendant de* x_0

$$Q(t,\tau) = Q(t)\delta(t-\tau)$$

❒ **Théorème 7** :

Le processus stochastique $x(t)$ *est un processus markovien*

➥ **Hypothèses 3** :

$w(t)$ *est un bruit blanc gaussien et* x_0 *est un V.A. gaussien*

❒ **Théorème 8** :

Le processus stochastique $x(t)$ *est un processus gaussien-markovien*

Pour une réalisation du bruit $w(t)$, la solution de l'équation d'état est :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)G(\tau)w(\tau)d\tau$$

où $\Phi(t, t_0)$ est la matrice de transition du système, solution de :

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = F(t)\Phi(t, t_0) \quad , \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{1}$$

♥ **Propriétés 12** :

- $\Phi(t_2,\ t_1)\Phi(t_1,\ t_0) = \Phi(t_2,\ t_0)$
- $\Phi(t,\ t_0)$ *est inversible* $\quad \forall\ t,\ t_0$
- $\Phi^{-1}(t,\ t_0) = \Phi(t_0,\ t) \quad \forall\ t,\ t_0$

Caractérisation du processus stochastique

- Moyenne $m(t) = E[x(t)]$: (hypothèse 1)

$$\dot{m}(t) = F(t)m(t) + G(t)\mu(t) \quad , \quad m_0$$

- Matrice de covariance $P(t,\tau) = E[(x(t) - m(t))(x(\tau) - m(\tau))']$: (hypothèses 1 et 2)

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F'(t) + G(t)Q(t)G'(t) \quad , \quad P(t_0) = P_0$$

Equation différentielle de Lyapunov continue.

$$P(t,\tau) = \begin{cases} \Phi(t,\tau)P(\tau) & t \geq \tau \\ P(t)\Phi'(t,\tau) & t \leq \tau \end{cases}$$

Modèle LTI :

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gw(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

➥ **Hypothèses 4** *:*

- *$w(t)$ est un bbg stationnaire $w(t) \sim \mathcal{N}(\mu, Q)$*
- *F est stable asymptotiquement*

❒ **Théorème 9** *:*

Le processus stochastique $x(t)$ tend vers un processus stationnaire de moyenne m et de matrice de covariance $P(t-\tau)$

$$\lim_{t \to \infty} m(t) = m = -F^{-1}G\mu \qquad \lim_{t \to \infty} P(t) = P$$

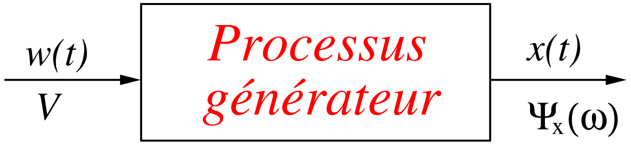
où P est la solution de l'équation algébrique matricielle de Lyapunov :

$$\boxed{FP + PF' + GQG' = 0}$$

Processus générateur - représentation de Markov

☛ **Problème 2** :

Etant donné un processus stochastique $x(t)$ de moyenne nulle et de densité spectrale donnée $\Psi_x(\omega)$, déterminer le modèle d'état LTI générant l'état $x(t)$ en réponse à un bruit blanc $w(t)$ d'intensité V



▼ **Définition 32** :

Le modèle d'état associé au processus $s(t)$ est appelé processus générateur du processus stochastique $x(t)$. Si un processus générateur existe pour $x(t)$ alors on dit que $x(t)$ est à représentation markovienne

Nota : relations entre processus générateur et filtre formeur

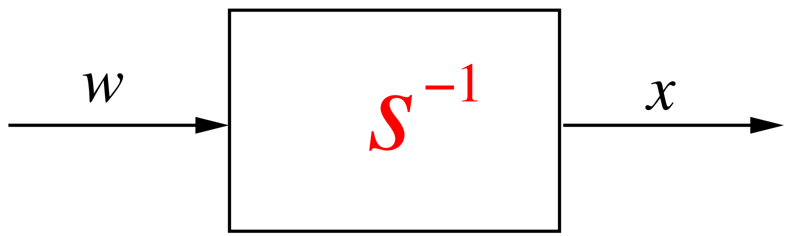
- Variable aléatoire : ($r_x = \sigma^2$)

$$\dot{x}(t) = 0 \quad x_0 \text{ v.a. } \sigma_x^2 = \sigma^2$$

$$\Psi_x(\omega) = 2\pi\sigma^2\delta(\omega)$$

- La marche aléatoire :

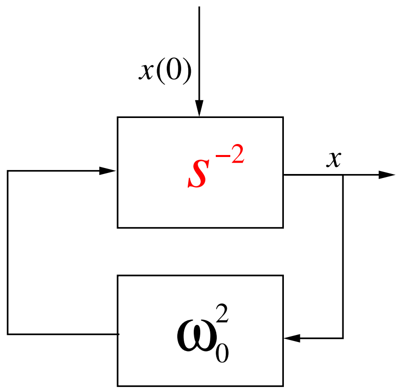
$$\dot{x}(t) = w(t) \quad \sigma_x^2(0) = 0$$



- Sinusoide : $(r_x(\tau) = \sigma^2 \cos \omega_0 \tau)$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad P_0 = \begin{bmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_x(\omega) = \pi\sigma^2\delta(\omega - \omega_0) + \pi\sigma^2\delta(\omega + \omega_0)$$



Processus générateur : exemples

- Processus exponentiellement corrélé : ($r_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$)

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \sigma\sqrt{2\alpha}w(t) \quad \sigma_x(0)^2 = \sigma^2$$

$$\Psi_x(\omega) = \frac{2\sigma^2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}$$