CNAM - B2

Systèmes et asservissements non linéaires

Notes de cours

Version 4

D. Arzelier - D. Peaucelle

Avertissement: Ce document est constitué de notes de cours et ne prétend donc ni à l'exhaustivité ni à l'originalité. Ces notes doivent en effet beaucoup aux emprunts faits aux ouvrages référencés en bibliographie.

Notations

- $\mathbb{R}$: corps des nombres réels.
- A': matrice transposée de la matrice A.
- $A > 0$: A matrice définie positive.
- $\| \bullet \|$: norme Euclidienne pour un vecteur et induite par la norme Euclidienne pour une matrice.
- $\mathcal{L}(\bullet)$ transformée de Laplace.
- $\frac{\partial X}{\partial v}$: dérivée partielle de la fonction X par rapport à la variable v.
- ln: logarithme népérien.
- I_n: matrice identité de dimension n.
- $\mathcal{N}(C)$: noyau de la matrice C.
- $\mathcal{R}(C)$: espace engendré par les colonnes de la matrice C.
- V: fonction de Lyapunov.
- $\exists$: il existe.
- $\forall$: pour tout.
- ∇V: vecteur gradient de la fonction V.

Table des Matières

Chapitre I

Introduction à l'étude des systèmes non linéaires

I.1 Introduction

La première étape lorsque l'on veut analyser puis commander un système, consiste à se donner un "bon" modèle mathématique de celui-ci. Cela signifie que l'on doit disposer d'un modèle mathématique réalisant un compromis entre sa fidélité de comportement qualitatif et quantitatif et sa simplicité de mise en oeuvre à des fins d'analyse et de synthèse. Le deuxième terme de ce compromis implique que l'étape de modélisation entraine obligatoirement des approximations et des simplifications afin de permettre une analyse des propriétés du modèle qui ne soit pas trop complexe et une procédure de synthèse de commande efficace.

Sous certaines hypothèses, (approximation des faibles déviations autour d'un "mouvement" nominal), certains systèmes peuvent être décrits par un modèle mathématique linéaire, par exemple, une équation différentielle à coefficients constants:

$$a_m y^{(m)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_n e^{(n)}(t) + \cdots + b_1 \dot{e}(t) + b_0 e(t) \tag{1.1}$$

dont on peut calculer une solution analytique explicite par utilisation du **principe de superposition**. Dans ce cadre d'hypothèses, les méthodes classiques ainsi que de puissants outils d'analyse et de synthèse des asservissements linéaires peuvent être appliquées et développés.

Méthodes fréquentielles:
(Utilisation de la transformée de Laplace, notée $\mathcal{L}(\bullet)$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(1.1) \\ Y(p) = \mathcal{L}(y(t)) \\ E(p) = \mathcal{L}(e(t)) \end{array} \right. \qquad \longrightarrow \qquad \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{b_n p^n + \cdots + b_0}{a_m p^m + \cdots + a_0}$$

Fonction de transfert $\equiv$ Modèle entrée - sortie

Outils d'analyse	**Outils de synthèse**
Lieu de Nyquist	Correcteur à avance de phase
Lieu de Black-Nichols	Correcteur à retard de phase
Diagramme de Bode	Commande PID ...
Lieu des racines	

Méthodes temporelles:
Modèle interne - vecteur des variables d'état $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \textit{éq. dynamique} \\ y(t) = Cx(t) & \textit{éq. de sortie} \end{cases}$$

Outils d'analyse	**Outils de synthèse**
Critères de Kalman	Retour d'état
Théorème de Lyapunov (stabilité)	Placement de pôles
Algèbre linéaire	Commande L.Q. ...

Toutefois, afin de prendre en compte une réalité plus complexe, aussi bien du point de vue qualitatif que quantitatif, il est nécessaire de retenir dans la modélisation du système physique des éléments non linéaires difficilement modélisables par ailleurs et que l'on ne peut approximer. Différents cas génériques se présentent pour lesquels les modélisations linéaires ne peuvent suffire.

- Dans le positionnement d'un bras de robot, la géométrie liée aux transformations de coordonnées fait intervenir des fonctions non linéaires de leur argument telles que sinus et cosinus.

- Un moteur a des limitations intrinsèques en courant et donc en couple. Les saturations sur les signaux de commande sont des non linéarités courantes. De manière plus générale, les phénomènes tels que saturation, zone morte, seuils dus à des frottements, hystérésis sont des non linéarités fréquemment rencontrées dans ce type d'applications.

- Les asservissements faisant intervenir dans le bloc de commande des éléments non linéaires tels que relais, systèmes à commutations, hystérésis, ... Ce sont des éléments qui ne sont pas linéarisables par l'approximation des signaux de faible amplitude.

- D'importants processus physiques sont décrits par des modèles non linéaires. Les caractéristiques courant-tension de nombreux systèmes électroniques sont non linéaires. Les attractions gravitationnelles et électrostatiques sont inversement proportionnelles au carré de la distance.

- A ces non linéarités, plus ou moins classiques, s'ajoutent d'autres types de non linéarités qui sont a prendre en compte dans les nouveaux champs d'application de l'automatique. Par exemple, en mécanique, la déformation des matériaux fait apparaître des dérivées non entières dans les modèles. En biologie et en chimie interviennent des équations polynomiales à plusieurs variables et aux dérivées partielles. Dans la finance - domaine éloigné de l'automatique où les mêmes méthodes pourraient s'avérer utiles - les fonctions décrivant les évolutions des paramètres sont discontinues en tout point.

Pour de tels modèles, le principe de superposition ne peut plus être appliqué et les outils nécessitent le développement de mathématiques plus élaborées.

Du fait de la diversité et de la puissance des outils développés dans le domaine linéaire, il est usuel dans un premier temps de linéariser le modèle non linéaire autour d'un point de fonctionnement et d'utiliser le modèle linéaire ainsi obtenu afin d'en extraire le maximum de renseignements. Toutefois, la méthode de linéarisation n'est pas suffisante et il est donc nécessaire de forger des outils propres à l'étude des modèles non linéaires. Principalement, deux faits limitent la portée des résultats obtenus par la méthode de linéarisation. Tout d'abord, du fait que la méthode de linéarisation est une méthode par approximation, elle n'est donc valide que *localement* autour du point de fonctionnement concerné et ne peut certainement pas être utilisée pour en déduire un comportement *global*. Le deuxième point est que les dynamiques d'un système non linéaire sont beaucoup plus riches que celles d'un système linéaire dans le sens qu'elles reflètent des comportements et des phénomènes purement non linéaires. Ce cours constitue donc une introduction succinte à l'analyse des systèmes non linéaires ainsi qu'à l'utilisation de certains outils spécifiquement développés dans ce cadre.

I.2 Quelques comportements non linéaires

I.2.1 Points d'équilibre multiples

A la différence des sytèmes linéaires qui possèdent un point d'équilibre unique, les systèmes non linéaires peuvent posséder plusieurs points d'équilibre.

<u>Exemple:</u>
Soit le système physique régi par l'équation différentielle suivante:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t) \quad , \quad x_0 = x(0)$$

Le système linéarisé autour du point $x = 0$ est donné par:

$$\dot{x}(t) = -x(t) \quad \rightarrow \begin{cases} point\ d'équilibre\ x = 0 \\ \\ solution\ x = x_0 e^{-t} \end{cases}$$

Le système non linéaire, quant à lui a les caractéristiques suivantes:

$$\begin{cases} 2\ points\ d'équilibre\ (0,1) \\ \\ solution\ x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}} \end{cases}$$

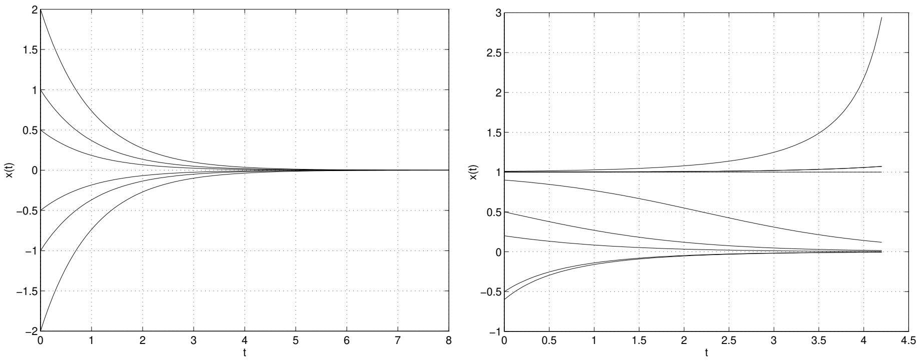


Figure 1.1 : Système linéarisé et Système non linéaire

Les simulations, figure 1.1, montrent clairement les différences de comportement entre le modèle linéaire et non linéaire. Dans le cas linéaire, le point d'équilibre est stable et les trajectoires d'état pour différentes conditions initiales, décroissent vers l'état d'équilibre. Dans le cas non linéaire, les deux points d'équilibre sont de nature différente. Le point d'équilibre 0 est *stable localement* puisque toute trajectoire issue d'une condition initiale suffisamment proche converge vers cet état d'équilibre. Le point 1 quant à lui, est instable constitue en quelque sorte une frontière de stabilité. L'axe est en effet divisé en deux régions de conditions initiales pour lesquelles les trajectoires sont convergentes vers l'état d'équilibre 0 ou sont divergentes.

I.2.2 Cycles limites

Un système linéaire invariant dans le temps, pour osciller, doit avoir une paire de pôles sur l'axe imaginaire. Cette condition est évidemment très fragile vis à vis de perturbations et/ou erreurs de modélisation pouvant affecter la valeur de ces pôles. De plus, l'amplitude de l'oscillation obtenue en théorie dépend uniquement de la condition initiale. Au contraire, les systèmes non linéaires peuvent être le siège d'oscillations, (**cycles limites**), caractérisées par leur amplitude et leur fréquence, indépendantes de la condition initiale, x_0, et sans excitation extérieure. Il est donc indispensable d'utiliser un système non linéaire si l'on souhaite réaliser en pratique une oscillation stable.

Exemple: équation de Van der Pol
L'équation de Van der Pol est une équation d'ordre 2 non linéaire donnée par:

$$m\ddot{x}(t) + 2c(x^2 - 1)\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad c > 0$$

est simulée pour différentes conditions initiales $x(0)$.

La figure 1.2 fait clairement apparaitre une courbe fermée vers laquelle convergent toutes les trajectoires quelque soit le point initial choisi. Cela traduit la nature oscillatoire et approximativement sinusoidale du comportement du système. Cette courbe fermée est un cycle limite. Ces cycles limites peuvent être souhaités, (oscillateurs électriques) ou non désirés dans le cas de certains systèmes mécaniques.

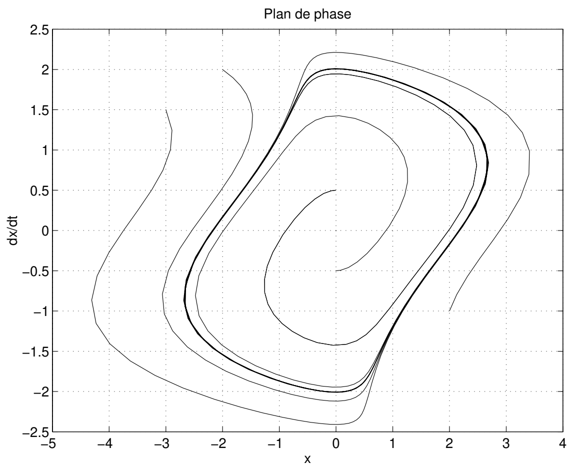


Figure 1.2 : Equation de Van der Pol

I.2.3 Oscillations presque périodiques - sous-harmoniques

Il est bien connu qu'un système linéaire, en réponse à une entrée périodique, produit une sortie périodique de même période que l'entrée appliquée. Un système non linéaire soumis à une entrée périodique du type

$$e(t) = Esin(\omega t)$$

produit une sortie périodique composée d'un signal périodique appelé *fondamental* de fréquence $\omega/2\pi$ et de signaux additionnels de fréquences multiples $n\omega/2\pi$ qui sont appelés les harmoniques. Dans certains cas, la sortie peut également comprendre des signaux dont la fréquence est sous-multiple de la fréquence d'entrée. Il peut même, dans certains cas, produire une oscillation *"presque"* périodique. C'est le cas quand la sortie est la somme d'oscillations périodiques de fréquence differentes et non multiples les unes des autres.

I.2.4 Bifurcations

Des changements quantitatifs des paramètres peuvent entrainer des changements qualitatifs des propriétés du système, (nombre de points d'équilibre, stabilité des points d'équilibre).

Exemple: équation non amortie de Duffing

$$\ddot{x}(t) + \alpha x(t) + x^3(t) = 0 \qquad \alpha \geq 0$$

L'équation donnant le point d'équilibre est:

$$x_e(x_e^2 + \alpha) = 0$$

Suivant que α sera négatif ou positif, le nombre de points d'équilibre sera différent. Quand α varie, le nombre de points d'équilibre varie de 1 à 3,

$$(x_e, \dot{x}_e) = (0,0),\ (\sqrt{\alpha}, 0)\ (-\sqrt{\alpha}, 0)$$

Ainsi $\alpha = 0$ est une valeur de bifurcation critique.

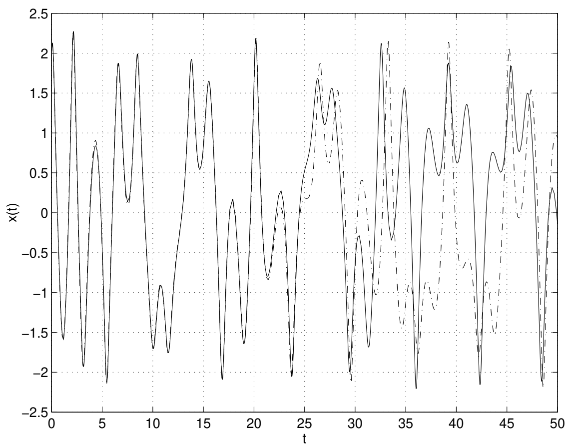
I.2.5 Chaos

Un système non linéaire peut avoir un comportement en régime permanent plus complexe que ceux habituellement répertoriés tels que l'équilibre, les oscillations périodiques... . Dans ce cas, la sortie du système est extrèmement sensible aux conditions initiales, d'où la non prévisibilité de la sortie. Certains comportements chaotiques font ainsi apparaitre un aspect aléatoire malgré leur nature déterministe intrinsèque.

Exemple:

$$\ddot{x}(t) + 0.1\dot{x}(t) + x^5(t) = 6sin(t)$$

Pour les deux conditions initiales différentes suivantes, nous obtenons les deux courbes présentées sur la figure 1.3.



Trait - : ($x(0) = 2$; $\dot{x}(0) = 3$) et Trait -.- : ($x(0) = 2.01$; $\dot{x}(0) = 3.01$)

Figure 1.3 : Comportement chaotique

Certains de ces phénomènes manifestent des comportements de type aléatoire en dépit de la nature déterministe du système. Ce comportement est présent dans les phénomènes de turbulences en mécanique des fluides ou dans les phénomènes issus des dynamiques atmosphériques.

I.3 Deux exemples de modèlisations non linéaires

I.3.1 Equation du pendule simple

Soit le pendule simple représenté en figure 1.4, où l est la longueur de la corde considérée comme rigide et sans masse et m la masse en mouvement. On note θ l'angle que la corde fait avec la verticale. Afin d'ecrire les équations du mouvement, il est nécessaire d'identifier les forces agissant sur la masse. Tout d'abord, il y a la force gravitationnelle donnée par $F_g = mg$ où g est l'accélération de la gravité. On suppose de plus que la masse est soumise à une force de résistance de friction proportionnelle à la vitesse de la masse et de coefficient de friction k. En appliquant

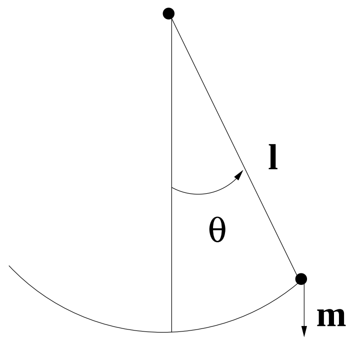


Figure 1.4 : Pendule simple

le premier principe de la dynamique par projection sur l'axe tangentiel, on obtient l'équation différentielle du mouvement.

$$ml\ddot{\theta} = -mgsin(\theta) - kl\dot{\theta}$$

A partir de ce modèle mathématique, il est possible de dériver un modèle dans l'espace d'état non linéaire en choisissant les variables d'état $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 \end{array} \right.$$

Si l'on souhaite connaitre les points d'équilibre de ce système, il suffit de résoudre le système algébrique suivant.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = x_2 \\ 0 = -\frac{g}{l}sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 \end{array} \right.$$

Les points d'équilibre sont donc donnés par $(n\pi,\ 0)$ pour $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$. Physiquement, cela correspond à l'existence de deux points d'équilibre $(0,0)$ et $(\pi, 0)$, les autres n'étant qu'une duplication mathématique de ces deux points due à la possibilité, pour le pendule, de faire une certain nombre de tours autour de son point de rotation. Il est clair que du point de vue physique, ces deux points d'équilibre sont distincts. En effet, alors que le pendule peut rester en équilibre en $(0,0)$, il ne peut maintenir sa position d'équilibre en $(\pi, 0)$ puisque une perturbation infinitésimale produit un déséquilibre du pendule. On parlera, comme il sera vu par la suite, d'équilibre *stable* et *instable*.

L'équation du pendule est intéressante du fait que de nombreux systèmes physiques peuvent être modélisés par des équations semblables à celle du pendule. C'est le cas par exemple de circuits électriques comportant une induction non linéaire de type jonction de Josephson ou encore de générateur synchrone connecté à un bus infini, [4].

Un autre exemple construit sur l'exemple du pendule simple, montre que les non linéarités conduisent rapidement à des systèmes très complexes voire chaotiques. Soit le système conçu à partir de trois pendules simples mis bout à bout, représenté dans l'espace sur la figure 1.5.

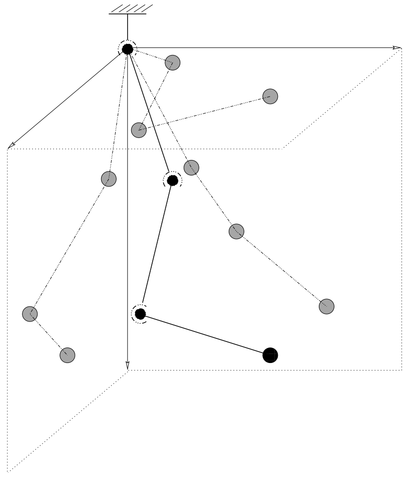


Figure 1.5 : Système à trois pendules (projections suivant les trois axes du plan)

On néglige les frottements. Les équations décrivant le comportement dynamique du système sont fastidieuses à établir mais le modèle est parfaitement déterministe. Ceci est un exemple de modèle chaotique. Pour une position initiale des trois poids, le comportement ne sera ni convergeant (frottements considérés nuls) ni oscillatoire. De plus, pour deux positions initiales infiniment proches, le comportement du système diffère fortement.

I.3.2 Oscillateur à résistance négative

La figure 1.6(a) décrit la structure fondamentale d'un type d'oscillateur électronique très répendu. L'inductance et la capacité sont supposées linéaires, invariante dans le temps et passive, $L > 0,\ C > 0$. L'élément résistif est un circuit actif dont la caractéristique tension-courant est non linéaire, $i = h(v)$ et est présentée en figure 1.6(b). On suppose de plus que la fonction h satisfait les conditions:

$$h(0) = 0 \qquad\qquad h'(0) < 0$$

$$\lim_{v \to \infty} h(v) \to \infty \quad \lim_{v \to -\infty} h(v) \to -\infty$$

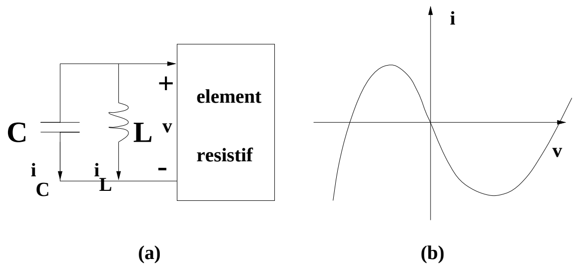


Figure 1.6 : Oscilateur à résistance négative

En écrivant la loi des noeuds, on a:

$$i_C + i_L + i = 0$$

ce qui se réécrit:

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(s)ds + h(v) = 0$$

ou encore, après différentiation,

$$CL\frac{d^2v}{dt^2} + v + Lh'(v)\frac{dv}{dt} = 0$$

Par un changement d'echelle de temps, cette équation peut être réduite à une équation bien connue en théorie des systèmes non linéaires. On pose ainsi $\tau = t/\sqrt{LC}$, ce qui permet d'ecrire:

$$\frac{dv}{d\tau} = \sqrt{LC}\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} = LC\frac{d^2v}{dt^2}$$

L'équation differentielle du circuit est alors donnée par:

$$\ddot{v} + \epsilon h'(v)\dot{v} + v = 0$$

où $\epsilon = \sqrt{L/C}$. C'est un cas particulier de l'équation de Liénard qui a la forme générale:

$$\ddot{v} + \epsilon f(v)\dot{v} + g(v) = 0$$

Dans le cas où $h(v) = -v + \frac{1}{3}v^3$, on retrouve l'équation de Van der Pol, qui a été utilisée afin d'étudier les oscillations dans les circuits à base de tubes à vide. En posant $x_1 = v$, $x_2 = \dot{v}$, les équations d'état associées à l'équation de Van der Pol sont alors:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \epsilon h'(x_1)x_2 \end{cases}$$

I.4 Conclusions

Il est bien évident que la liste précédente n'épuise pas l'ensemble des phénomènes qui peuvent se rencontrer dans l'étude des systèmes non linéaires et des modèles que l'on peut déduire.
Les systèmes non linéaires étudiés dans ce cours seront décrits par des équations différentielles ordinaires non linéaires du type suivant:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \cdots, x_m(t), t) \quad {\scriptstyle i=1,\cdots,m}$$

ou encore:

$$x^{(m)}(t) + g(x^{(m-1)}(t), \cdots, \dot{x}(t), t) = 0$$

Les solutions analytiques de ces équations ne sont en général pas accessibles directement. Elles s'expriment en général à partir de fonctions transcendantes obtenues sous forme de développement en séries, ou par des méthodes numériques et itératives. Ce cours exposera un certain nombre de techniques permettant de contourner cette difficulté.

Dans la majorité des techniques, les non linéarités sont analysées en référence aux comportement des systèmes linéaires. En particulier, il est courant de modéliser un système non linéaire comme formé d'une partie linéaire et d'une partie non linéaire. L'étude peut alors être une évaluation de l'influence de la partie non linéaire sur le comportement linéarisé du système. Dans cette optique les systèmes sont représentés comme formés de deux systèmes interconnecté (figure 1.7). e et f sont les entrées possibles du système et s et t sont les sorties possibles.

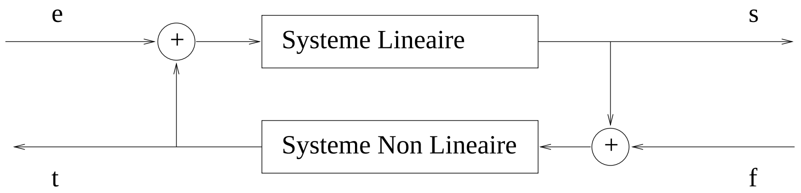


Figure 1.7 : Systèmes interconnectés

Deux exemples courants de systèmes modélisables de la sorte sont les systèmes commandés par une rétroaction non linéaire ($f = 0$) et les systèmes dont l'entrée f subit une transformation non linéaire ($e = 0$). Les systèmes non linéaires en question peuvent alors être respectivement, une porte tout ou rien et une saturation. Les méthodes présentées dans ce cours abordent de manière différentes certains cas de systèmes mis sous cette forme.

Chapitre II

La notion de stabilité

II.1 Introduction et définitions fondamentales

La théorie de la stabilité joue un rôle central en théorie des systèmes. Différents types de problèmes de stabilité peuvent être rencontrés dans l'étude des systèmes dynamiques. Dans ce cours, nous entendons par stabilité, stabilité des points d'équilibre. Nous évoquerons sans les étudier la stabilité des cycles limite et la stabilité entrée/sortie. La stabilité d'un point d'équilibre est généralement étudiée à l'aide du concept de stabilité au sens de Lyapunov.

Par définition, si un système est dans un état d'équilibre, il restera dans cet état pour t variant dans le temps. L'étude de la stabilité au sens de Lyapunov consiste en l'étude des trajectoires du système quand l'état initial est "près" d'un état d'équilibre. Cela reflète la possibilité de perturbations affectant le système, sous forme de conditions initiales non nulles.

L'objet de la théorie de la stabilité est de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires. La contribution majeure fut apportée par A.M. Lyapunov, en 1892, dont les travaux n'ont été connus qu'à partir des années 60. Il a introduit la majorité des concepts et définitions de base concernant la stabilité des systèmes représentés par des systèmes différentiels arbitraires mais a aussi fourni les principaux résultats théoriques. Nous ne présentons dans cette partie qu'une version simplifiée et abrégée de ses travaux.

II.1.1 Quelques rappels sur les modèles d'état

L'évolution d'un système peut-être définie par une équation différentielle qui lie la dérivée du vecteur d'état à l'ensemble des valeurs précédentes de l'état, à l'ensemble des valeurs précédentes de l'entrée et au temps:

$$\dot{x}(t) = f(x^{-}, u^{-}, t)$$

où x^{-} et u^{-} sont les fonctionnelles représentant l'évolution de l'état de de l'entrée du système pour les instants précédents ($t^{-} < t$).

La théorie de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité des systèmes s'inscrit dans ce cadre très général. Dans ce cours nous nous limiterons à considérer des systèmes non commandés (entrée nulle) et non causaux (l'évolution du système ne dépend que de la valeur de l'état à l'instant t):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

Définition 1 *Système Autonome*
Un système est dit **autonome** *si f ne dépend pas du temps:*

$$\dot{x} = f(x)$$

sinon le système est dit non autonome.

Remarques:

1- Les modèles ainsi définis généralisent la notion de systèmes invariants et variants dans le temps pour les systèmes linéaires.

2- Un système autonome est indépendant du temps initial alors qu'un système non autonome ne l'est pas. Tout instant peut être considéré comme instant initial. Tout état $x(t)$ du système peut être considéré comme un état initial.

Dans la suite nous ne considérerons que des systèmes autonomes. De plus nous considérerons uniquement des systèmes dont le vecteur d'état est réel de dimension finie: $x \in \mathbb{R}^n$.

Hypothèse classique:
La solution de l'équation $\dot{x} = f(x)$ est unique à la donnée d'une condition initiale $x_o = x(0)$. (Solution unique au problème de Cauchy).

La solution x_{x_o} de l'équation différentielle pour une condition initiale x_o donnée est une trajectoire à valeurs dans **l'espace d'état** (espace vectoriel $\mathbb{R}^n$):

$$x_{x_o} \ : \ \begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto x_{x_o}(t) \end{cases}$$

Cette fonction est appelée **trajectoire d'état** du système dans l'espace d'état pour une condition initiale donnée. Quand cela est possible (état de dimension deux, voire trois) nous tracerons la trajectoire du système pour représenter son évolution dynamique à partir d'une condition initiale donnée.

Exemple: Soit le système à deux état suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \sin(2x_1) \\ \dot{x}_2 &= -sat_{(-0.5,0.5)}(2x_1 + x_2) \end{cases}$$

où la fonction désignée par $sat_{(-0.5,0.5)}(x)$ est une saturation qui renvoie x si $x \in [-0.5, 0.5]$, 0.5 si $x \geq 0.5$ et -0.5 si $x \leq -0.5$. Pour quelques conditions initiales choisies aléatoirement on peut simuler le système et tracer les trajectoires d'état du système (figure 2.1). Les trajectoires représentées évoluent toutes vers des points particuliers $(*)$. On dira qu'elles convergent vers des points d'équilibre. Pour deux état initiaux très proches on voit que le comportement du système peut être très différent.

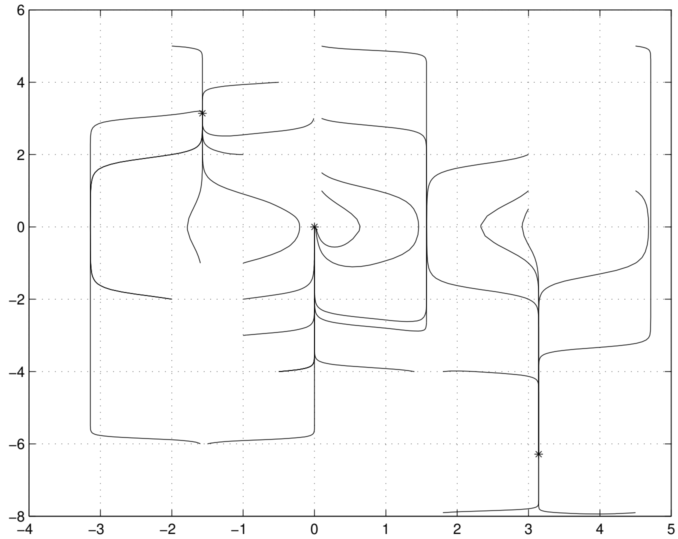


Figure 2.1 : trajectoires d'état

Définition 2 *: points d'équilibre*
x^* est un **état d'équilibre** *pour le système autonome si*

$$x(t_1) = x^* \Rightarrow x(t \geq t_1) = x^*$$

ou de façon équivalente si:

$$f(x^*) = 0$$

II.1.2 Quelques notions mathématiques

Nous introduisons ou rappelons quelques définitions et notions mathématiques qui nous seront nécessaires par la suite.

Définition 3 *: Voisinage de l'origine*
Un voisinage de l'origine, $\mathbf{\Omega}$ est tout domaine fermé borme incluant l'origine.

Un exemple de voisinage est la boule:

Définition 4 *: Boule dans $\mathbb{R}^n$*
On définit une boule fermée dans $\mathbb{R}^n$ comme l'ensemble:

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ ||x|| \leq r\}$$

où la norme $|| \bullet ||$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Un exemple de norme est la norme euclidienne habituelle:

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2} \quad pour \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Comme toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, le choix de la norme n'est pas déterminant pour les résultats qui suivent. La forme des boules, par contre, sera modifié quand on change de norme.

Définition 5 *: fonctions définies positives*

1- *Une fonction scalaire* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* **localement définie positive** *dans* $\mathbf{\Omega}$*, où* $\mathbf{\Omega}$ *est un voisinage de l'origine, si:*

$$1- \quad V(0) = 0$$

$$2- \quad \forall\ x \neq 0 \in \mathbf{\Omega} \quad V(x) > 0$$

2- *Une fonction scalaire* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* **définie positive** *si elle vérifie:*

$$1- \quad V(0) = 0$$

$$2- \quad \forall\ x \neq 0 \in \mathbb{R}^n \quad V(x) > 0$$

Exemples:
Soit $x = [x_1, x_2]' \in \mathbb{R}^2$

- $V(x) = x_1^2 + sin^2(x_2)$ est définie positive localement.
- $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ est une fonction définie positive.

Définition 6 *: fonctions semi-définies positives*

1- *Une fonction scalaire* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* **localement semi-définie positive** *dans* $\mathbf{\Omega}$*, où* $\mathbf{\Omega}$ *est un voisinage de l'origine, si:*

$$1- \quad V(0) = 0$$

$$2- \quad \forall\ x \neq 0 \in \mathbf{\Omega} \quad V(x) \geq 0$$

2- *Une fonction scalaire* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* **semi-définie positive** *si elle vérifie:*

$$1- \quad V(0) = 0$$

$$2- \quad \forall\ x \neq 0 \in \mathbb{R}^n \quad V(x) \geq 0$$

Exemples:
Soit $x = [x_1, x_2]' \in \mathbb{R}^2$

- $V(x) = x_1 \sin(x_1)$ est une fonction localement semi-définie positive.
- $V(x) = x_1^2$ est une fonction semi-définie positive.

Remarques:

1- Si une fonction V est (localement), (semi-)définie négative alors $-V$ est (localement), (semi-)définie positive.

2- **Cas particulier important:** la forme quadratique $V(x) = x'Px,\ x \in \mathbb{R}^n$ avec $P = P'$. V est (semi-)définie positive,(négative), si P est une matrice (semi-)définie positive, (négative).

3- Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice symétrique P soit définie positive est que ses valeurs propres soient toutes positives.

Définition 7 *Fonction candidate de Lyapunov*
Soit $V\ :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction telle que:*

i) *V est continûment différentiable en tous ces arguments.*

ii) *V est définie positive.*

iii) *Il existe a et b deux fonctions scalaires de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, continues, monotones, non décroissantes, telles que*

$$\begin{array}{l} a(0) = b(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad a(\|x\|) \leq V(x) \leq b(\|x\|) \end{array}$$

alors V est une fonction candidate de Lyapunov.

Remarque
La définition implique que la fonction V définit des équipotentielles imbriquées. C'est à dire que les courbes $V(x) = Cste$, appelées **équipotentielles de Lyapunov**, définissent des domaines connexes autour de l'origine. De plus en définissant les domaines:

$$\mathcal{D}_1 = \{x|V(x) \leq c_1\} \quad ; \quad \mathcal{D}_2 = \{x|V(x) \leq c_2\}$$

alors

$$c_1 < c_2 \Longrightarrow \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$$

exemple
Soit $x = [x_1, x_2]' \in \mathbb{R}^2$, et $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ alors les équipotentielles sont des cercles de rayon le carré de la norme euclidienne du vecteur x. Ce sont aussi les boules de $\mathbb{R}^2$ définies pour la norme euclidienne.

Définition 8 *: dérivée de Lyapunov*
Soit $V\ :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable en tous ses arguments et soit l'équation non linéaire différentielle $\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$. On définit alors $\dot{V}\ :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ par:

$$\dot{V}(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x}(x)\right]' \cdot f(x)$$

où:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}(x)\right] \ \textit{gradient de } V(x) \ \sim \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$\dot{V}(x)$ est appelée la dérivée de $V(x)$ le long des trajectoires de $\dot{x} = f(x)$.

Remarque:
La dérivée correspond à une dérivée temporelle de la fonction $t \longmapsto V(x(t))$ en considérant que x est une trajectoire d'état, c'est à dire qu'elle satisfait l'équation différentielle:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}x(t) = \left[\frac{\partial V}{\partial x}(x)\right]' \cdot \dot{x}(t) = \left[\frac{\partial V}{\partial x}(x)\right]' \cdot f(x(t))$$

Exemple:
Soit $V(x) = x_1^2 + x_2^2$. Alors la dérivée le long des trajectoires de $\dot{x} = f(x)$, où $f(x) = [f_1(x), f_2(x)]'$, s'écrit:

$$\dot{V}(x) = [2x_1 \ , \ 2x_2] \cdot \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

II.2 Notions de stabilité

II.2.1 Stabilité du point d'équilibre

Définition 9 *: stabilité-instabilité au sens de Lyapunov*
L'état d'équilibre x_e est dit **stable** *si $\forall \epsilon > 0$, $\exists\ \alpha > 0$ tel que si $||x(0) - x_e|| < \alpha$ alors $||x(t) - x_e|| < \epsilon \ \ \forall\ t \geq 0$. Dans le cas contraire, x_e est dit* **instable**.

Nota:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(||x(0) - x_e|| < \alpha \Rightarrow ||x(t) - x_e|| < \epsilon \ , \quad \forall t \geq 0)$$

Interprétation:
La stabilité au sens de Lyapunov signifie que la trajectoire d'état peut être gardée arbitrairement près de x_e, si l'on prend une condition initiale suffisamment proche de x_e, (voir figure 5.1).

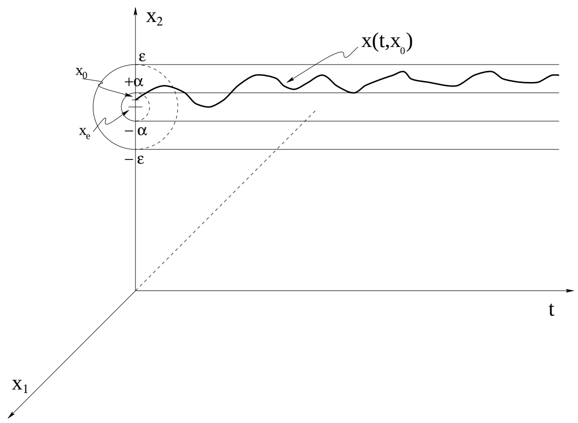


Figure 2.2 : stabilité de Lyapunov

Définition 10 *Attractivité*
L'état d'équilibre x_e est **attractif** *si il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x(0) - x_e\| < \delta$ alors pour tout $\nu > 0$ il existe $T > 0$ qui satisfait $\|x(t) - x_e\| < \nu$, pour tout $t \geq T$.*

Remarque:
L'attractivité n'implique pas la stabilité ni l'inverse. La condition d'attractivité exprime que si l'état initial est dans un certain voisinage de l'état d'équilibre, alors l'état du système reviendra nécessairement à l'origine au bout d'un temps suffisant. Sur la figure 2.3 le système décrit des ellipses dans l'espace d'état. Toutes les trajectoires convergent vers l'origine. 0 est attractif sans être stable car toutes les trajectoires du demi-plan gauche contournent le points $(0,1)$ ou $(0,-1)$ avant de converger.

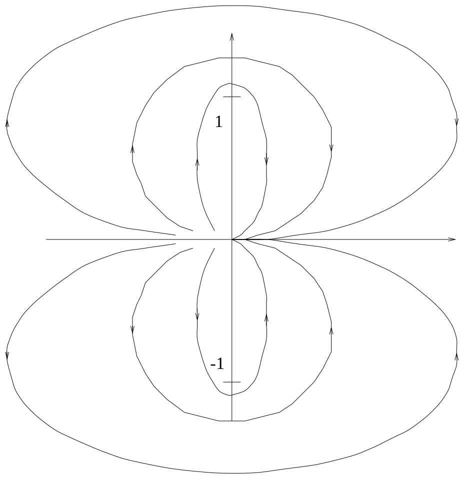


Figure 2.3 : Système attractif mais instable

Par contre le système $\dot{x} = 0$ est stable (tout point au voisinage de 0 reste dans le voisinage de 0) mais 0 n'est pas attractif (l'état ne converge pas vers 0, il reste immobile).

Définition 11 *: stabilité asymptotique*
Un point d'équilibre x_e est **asymptotiquement stable** *s'il est stable et s'il existe $\alpha > 0$ tel que $||x(0) - x_e|| < \alpha \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x(t) = x_e$.*

Interprétation:
Un point d'équilibre est stable asymptotiquement s'il est stable et attractif. La stabilité asymptotique signifie que non seulement l'équilibre est stable mais que de plus on est capable de déterminer un voisinage du point d'équilibre tel que n'importe quelle trajectoire, issue d'un x_0 appartenant à un voisinage de x_e, tend vers x_e quand $t \to +\infty$.

Définition 12 *: stabilité exponentielle*
Un point d'équilibre x_e est exponentiellement stable s'il existe $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ tels que:

$$\forall t \ > 0 \ , \ \exists \ B_r(x_e, r) \ , \ \forall \ x_0 \in \ B_r \ , \ ||x(t) - x_e|| \leq \alpha ||x(0) - x_e|| e^{-\lambda t}$$

Interprétation:
Cela signifie que le vecteur d'état, pour une condition initiale $x_0 \in B_r$ converge vers x_e plus rapidement qu'une fonction exponentielle. λ est appelé le taux de convergence. D'autre part, la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique qui implique la stabilité.

Définition 13 *: stabilité globale*
Si la propriété de stabilité asymptotique, (exponentielle) est vérifiée quelque soit $x(0)$, le point d'équilibre est **globalement asymptotiquement, (exponentiellement) stable***.*

A défaut de pouvoir déterminer la stabilité asymptotique voire exponentielle globale on se contentera de déterminer des voisinages du point d'équilibre, les plus "grands" possibles, où ces propriétés sont garanties.

II.3 Stabilité d'une trajectoire ...

Dans certains cas les systèmes n'admettent pas de points d'équilibre, ou alors le point d'équilibre n'est pas stable. Pour autant les trajectoires ne divergent pas forcément. Divers cas peuvent alors ce produire:

- Le système admet un domaine stable: *Il existe un domaine de conditions initiales tel que toutes les trajectoires restent comprises à l'intérieur du domaine stable.*

- Le système admet un domaine attractif: *Il existe un domaine de conditions initiales tel que toutes les trajectoires sont comprises dans le domaine attractif au bout d'un certain temps.*

- Le système admet une trajectoire stable f_e: *Quelque soit $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tels que si $\|f(0) - f_e(0)\| < \alpha$ alors pour tout $t > 0$, $\|f(t) - f_e(t)\| < \epsilon$.*

- De la même manière on peut définir une trajectoire attractive.

- La stabilité asymptotique et exponentielle (globale ou non) peuvent être définies également pour les domaines et les trajectoires.

Jusqu'à présent on a définit la stabilité des systèmes à partir de la stabilité de l'état d'équilibre autour d'un point, dans un domaine, autour d'une trajectoire. Il est également possible de considérer la stabilité entrée/sortie.
Soit le système:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

où u est l'entrée du système et y la sortie. La stabilité entrée/sortie d'un point d'équilibre (u_e, y_e) se définit par:
Quelque soit $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ et il existe un domaine de conditions initiales de

l'état du système tels que si $\|u(t) - u_e\| < \alpha$ pour tout t et que $x(0)$ appartient au domaine de conditions initiales alors $\|y(t) - y_e\| < \epsilon$ pour tout t.

Il est a noter que la stabilité entrée/sortie est très rarement utilisée. Il est en effet primordial de connaître l'évolution de tout l'état du système. Il n'est pas rare en effet, pour des systèmes non observable, que la sortie ait un comportement stable et que pour autant l'état du système diverge.

Exemple:
Soit le système:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1\\ \dot{x}_2 &= x_2\\ y &= x_1\end{aligned}$$

Ce système à une sortie qui converge vers 0 exponentiellement et l'état x_2 qui diverge exponentiellement.

II.4 Méthode directe de Lyapunov ou seconde méthode

II.4.1 Introduction par l'aspect énergétique

La philosophie de la méthode réside dans l'extension mathématique d'une observation fondamentale de la physique:
"Si l'énergie totale d'un système est dissipée de manière continue alors le système, (qu'il soit linéaire ou non linéaire), devra rejoindre finalement un point d'équilibre".
On pourra donc conclure à la stabilité d'un système par l'examen **d'une seule fonction scalaire**, ici l'énergie totale.

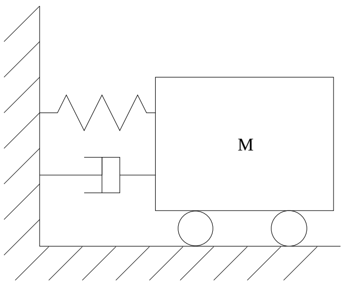


Figure 2.4 : Système masse-ressort

Exemple: le système masse-ressort-amortisseur
En appliquant le principe fondamental de la dynamique au centre de gravité de la masse, on obtient:

1- Equation du mouvement:

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0 x + k_1 x^3 = 0$$

2- Représentation d'état:

$$Posant \quad \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \qquad on\ obtient \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2|x_2| - \frac{k_0}{m}x_1 - \frac{k_1}{m}x_1^3 \end{cases}$$

3- Point d'équilibre: $(0, 0)$.

La question est de savoir si ce point d'équilibre est stable. La masse est tirée loin de sa position d'équilibre, (longueur naturelle du ressort), puis lâchée. Reprendra -t-elle sa position d'équilibre ?

Etude de l'énergie mécanique totale:

- Energie cinétique:

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

- Energie potentielle:

$$E_{pot.} = \int_0^x (k_0\beta + k_1\beta^3)d\beta = \frac{1}{2}k_0x_1^2 + \frac{1}{4}k_1x_1^4$$

- Energie totale:

$$E_m = V(x) = \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Remarques:

- Le point d'énergie mécanique nulle est le point d'équilibre.
- La stabilité asymptotique implique la convergence de l'énergie vers 0.
- L'instabilité est liée à la croissance de l'énergie mécanique.

On peut donc supposer que:

- L'énergie mécanique reflète indirectement l'amplitude du vecteur d'état.
- Les propriétés de stabilité peuvent être caractérisées par la variation de l'énergie mécanique au cours du temps.

Etude de la variation:

$$\frac{d}{dt}[V(x(t))] = (m\ddot{x}(t) + k_0x(t) + k_1x^3(t))\dot{x}(t) = -b|\dot{x}(t)|^3 < 0$$

L'énergie du système, à partir d'une valeur initiale, est continûment dissipée par l'amortisseur jusqu'au point d'équilibre.

La méthode directe de Lyapunov est fondée sur l'extension de ces concepts. La procédure de base est de générer une fonction scalaire "de type énergie" pour le système dynamique et d'en examiner la dérivée temporelle. On peut ainsi conclure quant à la stabilité sans avoir recours à la solution explicite des équations différentielles non linéaires.

II.4.2 Théorèmes sur la stabilité et la stabilité asymptotique

On considère la stabilité du point d'équilibre 0 pour les systèmes étudiés. Pour tout point d'équilibre $x_e \neq 0$, on pose le changement de variable $\hat{x} = x - x_e$ et l'étude de la stabilité est identique à celle pour $x_e = 0$.

Théorème 1 *: stabilité (asymptotique) locale*
Si il existe une fonction scalaire de l'état $V(x)$ dont les dérivées partielles premières sont continues et telle que:

1- V est une **fonction candidate de Lyapunov***.*

2- $\dot{V}$ est localement semi-définie négative dans un voisinage de l'origine, $\mathbf{\Omega}$.

alors le point d'équilibre 0 *est* **stable** *et un domaine de conditions initiales stables est délimité par n'importe quelle équipotentielle de Lyapunov contenue dans $\mathbf{\Omega}$.*
Si $\dot{V}$ est localement définie négative dans $\mathbf{\Omega}$, alors la stabilité est dite **localement asymptotique** *dans la partie de l'espace délimité par n'importe quelle équipotentielle de Lyapunov contenue dans $\mathbf{\Omega}$.*

Remarque:
Ce théorème permet également de déterminer des domaines pour lesquels l'origine est un point d'équilibre instable par rapport aux conditions initiales:
L'extérieur de n'importe quel domaine délimité par une équipotentielle de Lyapunov qui englobe le domaine où $\dot{V}$ est semi-définie négative, est un domaine de conditions initiales pour lesquelles l'origine n'est pas (asymptotiquement) stable.
Il est important de noter que entre les domaines de conditions initiales stables et instables demeure une région où la stabilité ne peut-être déterminée. (voire figure 2.5).

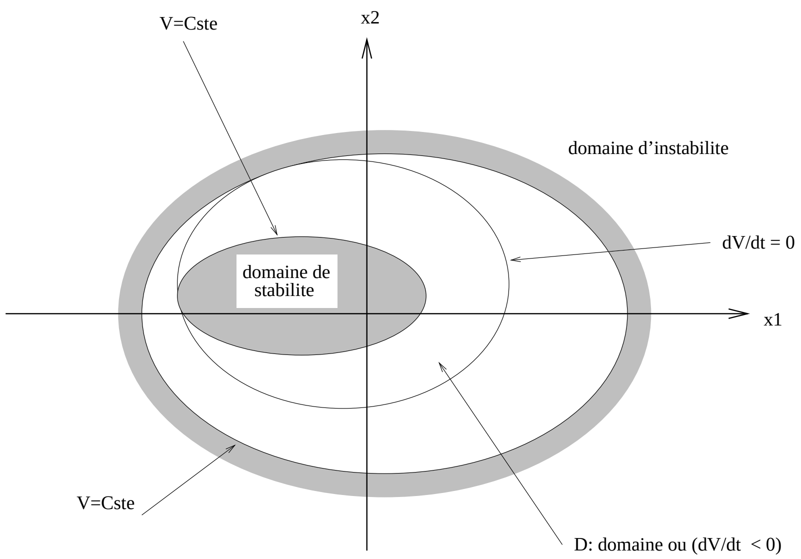


Figure 2.5 : Seconde méthode de Lyapunov

Exemple:
Soit le système non linéaire autonome donné par ses équations d'état:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2 \\ \\ \dot{x}_2 = x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2) + 4x_2x_1^2 \end{cases}$$

$(0, 0)$ est un point d'équilibre pour ce système. On choisit une fonction candidate de Lyapunov $V(x) = 1/2(x_1^2 + x_2^2)$, ce qui conduit à calculer

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

$\dot{V}(x)$ est donc localement asymptotiquement stable dans la boule:

$$B_{\sqrt{2}} = \left\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 2\right\}$$

C'est l'intérieur de l'équipotentielle $V(x) = 4$. De plus, le système est instable par rapport à l'origine pour tout condition initiale à l'extérieur du domaine délimité par $V(x) = 4$.

Remarques:

1- V est une fonction de Lyapunov pour le système.

2- La condition précédente est une condition suffisante; il faut donc choisir a priori **une fonction candidate de Lyapunov**, $V(x)$. Si la condition 2 est vérifiée, la fonction $V(x)$ est une fonction de Lyapunov et l'on peut conclure à la stabilité sinon aucune conclusion ne peut être donnée et il faut alors recommencer le processus avec une autre fonction candidate de Lyapunov.

Théorème 2 *: stabilité globale asymptotique*
S'il existe une fonction V telle que

1- V est une **fonction candidate de Lyapunov***.*

2- $\dot{V}$ est définie négative.

3- La condition $\|x\| \longrightarrow +\infty$ implique $V(x) \longrightarrow +\infty$.

alors 0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Le problème majeur de cette méthode est de trouver une fonction de Lyapunov pour le système en l'absence de guide clair. Dans le cas non linéaire, il n'existe pas de méthode systématique pour choisir une fonction de Lyapunov convenable, d'où l'utilisation de l'expérience, de l'intuition et de considérations physiques et de quelques méthodes partielles, (suffisantes), dont nous présenterons deux exemples plus loin.

II.4.3 Application aux systèmes linéaires invariants

Etant donné le système linéaire

$$\dot{x} = Ax$$

on considère une fonction candidate de Lyapunov **quadratique**, $V(x) = x'Px$, alors

$$\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = -x'(A'P + PA)x = -x'Qx$$

Théorème 3 *:*

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système $\dot{x} = Ax$ soit asymptotiquement stable est que $\forall\ Q = Q' > 0$, la matrice P, unique solution de l'équation de Lyapunov qui suit, soit définie positive.

$$A'P + PA + Q = 0$$

Exemple:
Soit le système linéaire autonome donné par sa matrice dynamique:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}$$

En choisissant $Q = \mathbf{1}$, on trouve

$$P = \begin{bmatrix} 0.3125 & 0.0625 \\ 0.0625 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

II.4.4 Démarche à suivre pour étudier la stabilité

Pour résumer cette section de chapitre voici la démarche à suivre quand on étudie la stabilité d'un système:

1- Trouver les points d'équilibre du système en résolvant $f(x) = 0$.

2- Linéariser le système autour des points d'équilibre pour évaluer la stabilité/instabilité des points d'équilibre. (cette étape est souvent appelée première méthode de Lyapunov). Au voisinage d'un point d'équilibre x_e:

$$\dot{x} = f(x) = A(x - x_e) + o(x - x_e)$$

Si la matrice A est définie négative le système est localement asymptotiquement stable autour de x_e, mais aucun domaine de conditions initiales stables ne peut-être déterminé à ce stade. Si A est semi-définie négative, on ne peut rien dire. Sinon le point d'équilibre est instable.

3- Choisir une fonction candidate de Lyapunov V et en posant le changement de variable $\hat{x} = x - x_e$ étudier les domaines de stabilité/instabilité, à l'aide de la seconde méthode de Lyapunov.

4- Si les résultats ne sont pas concluants, choisir une autre fonction candidate de Lyapunov et recommencer.

Remarque:
A est la matrice calculée par approximation au premier ordre de la fonction f. C'est aussi la Jacobienne de f au point d'équilibre x_e:

$$A = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](x_e)$$

Le choix de la fonction de Lyapunov est explicité par la suite.

II.5 Construction de fonctions de Lyapunov

Dans le cas général non linéaire, le principal inconvénient de la méthode directe de Lyapunov est de ne pas disposer de guide pour le choix de la fonction candidate. Nous proposons quelques fonctions de Lyapunov classiques et nous présentons deux méthodes qui permettent de répondre en partie à ce problème.

II.5.1 Quelques exemples de fonctions de Lyapunov

Fonction de Lyapunov quadratique
Soit n'importe quelle matrice symétrique définie positive P, alors $V(x) = x'Px$ est une fonction candidate de Lyapunov.
Les équipotentielles de Lyapunov sont des ellipsoïdes de demis axes définis par les valeurs propres et vecteurs propres de P.
La dérivée le long des trajectoires de V s'écrit:

$$\dot{V}(x) = x'Pf(x) + f'(x)Px$$

Norme du max
Soit la fonction $V(x) = max|x_i|$. C'est à dire que l'on prend la valeur absolue maximale des coefficients du vecteur x.
Les équipotentielles de Lyapunov sont des hypercubes de cotés parallèles aux axes de l'espace vectoriel.
La dérivée le long des trajectoire s'écrit:

$$V(x) = max|x_i| = x_{i_m} \cdot signe(x_{i_m})$$

$$\dot{V}(x) = f_{i_m}(x) \cdot signe(x_{i_m})$$

Norme duale du max
Soit la fonction $V(x) = \sum |x_i|$. C'est à dire que l'on prend la somme des valeurs absolues des coefficients du vecteur x.
Les équipotentielles de Lyapunov sont des hypercubes de sommets placés sur les

axes de l'espace vectoriel.
La dérivée le long des trajectoires s'écrit:

$$\dot{V}(x) = \sum f_i(x) \cdot signe(x_i)$$

Les équipotentielles sont représentées en dimension deux sur la figure 2.6

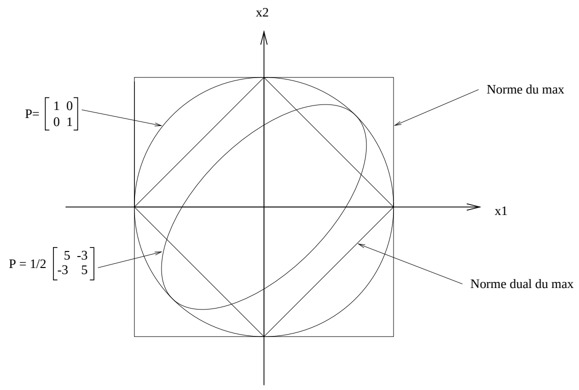


Figure 2.6 : équipotentielles $V(x) = 1$

II.5.2 Méthode de Krasovskii

Etant donné un système non linéaire autonome $\dot{x} = f(x)$ dont le point d'équilibre étudié est l'origine, la méthode de Krasovskii consiste à proposer une fonction candidate de Lyapunov de la forme $V(x) = f'(x)f(x)$ et de tester si cette fonction est une fonction de Lyapunov.

Théorème 4 *:*
Soit le système autonome $\dot{x} = f(x)$ dont le point d'équilibre étudié est l'origine et soit la matrice jacobienne du système:

$$A(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$$

Si la matrice $F(x)$ définie par:

$$F(x) = A(x) + A'(x)$$

est définie négative dans un voisinage Ω de l'origine alors l'origine est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable. Une fonction de Lyapunov pour ce système est donnée par:

$$V(x) = f'(x)f(x)$$

Si de plus, $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$ et $\lim_{||x|| \to +\infty} V(x) = +\infty$ alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable.

Exemple: Soit le système:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + 2x_2 \\ \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{cases}$$

$(0,0)$ est un point d'équilibre pour ce système. On calcule la jacobienne.

$$A(x) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6-6x_2^2 \end{bmatrix}$$

alors:

$$F(x) = A(x) + A'(x) = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12-12x_2^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} D_1 = -12 \\ D_2 = -128 - 12x_2^2 \end{array}$$

d'où $F(x)$ est définie négative $\forall (x_1, x_2) \neq 0$ et l'origine est localement asymptotiquement stable. De plus

$$V(x) = f'(x)f(x) = (-6x_1 + 2x_2)^2 + (2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3)^2$$

Visiblement, $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} V(x) = +\infty$ ce qui implique que l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Ce résultat de Krasovskii, très simple à utiliser, est toutefois rarement applicable du fait de problèmes tels que:

- jacobienne non définie négative.
- difficulté pour tester la définie négativité de F.

Théorème 5 *:*
Soit $\dot{x} = f(x)$ dont le point d'équilibre étudié est l'origine et $A(x)$ sa jacobienne. S'il existe deux matrices $P = P' > 0$, $Q = Q' > 0$ telles que:

$$F(x) = A'(x)P + PA(x) + Q < 0 \qquad x \in \Omega$$

alors l'origine est localement asymptotiquement stable. La fonction $V(x) = f'(x)Pf(x)$ est une fonction de Lyapunov pour le système. Si de plus $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$ et $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} V(x) = +\infty$ alors le système est globalement asymptotiquement stable.

II.5.3 Méthode du gradient variable

Cette méthode constitue une approche formelle permettant de construire des fonctions de Lyapunov.
Une fonction scalaire est reliée à son gradient par la relation intégrale:

$$V(x) = \int_0^x \nabla V d\beta \qquad où \quad \nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Afin que la relation entre gradient et fonction scalaire soit biunivoque, la fonction gradient doit satisfaire les règles croisées:

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

Principe de la méthode:
On suppose donnée une forme spécifique pour le gradient ∇V en lieu et place d'une forme spécifique pour la fonction candidate. Généralement, on suppose:

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

où les a_{ij} sont les coefficients à déterminer.

Procédure:

- ∇V est donnée par la forme précédente.
- Résoudre les relations croisées pour a_{ij}.
- Choisir les a_{ij} pour que $\dot{V}$ soit définie négative.
- Calculer V par intégration à partir de ∇V.
- Tester si $V > 0$.

Nota:
Pour obtenir V, on intègre:

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla V_1(x_1, 0 \cdots 0) d\beta_1 + \cdots + \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1, x_2, \cdots x_n) d\beta_n$$

Exemple:
Soit:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 2x_1 x_2^2 \end{cases}$$

On suppose que l'on a un gradient donné par:

$$\begin{cases} \nabla V_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \\ \nabla V_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases}$$

Les règles croisées sont;

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = a_{12} + x_2 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = a_{21} + x_1 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1}$$

On peut choisir par exemple:

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} = 1 & \qquad \nabla V_1 = x_1 \\ \\ a_{12} = a_{21} = 0 & \qquad \nabla V_2 = x_2 \end{cases}$$

alors:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2^3 = -2x_1^2 - 2x_2^2(1 - 2x_1x_2)$$

soit:

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0 \quad pour \quad 1 - 2x_1x_2 \geq 0$$

d'où on calcule:

$$V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = x_1^2/2 + x_2^2/2 > 0$$

II.6 Stabilité absolue

Les systèmes que l'on étudie ont la structure donnée part la figure 2.7.

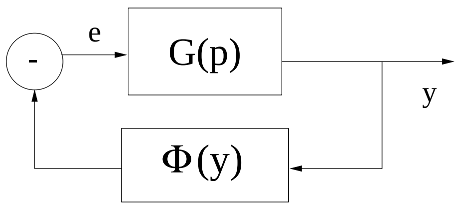


Figure 2.7 : schéma-bloc associé à la stabilité absolue

- $G(p) \sim [A, B, C, 0]$ est la fonction de transfert d'un système linéaire invariant strictement propre.
- $\Phi(y)$ est une non linéarité statique.

II.6.1 Problème de Lur'e

On impose à la non linéarité de vérifier **une condition de secteur**.

Définition 14 *:*
Une fonction continue Φ appartient au secteur $[k_1 \quad k_2]$ s'il existe deux réels non négatifs k_1 et k_2 tels que:

$$y \neq 0 \Rightarrow k_1 \leq \frac{\Phi(y)}{y} \leq k_2$$

Interprétation graphique:
$\Phi(y)$ doit être contenue dans le secteur $k_1 y, \; k_2 y$. (cf. figure 2.8)

Nota: La condition de secteur implique $\Phi(0) = 0$ et $y\Phi(y) \geq 0$.

Hypothèses 1 *:*

H1- A est une matrice stable.

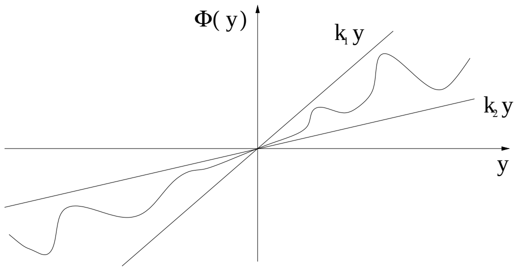


Figure 2.8 : Secteur conique

H2- La paire (A, B) est une paire commandable.

H3- La paire (C, A) est une paire observable.

H4- La non linéarité $\Phi(y)$ vérifie la condition de secteur.

Définition 15 *: problème de Lur'e*
Sous les hypothèses H1 - H4, le problème de Lur'e consiste à déterminer des conditions sur (A, B, C) assurant que le point d'équilibre 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour ce système.

Remarque:
On ne se préoccupe pas seulement de la propriété de stabilité d'un système unique mais de la stabilité d'un ensemble de systèmes pour toutes les non linéarités, d'où le terme de stabilité absolue.

II.6.2 Deux conjectures

M. A. Aizermann, en 1949, fit la conjecture suivante pour résoudre le problème de Lur'e.

Conjecture 1 *: Aizermann*
Si pour tout $k \in [k_1 \;\; k_2]$, la matrice $A - BCk$ est stable alors le point d'équilibre 0 est globalement asymptotiquement stable pour le système non linéaire défini.

De nombreux contre-exemples ont, par la suite, montré que cette conjecture est fausse. En 1957, Kalman a proposé la conjecture suivante.

Conjecture 2 *: Kalman*
Si la fonction non linéaire vérifie

$$k_3 \leq \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y} \leq k_4$$

et que la matrice $A - BCk$ est stable $\forall\, k \in [k_3 \;\; k_4]$, alors le système non linéaire est globalement asymptotiquement stable.

Conjecture plus forte que celle d'Aizermann, la conjecture de Kalman n'en reste pas moins fausse.

II.6.3 Critère de Popov

Afin de résoudre le problème de Lur'e, le critère de Popov renforce les conditions et hypothèses sur le système linéaire, conduisant à une condition suffisante qui est déduite de celle, nécessaire et suffisante, du critère de Nyquist.

Hypothèses 2 *:*

- $\Phi \in \ [0 \ \ k]$.

- *A est une matrice asymptotiquement stable.*

Théorème 6 *:*
S'il existe $\alpha > 0$ tel que: (inégalité de Popov)

$$\forall\ \omega \geq 0 \quad Re[(1 + j\alpha\omega)G(j\omega)] + 1/k > 0$$

alors 0 est globalement asymptotiquement stable.

Interprétation géométrique:
Réécrivons l'inégalité de Popov avec $G(j\omega) = G_1(j\omega) + jG_2(j\omega)$

$$\forall\ \omega \geq 0 \quad Re[1 + j\alpha\omega)G(j\omega)] + 1/k > 0$$

est équivalent à:

$$\forall\ \omega \geq 0 \quad G_1(j\omega) - \alpha\omega G_2(j\omega) + 1/k > 0$$

Si l'on définit le point M d'affixe $(G_1(j\omega), \omega G_2(j\omega))$ alors on appelle **le tracé de Popov** de G le tracé dans le plan complexe des points M pour $\omega \geq 0$.
Graphiquement, le critère de Popov signifie que le tracé de Popov de la fonction de transfert $G(p)$ doit être à droite de la droite définie par l'équation:

$$x - \alpha y + 1/k = 0$$

Voir figure 2.9.

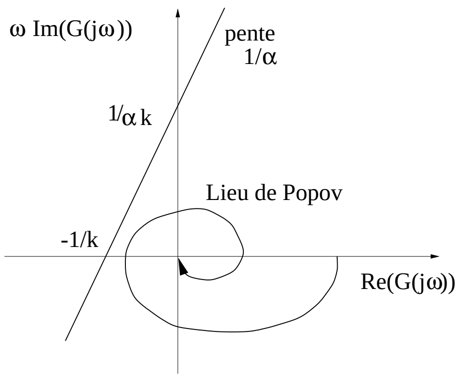


Figure 2.9 : Tracé de Popov

Exemple numérique:

$$G(p) = \frac{p+3}{p^2+7p+10} \qquad 0 \leq \Phi(y) \leq ky$$

Le système linéaire est strictement stable, commandable et observable, (pas de simplification pôles - zéros).

$$G(j\omega) = \frac{3+j\omega}{10-\omega^2+7j\omega} = \frac{30+4\omega^2 - j\omega(11+\omega^2)}{(10-\omega^2)^2+49\omega^2}$$

d'où

$$G_1(j\omega) = \frac{30+4\omega^2}{(10-\omega^2)^2+49\omega^2}$$

$$\omega G_2(j\omega) = \frac{-\omega^2(11+\omega^2)}{(10-\omega^2)^2+49\omega^2}$$

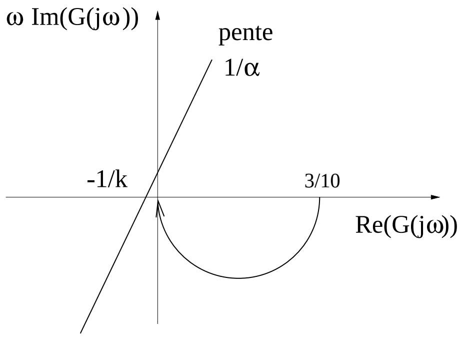


Figure 2.10 : Tracé de Popov

Dans le cas présent, on peut prendre n'importe quel réel $\alpha > 0$ tel que la droite $x - \alpha y + 1/k = 0$ soit en dessus du tracé de Popov de $G(j\omega)$ Voir figure 2.10.

II.6.4 Critère du cercle

Le critère du cercle est une généralisation directe du critère de Nyquist en vue de la résolution du problème de Lur'e.

Hypothèses 3 *:*

H1- La matrice A n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire et a ρ valeurs propres instables.

H2- $\Phi(y)$ vérifie la condition de secteur dans $[k_1 \quad k_2]$.

Théorème 7 *:*
Si le système non linéaire vérifie l'une des conditions suivantes:

- $0 < k_1 \leq k_2$
  Le tracé du lieu de Nyquist de $G(j\omega)$ n'entre pas dans le disque $D(k_1, k_2)$ et l'encercle ρ fois dans le sens trigonométrique.

- $0 = k_1 < k_2$
  Le tracé du lieu de Nyquist de $G(j\omega)$ reste dans le demi-plan défini par $Re(p) > -1/k_2$.

- $k_1 < 0 < k_2$
  Le tracé du lieu de Nyquist de $G(j\omega)$ reste à l'intérieur du disque $D(k_1, k_2)$.

- $k_1 < k_2 < 0$
  Le tracé du lieu de Nyquist de $-G(j\omega)$ n'entre pas dans le disque $D(-k_1, -k_2)$ et l'entoure ρ fois dans le sens trigonométrique.

alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système.

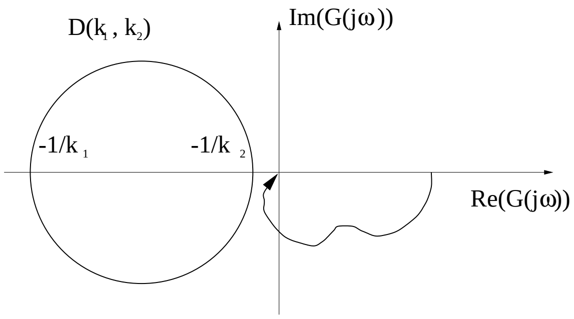


Figure 2.11 : critère du cercle

<u>Exemple numérique:</u>
Soit l'équation amortie de Mathieu:

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + (\mu^2 + a^2 - qcos(\omega_0 t))y = 0$$

En posant $x_1 = y,\ x_2 = \dot{y}$, on obtient:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \\ \dot{x}_2 = -(\mu^2 + a^2)x_1 - 2\mu x_2 + qcos(\omega_0 t)y \end{cases}$$

soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\mu^2 + a^2) & -2\mu \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = [1 \quad 0]$$

$$\Phi(y) = qcos(\omega_0 t)y \qquad -q \leq \frac{\Phi(y)}{y} \leq q$$

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 2\mu p + \mu^2 + a^2}$$

d'où l'on obtient le tracé de la figure 2.12

Dans cet exemple, nous sommes dans le cas 3 et le cercle est centré en 0 et a pour rayon $1/q$. De plus,

$$G(\jmath\omega) = \frac{1}{\mu^2 + a^2 - \omega^2 + 2j\mu\omega} = \frac{\mu^2 + a^2 - \omega^2 - 2j\mu\omega}{(\mu^2 + a^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}$$

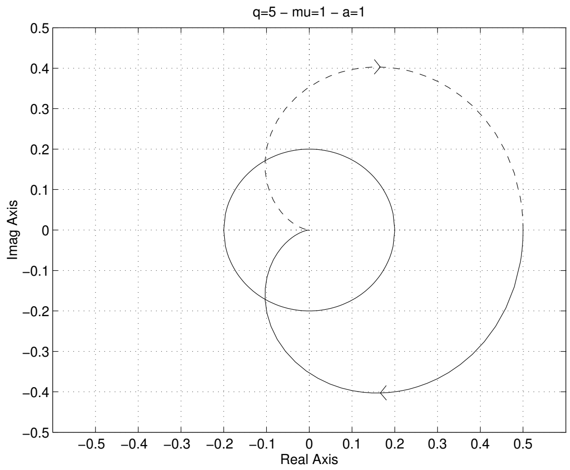


Figure 2.12 : Lieu de Nyquist

soit

$$Re[G(j\omega)] = \frac{\mu^2+a^2-\omega^2}{(\mu^2+a^2-\omega^2)^2+4\mu^2\omega^2}$$

$$Im[G(j\omega)] = \frac{-2\mu\omega}{(\mu^2+a^2-\omega^2)^2+4\mu^2\omega^2}$$

Le module atteint son maximum pour $\omega = \pm\sqrt{a^2-\mu^2}$, $|G|_{max} = \frac{1}{2\mu a}$. Pour que le point d'équilibre soit stable, il suffit donc que $\frac{1}{2\mu a} < \frac{1}{q}$, d'où la condition suffisante de stabilité asymptotique globale.

$$\boxed{q < 2\mu a}$$

Chapitre III

Analyse des S.N.L. du second ordre - méthode du plan de phase

III.1 Introduction et définitions générales

La méthode du plan de phase a été une des premières techniques utilisée pour l'étude des solutions des équations différentielles non linéaires. Son principal inconvénient est qu'elle ne peut être appliquée qu'à des équations du second ordre. De plus, étant une méthode graphique, elle peut être parfois fastidieuse, particulièrement pour les équations comportant des non linéarités polynomiales. Toutefois, une interprétation graphique est toujours souhaitable afin de mieux comprendre le comportement d'un système.

Cette méthode graphique pour l'étude des systèmes du second ordre fut introduite par H. Poincarré. L'idée de base est de générer dans l'espace d'état d'un système dynamique du second ordre, (plan de phase), les trajectoires du mouvement, (solutions des équations non linéaires), correspondant à des conditions initiales variées, et d'en examiner alors les caractéristiques qualitatives.

On considère des systèmes du second ordre, c'est à dire régis par une équation différentielle du second ordre.

$$f(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) = 0$$

On peut associer à cette équation différentielle une représentation d'état d'ordre 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{array} \right. \qquad x_0 = \left[\begin{array}{c} x_1(0) \\ x_2(0) \end{array} \right]$$

L'espace d'état ainsi défini est un plan puisque de dimension 2. L'idée de base est alors de choisir une représentation d'état particulière, $(x_1, x_2) = (x, \dot{x})$, d'en représenter la solution dans le plan $(x, \dot{x})$ appelé **plan de phase** et d'en étudier les propriétés qualitativement.

<u>Intérêts:</u>

- Il est inutile de résoudre analytiquement les équations différentielles non linéaires puisque l'on dispose de méthodes de construction pratique.

- Il n'y a pas de restriction sur la "nature" de la non linéarité.
- On dispose d'interprétations géométriques simples de concepts tels que : cycles limites, stabilité...

Inconvénient:
On doit se restreindre à la classe des systèmes non linéaires du deuxième ordre.

Vocabulaire:
Un système du second ordre **autonome** peut être représenté par le système de deux équations différentielles scalaires:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

où (x_1, x_2) sont **les variables de phase ou d'état**. f_1, f_2 sont des fonctions non linéaires quelconques. Le plan de coordonnées (x_1, x_2) est appelé **le plan de phase**. Pour $x(0) = x_0 = (x_1(0) \;\; x_2(0))$, une condition initiale donnée, cette équation différentielle définit une solution $x(t)$. Quand t varie de 0 à l'infini, la solution $x(t)$ peut être représentée par une courbe paramétrée par t dans le plan de phase. L'ensemble des trajectoires de phase pour différentes conditions initiales est **le portrait de phase**.

Exemple:
Soit l'équation différentielle modélisant le mouvement d'un ressort de raideur 1 et de masse 1:

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0$$

A partir d'une position initiale x_0, l'évolution de la position et de la vitesse est donnée par les équations paramétriques:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 cos(t) \\ \\ \dot{x}(t) = -x_0 sin(t) \end{cases}$$

ce qui conduit à une équation de la trajectoire dans le plan $(x, \dot{x})$,

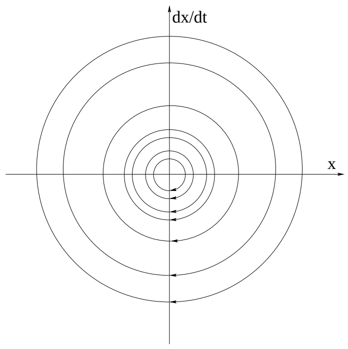


Figure 3.1 : Trajectoires dans le plan de phase

$$x^2 + \dot{x}^2 = x_0^2$$

qui est l'équation d'un cercle dépendant de la condition initiale x_0, voir figure 3.1.

III.2 Construction pratique des trajectoires de phase

Une figure approximative du portrait de phase peut être donnée en traçant des trajectoires à partir d'un grand nombre de conditions initiales différentes.
Il existe de nombreuses méthodes de construction des trajectoires de phase pour les systèmes linéaires ou non linéaires.

- Méthode analytique.
- Méthode des isoclines.
- Méthode delta.
- Méthode de Liénard.
- Méthode de Pell.

Disposant désormais de moyens de calculs informatiques performants et efficaces, les méthodes graphiques permettent d'obtenir de très bons résultats. Du fait de leur simplicité, nous n'étudierons que les deux premières:

- La méthode analytique utilise la solution analytique des équations différentielles décrivant le système. C'est donc une méthode d'utilisation limitée.
- La méthode des isoclines est une méthode purement graphique qui est un bon complément de la précédente pour les systèmes pour lesquels on ne dispose pas d'une solution analytique.

III.2.1 La méthode analytique

Il existe deux techniques pour générer analytiquement les trajectoires de phase. Toutes deux conduisent à une relation fonctionnelle entre les variables de phase (x_1, x_2) du type:

$$g(x_1, x_2, c) = 0$$

Première technique: A partir des équations d'état:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

on obtient les solutions pour les variables de phase sous forme de courbes paramétrées:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(t) \\ \\ x_2 = g_2(t) \end{cases}$$

desquelles on élimine la variable temps pour obtenir l'équation de la trajectoire dans le plan de phase $g(x_1, x_2, c) = 0$.

Deuxième technique: On élimine directement le temps en posant:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

puis l'on résoud cette équation différentielle, quand elle est à variables séparables, pour obtenir la relation fonctionnelle $g(x_1, x_2, c) = 0$.

Nota:
Cette technique est évidemment limitée par le type de non linéarité rencontrée. Toutefois, elle est particulièrement utilisée pour les systèmes linéaires par morceaux.

Exemple: système masse-ressort précédent.

III.2.2 La méthode des isoclines

L'idée principale réside dans le mot isocline.

Définition 16 *:*
Une isocline est une courbe dans le plan de phase définie comme le lieu des points des trajectoires de phase de pente α donnée.

$$s(x_1, x_2) = s(x) = \alpha = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

On remarque en effet que la tangente à la trajectoire passant par le point (x_1, x_2) a pour pente:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

L'équation $s(x) = \alpha$ définit la courbe isocline dans le plan (x_1, x_2), le long de laquelle les tangentes à la trajectoire de phase ont une pente α. La procédure consiste à tracer la courbe isocline dans le plan de phase et à tracer le long de cette courbe, de courts segments de droite de pente α. Ces segments sont parallèles et leur direction est déterminée par le signe de $f_1(x)$, $f_2(x)$ au point x. On répète ensuite la procédure pour différentes valeurs de la constante α.

Une fois le plan de phase rempli d'isoclines, à partir d'un point initial donné x_0, on construit la trajectoire partant de x_0 et reliant les segments entre eux.

Exemple:
Soit le système non linéaire donné par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \\ \dot{x}_2 = -sin(x_1) \end{cases} \quad alors \quad s(x) = \frac{-sin(x_1)}{x_2} = \alpha$$

d'où l'on peut déduire que les isoclines sont définies par les sinusoides paramétrées:

$$x_2 = -\frac{1}{\alpha} sin(x_1)$$

Nota:
Pour utiliser la méthode des isoclines, il est nécessaire que l'échelle en x_1 et en x_2 soit la même.

III.3 Comportement qualitatif: étude des points singuliers

III.3.1 Définition

Un point singulier est un point d'équilibre dans le plan de phase encore appelé point stationnaire. Un point d'équilibre est défini par $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. On obtient donc les points d'équilibre en résolvant les équations non linéaires algébriques:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Les points d'équilibre d'un système du second ordre sont appelés points singuliers, du fait que si l'on désire calculer la pente en tout point de la trajectoire de phase, celle-ci est donnée par:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

En un point d'équilibre, cette pente n'est donc pas définie et plusieurs trajectoires peuvent se croiser en un même point.

Exemple:
Soit le système gouverné par l'équation différentielle:

$$\ddot{x} + 0.6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$$

que l'on peut réécrire sous forme d'équations d'état:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \\ \dot{x}_2 = -0.6x_2 - x_1(x_1 + 3) \end{cases}$$

Les points singuliers sont obtenus par la résolution des équations:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \\ -0.6x_2 - x_1(x_1 + 3) = 0 \end{cases}$$

soit les deux points $(0, 0)$ et $(-3, 0)$.

III.3.2 Cas des systèmes linéaires

Un système linéaire autonome s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \\ \dot{x}_2(t) = cx_1(t) + dx_2(t) \end{cases} \quad soit \quad \dot{x} = Ax \quad avec \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et possède un point d'équilibre unique, $x = 0$, l'origine du plan de phase. La solution de l'équation $\dot{x} = Ax$ pour une condition initiale donnée par x_0 s'écrit:

$$x(t) = Me^{J_r t}M^{-1}x_0$$

où J_r est la forme de Jordan réelle de A et M est la matrice non singulière de passage vérifiant: $M^{-1}AM = J_r$. Suivant la nature des valeurs propres de A, J_r peut prendre différentes formes.

Premier cas: Forme diagonale

$$J_r = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Pour $z = Mx$ alors:

$$\begin{cases} z_1(t) = e^{\lambda_1 t} z_{10} \\ \\ z_2(t) = e^{\lambda_2 t} z_{20} \end{cases}$$

Eliminant le temps entre les deux équations, on obtient l'équation de la courbe dans le plan de phase:

$$z_2(t) = \frac{z_{20}}{z_{10}^{\lambda_2/\lambda_1}} z_1^{\lambda_2/\lambda_1}(t)$$

La forme des courbes de phases obtenues va ainsi dépendre du signe respectif des valeurs propres λ_1 et λ_2.

1- $\lambda_1,\ \lambda_2$ de même signe, (> 0 *ou* < 0).

Le point d'équilibre est un **noeud stable ou instable.**

2- $\lambda_1,\ \lambda_2$ de signe opposé.

Le point d'équilibre est un **point selle**.

Deuxième cas: Forme de Jordan

$$J_r = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z_1(t) = z_{10}e^{\lambda t} + z_{20}te^{\lambda t} \\ \\ z_2(t) = z_{20}e^{\lambda t} \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire est alors:

$$z_1(t) = z_2(t)\left[\frac{z_{10}}{z_{20}} + \frac{1}{\lambda} ln\left(\frac{z_2(t)}{z_{20}}\right)\right]$$

Le point d'équilibre est un **noeud stable ou instable**.

Troisième cas: Forme complexe conjuguée

$$J_r = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

En coordonnées polaires, $r(t) = \sqrt{z_1^2(t) + z_2^2(t)}$, $\theta(t) = arctg\left[\frac{z_2(t)}{z_1(t)}\right]$, l'équation de la trajectoire est donnée par:

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t} \\ \\ \theta(t) = \theta_0 + \beta t \end{cases}$$

ce qui définit une spirale logarithmique.

Le point d'équilibre est un **foyer stable ou instable**.

Cas particulier: $\alpha = 0$

La matrice A a des valeurs propres sur l'axe imaginaire. Dans ce cas, $(0, 0)$ n'est pas un point d'équilibre hyperbolique. Cela signifie que la nature du point d'équilibre est très sensible à des perturbations dans les éléments de la matrice A.

Le point d'équilibre est un **centre**.

Nota:
Les caractéristiques en stabilité des systèmes linéaires sont déterminées uniquement par la nature des points singuliers, ce qui est différent du cas non linéaire.

III.3.3 Cas non linéaire - Comportement local

En examinant le portrait de phase du système non linéaire donné comme exemple à la section III.3.1, on peut constater que dans le voisinage des deux points d'équilibre, le comportement du système s'identifie à celui d'un système linéaire, foyer stable pour $(0, 0)$ et point selle pour $(-3, 0)$. Ces observations faites dans un cas particulier peuvent être généralisées et le comportement qualitatif d'un système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre peut être déterminé par linéarisation autour de ce point. Ces résultats sont donc valides **localement**.

Principe de la méthode :
Soit $X_e \sim (\alpha, \beta)$ point d'équilibre d'un système non linéaire donné par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

La procédure se décompose en trois étapes:

- Changement de coordonnées:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 - \alpha \\ \\ X_2 = x_2 - \beta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{X}_1 = F_1(X_1, X_2) \\ \\ \dot{X}_2 = F_2(X_1, X_2) \end{cases}$$

- Linéarisation:

$$\dot{X} = AX$$

où

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(X_1,X_2)}{\partial X_1}_{|0} & \frac{\partial F_1(X_1,X_2)}{\partial X_2}_{|0} \\ \\ \frac{\partial F_2(X_1,X_2)}{\partial X_1}_{|0} & \frac{\partial F_2(X_1,X_2)}{\partial X_2}_{|0} \end{pmatrix}$$

est **la matrice Jacobienne** de $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ évaluée au point $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

- Etude des propriétés du point singulier 0 pour le système linéarisé.

Conclusions:

Si le point $(0,0)$ est un noeud stable, (resp. instable), un foyer stable, (resp. instable), ou un point selle pour le système linéarisé, alors dans un voisinage du point d'équilibre (α, β), les trajectoires de phase du système non linéaire se comporteront comme celles associées à un noeud stable, (resp. instable), un foyer stable, (resp. instable), ou un point selle. Nous qualifierons de manière identique les points d'équilibre pour le système linéarisé et pour le système non linéaire.

Exemple: Equation d'un pendule avec friction

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 \end{cases} \qquad k/m = 1/2 \quad g/l = 1$$

qui possède deux points d'équilibre $(0,0)$, $(\pi, 0)$. La matrice Jacobienne associée est donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -cos(x_1) & -0.5 \end{pmatrix}$$

Evaluée aux deux points d'équilibre, on obtient les deux matrices Jacobiennes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

avec les valeurs propres $-0.25 \pm j0.97$ et

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

avec les valeurs propres -1.28, 0.78. Ainsi, le point d'équilibre $(0,0)$ est un foyer stable et $(\pi, 0)$ un point selle.

Cas critique de Lyapunov:

Dans ce qui précède, nous n'avons pas envisagé le cas où le système linéarisé possède au moins une valeur propre sur l'axe imaginaire. Dans ce cas, le comportement du système linéarisé et le comportement local du système non linéaire peuvent être très différents. C'est **un cas critique de Lyapunov**.

Exemple: Soit le système donné par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \\ \dot{x}_2 = x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

qui a un point d'équilibre en 0. Le système linéarisé à l'origine a les valeurs propres $\pm j$. C'est donc un centre. Si l'on représente le système en coordonnées polaires:

$$\begin{cases} x_1 = rcos(\theta) \\ \\ x_2 = rsin(\theta) \end{cases}$$

on peut réécrire les équations précédentes sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{r} = -\mu r^3 \\ \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

donc pour $\mu > 0$, le point d'équilibre sera un foyer stable et instable pour $\mu < 0$.

III.3.4 Les cycles limites

Nous avons vu à travers l'exemple linéaire de la section III.1, un exemple de mouvement oscillatoire:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0cos(t) \\ \\ x_2(t) = -x_0sin(t) \end{cases}$$

L'origine du plan de phase est donc un centre. Le système est oscillant d'amplitude x_0. C'est **un oscillateur harmonique**. Les trajectoires de phase sont des courbes fermées. Toutefois, des changements infinitésimaux dans les paramètres du système annuleraient ces oscillations. L'oscillateur n'est pas **structurellement stable**. En fait, il est impossible de construire un oscillateur harmonique du fait de l'inévitable dissipation d'énergie. Même dans le cas où ce problème serait évité, on constate que l'amplitude des oscillations, dans le cas de l'oscillateur harmonique, dépend de la condition initiale. Ceci n'est pas le cas en ce qui concerne les oscillateurs non linéaires. Il est en effet possible de construire physiquement des oscillateurs non linéaires tels que:

- l'oscillateur non linéaire soit structurellement stable,

- l'amplitude de l'oscillation est indépendante de la condition initiale.

On dit alors que le système non linéaire possède **un cycle limite**.

Définition 17 *:*
Un cycle limite est défini comme une courbe fermée unique dans le plan de phase. Elle reflète la périodicité du mouvement et son caractère oscillatoire.

Exemple: Oscillateur de Van der Pol

Les équations d'état de l'oscillateur de Van der Pol sont:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + \epsilon(1 - x_1^2(t))x_2(t) \end{cases}$$

dont le portrait de phase est donné figure 1.2 pour $\epsilon = 1$. Le comportement est différent de celui de l'oscillateur harmonique pour lequel il y avait un ensemble continu de courbes fermées variant pour x_0.

Il existe trois types de cycles limites: **stable, instable, et semi-stable**.

III.4 Application

III.4.1 Asservissement à relais

Soit l'asservissement non linéaire de la figure 3.2.

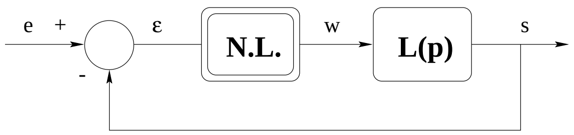


Figure 3.2 : Asservissement de position

Les caractéristiques de cet asservissement non linéaire sont données par:

$$L(p) = \frac{k}{p(1+Tp)} \qquad w = MF(\epsilon)$$

où $F(\epsilon)$ est une fonction non linéaire de l'écart.
On peut associer à la partie linéaire $L(p)$, l'équation différentielle suivante:

$$T\frac{d^2s(\bar{t})}{d\bar{t}^2} + \frac{ds(\bar{t})}{d\bar{t}} = kMF(\epsilon)$$

où l'on considère $F(\epsilon) = Sign(\epsilon) = \pm 1 = \lambda$. On peut donc écrire:

$$\frac{d^2s(\bar{t})}{d\bar{t}^2} + \frac{1}{T}\frac{ds(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{kM}{T}F(\epsilon)$$

Recherche d'une représentation d'état:

On pose $t = \bar{t}/T$ et l'on choisit comme variables d'état:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{s}{kMT} \\ x_2 = \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{kMT}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{kMT}\frac{ds}{d\overline{t}}\frac{d\overline{t}}{dt} = \frac{1}{kM}\frac{ds}{d\overline{t}}$$

$$\frac{ds}{d\overline{t}} = kM\frac{dx_1}{dt}$$

D'autre part:

$$\frac{d^2s}{d\overline{t}^2} = kM\frac{d}{d\overline{t}}\left(\frac{dx_1}{dt}\right) = \frac{kM}{T}\frac{d^2x_1}{dt^2}$$

donc

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt} = F(-kMTx_1)$$

soit la représentation d'état:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = \frac{s(0)}{kMT} \\ \dot{x}_2 = -x_2 + \underbrace{F(-kMTx_1)}_{\lambda=\pm 1} & x_2(0) = \frac{1}{kMT}\frac{ds(0)}{dt} \end{array}\right.}$$

<u>Equations de la trajectoire:</u>

La deuxième équation d'état est une équation différentielle du premier ordre que l'on peut intégrer par la méthode de la variation de la constante.

$$x_2(t) = x_{20}e^{-t} + \lambda(1 - e^{-t})$$

D'autre part $\dot{x}_1 = x_2$ et

$$x_1 - x_{10} = \int_0^t x_2(\tau)d\tau = \int_0^t [x_{20}e^{-\tau} + \lambda(1 - e^{-\tau})]d\tau$$

d'où:

$$x_1(t) = x_{10} + \lambda t + (x_{20} - \lambda)(1 - e^{-t})$$

<u>Equations paramétriques de la trajectoire:</u>

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_{10} + \lambda t + (x_{20} - \lambda)(1 - e^{-t}) \\ \\ x_2 = x_{20}e^{-t} + \lambda(1 - e^{-t}) \end{array}\right.}$$

Afin de déterminer l'équation de la trajectoire, on élimine le temps entre les deux équations:

$$x_1(t) + x_2(t) = x_{10} + x_{20} + \lambda t$$

et

$$t = ln\left[\frac{x_{20} - \lambda}{x_2(t) - \lambda}\right]$$

Equation de la trajectoire:

$$\boxed{x_1(t) + x_2(t) = x_{10} + x_{20} + \lambda ln\left[\frac{x_{20}-\lambda}{x_2(t)-\lambda}\right]}$$

Nota: L'équation de la tangente est donnée par:

$$\frac{dx_2(t)}{dx_1(t)} = \frac{-x_2(t)+\lambda}{x_2(t)} \quad \longrightarrow \quad +\infty \quad quand \quad x_2(t) \to 0$$

On aura toujours une tangente verticale à l'intersection de l'axe ox.
Suivant la valeur de λ, $(-1, 0, 1)$, l'équation de la trajectoire sera différente; à chaque changement de λ, on aura **une commutation de trajectoire**.

III.4.2 Asservissement à relais avec contre-réaction tachymétrique

Le système asservi est décrit par le schéma fe la figure 3.3.

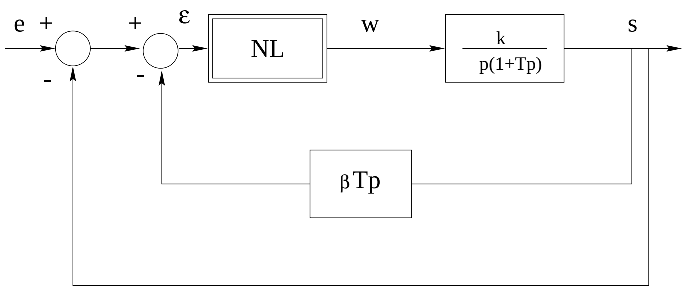


Figure 3.3 : Asservissement à contre réaction tachymétrique

Dans cet asservissement, on suppose que la partie non linéaire comporte un élément hystérésis, (h) ou une zone morte, (h).
Les équations liées au schéma sont données par:

$$\begin{cases} T\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} = kw = kMF(\epsilon) \\ \\ w = MF(\epsilon) \\ \\ \epsilon = -(T\beta\frac{ds}{dt} + s) \end{cases}$$

En posant des variables d'état réduites: $t = \frac{\bar{t}}{T}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{s}{kMT} \\ \\ x_2 = \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} \end{cases}$$

on obtient le modèle d'état:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + \lambda \end{cases} \qquad \lambda = \pm 1$$

Equation de la trajectoire:

$$x_1(t) + x_2(t) = x_{10} + x_{20} + \lambda ln \left[\frac{x_{20} - \lambda}{x_2(t) - \lambda} \right]$$

Commutation:

Il y a deux droites de commutation définies par:

$$\begin{cases} -h/2 = -kMT(\beta x_2 + x_1) \\ \\ h/2 = -kMT(\beta x_2 + x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -1/\beta x_1 + \frac{h}{2\beta kMT} \\ \\ x_2 = -1/\beta x_1 - \frac{h}{2\beta kMT} \end{cases}$$

Effet qualitatif:

L'introduction d'une contre-réaction tachymétrique entraine l'inclinaison des droites de commutation, donc une avance de la commutation. Cela implique donc la diminution de l'amplitude des auto-oscillations quand elles existent.

III.4.2.1 Régime glissant

Dans cette section, nous aborderons de manière extrèmement simplifiée le problème du régime glissant. Ce paragraphe a pour principal but d'être une introduction simplifiée à la commande à structure variable présentée dans un prochain chapitre.

On considère toujours le même asservissement, ce qui implique la présence de deux droites de commutation espacées de h. On diminue la pente des droites de commutation, donc on augmente le coefficient de la contre-réaction tachymétrique, β, jusqu'à ce que la pente de la tangente à la trajectoire après commutation soit supérieure à la pente de la droite de commutation.

$$1/\beta < |P_c|$$

où P_c est la pente de la tangente à la trajectoire de phase après commutation, au point de commutation, M_c. Dans ce cas, la trajectoire ne traverse pas la droite de commutation mais se réfléchit dessus. Il y a **réflexion** de la trajectoire de phase sur la droite de commutation (c.f. figure 3.4).

Cela conduit à une suite de réflexions (figure 3.5) entre les droites de commutation, (réfraction). Le système est alors en **régime glissant**.

Condition de régime glissant:

Dans notre cas, P_c est la pente de la tangente à la trajectoire au point de commutation M_c, après commutation.

$$\boxed{|P_c| = \frac{1}{\beta}}$$

Régime glissant limite:

Si l'on fait tendre la distance entre les deux droites de commutation vers 0, $h \to 0$, ce qui correspond à faire tendre le relais vers un relais ideal, sans seuil ni

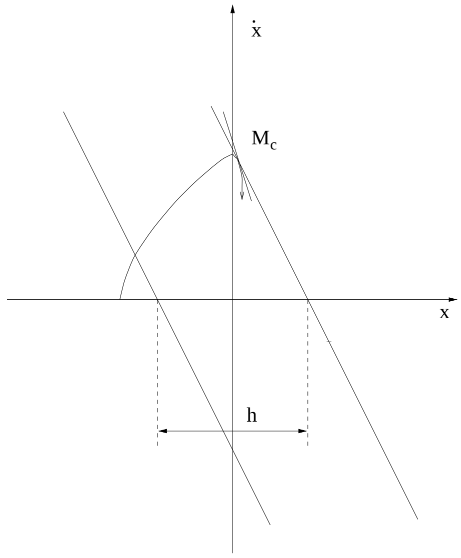


Figure 3.4 : Condition de régime glissant

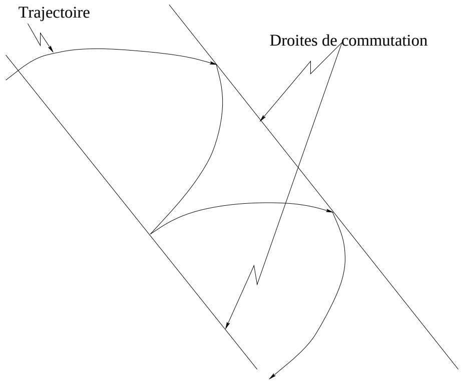


Figure 3.5 : Suite de réflexions

hystérésis, la fréquence des commutations tend vers l'infini et le point glisse sur la droite de commutation $x_1 + \beta x_2 = 0$. Nous sommes en **régime glissant limite**. Pendant ce régime, l'équation du mouvement est:

$$\beta \dot{x}_1 + x_1 = 0 \qquad soit \qquad x_1(t) = x_{10} e^{-t/\beta}$$

Cela implique donc que le système a une dynamique fixée par les caractéristiques du régime glissant.

III.4.2.2 Régime optimal

Le système doit mettre le temps minimum pour aller de la condition initiale au point d'équilibre, l'origine, soit après seulement une commutation, (cf. figure 3.6).

Il faut donc déterminer le coefficient de la contre-réaction tachymétrique β et les coordonnées du point de commutation (x_{1c}, x_{2c}) afin de réaliser cet objectif.

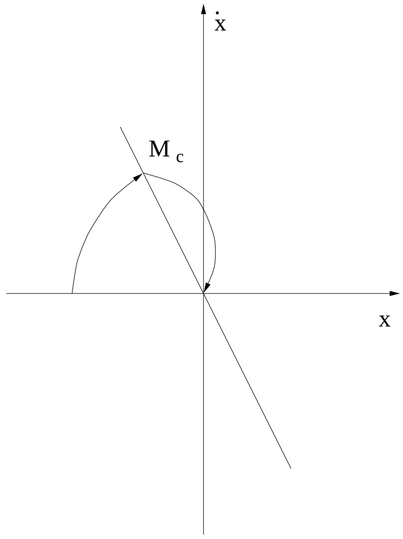


Figure 3.6 : Commande optimale

La trajectoire avant commutation est donnée par:

$$x_{1c}(t) + x_{2c}(t) = x_{10} + x_{20} + \lambda ln \left[\frac{x_{20} - \lambda}{x_{2c}(t) - \lambda} \right]$$

et après commutation:

$$0 + 0 = x_{1c}(t) + x_{2c}(t) + \lambda ln \left[\frac{x_{2c}(t) - \lambda}{\lambda} \right]$$

De plus l'équation de la droite de commutation est:

$$x_{2c}(t) = -1/\beta x_{1c}(t) - \frac{h}{2kMT\beta}$$

On dispose de trois équations pour trois inconnues.

III.4.3 Exemples

Dans cette section, deux exemples sont traités afin d'illustrer les notions précédentes.

III.4.4 Asservissement avec relais et hystérésis

Nous considérons, dans un premier temps, l'asservissement de la figure 3.2 Les paramètres définissant le système sont donnés par:

$$\begin{cases} k = 1 & M = 1 \\ T = 1 & h = 0.2 \\ x_{10} = -1 & x_{20} = 0 \end{cases}$$

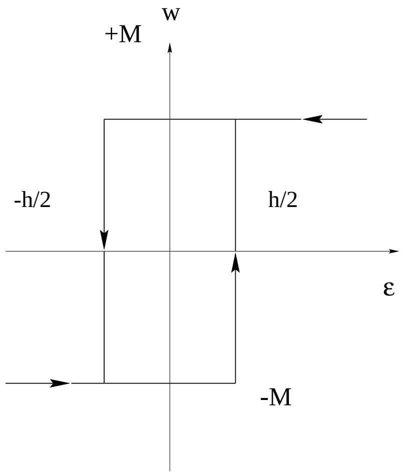


Figure 3.7 : Hystérésis

L'élément non linéaire est un cycle d'hystérésis représenté en figure 3.7 dont les paramètres sont donnés ci-dessus. La modélisation usuelle conduit à définir le modèle d'état suivant ainsi que l'équation de la trajectoire.

Equations d'état:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + \lambda \end{cases}$$

Equation de la trajectoire:

$$x_1(t) + x_2(t) = x_{10} + x_{20} + \lambda ln \left[\frac{x_{20} - \lambda}{x_2(t) - \lambda} \right]$$

Les droites de commutation sont déterminées à partir du cycle d'hystérésis et dans ce cas particulier sont verticales et définis comme suit.

Equations des droites de commutation:

$$\begin{cases} x_1(t) = h/2 = 0.1 \\ x_1(t) = -h/2 = -0.1 \end{cases}$$

Avec les conditions initiales données plus haut, une simulation des trajectoires dans le plan de phase conduit à la figure 3.8.

L'analyse des différentes portions de trajectoires de la figure 3.8 peut être menée simplement à partir des équations et des données précédentes.

Première trajectoire:

Partant de la condition initiale $x_{10} = -1$, soit $\epsilon_0 = -x_{10} = 1$, la première portion de trajectoire est définie par $\lambda = 1$ sur le cycle d'hystérésis. L'équation de la trajectoire jusqu'à la première commutation pour $x_{1c} = 0.1$, $(\epsilon = -0.1)$, est donnée par:

$$x_1(t) + x_2(t) = -1 + ln \left[\frac{-1}{x_2(t) - 1} \right]$$

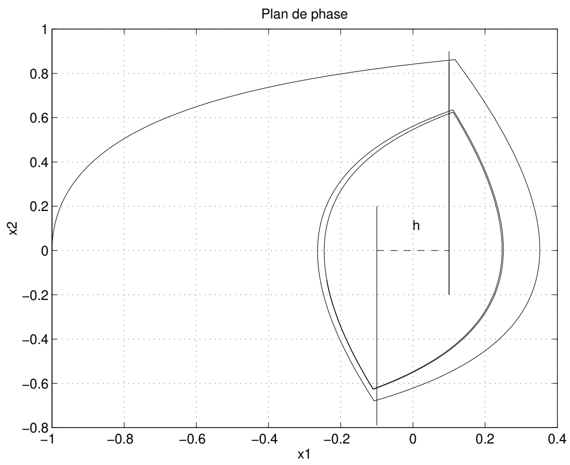


Figure 3.8 : Plan de phase sans contre réaction tachymétrique

Deuxième trajectoire:

Les conditions initiales de cette deuxième trajectoire sont calculées à partir de la première et correspondent à son point terminal. Cela donne donc $x_{1c} = 0.1$ et $x_{2c} = 0.85$ où x_{2c} est calculé à partir de

$$x_{2c} + x_{1c} = -1 + ln\left[\frac{-1}{x_{2c} - 1}\right]$$

Du fait de la commutation de la commande $\lambda = -1$, l'équation de cette deuxième portion s'écrit alors:

$$x_1(t) + x_2(t) = x_{1c} + x_{2c} - ln\left[\frac{x_{2c} + 1}{x_2(t) + 1}\right] = 0.95 - ln\left[\frac{1.85}{x_2(t) + 1}\right]$$

Cette analyse peut être ainsi poursuivie et conduit à montrer que le système admet un cycle limite représenté en figure 3.8 par l'unique courbe fermée dans le plan de phase. Cette analyse est confirmée par celle que l'on pourrait faire par la méthode du premier harmonique (voir chapitre 5 et la figure 3.9).

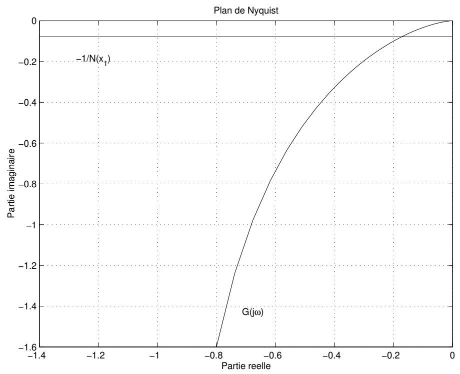


Figure 3.9 : Plan de Nyquist: critère de Loeb

Dans cette deuxième partie, nous reprenons l'asservissement de la figure 3.3 avec une contre-réaction tachymétique de gain β. Les équations des droites de commutation deviennent alors:

$$\begin{cases} x_2(t) = \frac{-x_1(t)}{\beta} - \frac{h}{2\beta} \\ \\ x_2(t) = \frac{-x_1(t)}{\beta} + \frac{h}{2\beta} \end{cases}$$

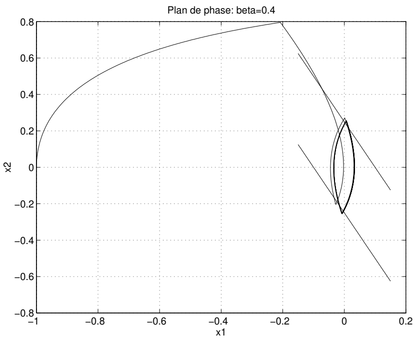


Figure 3.10 : Plan de phase pour $\beta = 0.4$

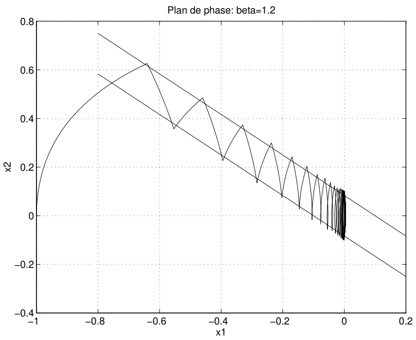


Figure 3.11 : Plan de phase pour $\beta = 0.8$

Pour $\beta = 0.4$ (figure 3.10), on voit clairement que l'amplitude du cycle limite est plus faible que précédemment. Si l'on augmente β, on vérifie la condition de glissement, ce qui est illustré par la figure 3.11.

III.4.5 Asservissement avec relais et zone morte

Nous conservons les caractéristiques précédentes mis à part la non linéarité qui est cette fois une zone morte avec saturation, (cf figure 3.12). Les paramètres définissant le système sont donnés par:

$$\begin{cases} k = 1 & M = 1 \\ T = 1 & h = 0.2 \\ x_{10} = -1 & x_{20} = 0 \end{cases}$$

Les équations d'état sont les mêmes que précédemment ainsi que l'équation de la trajectoire.

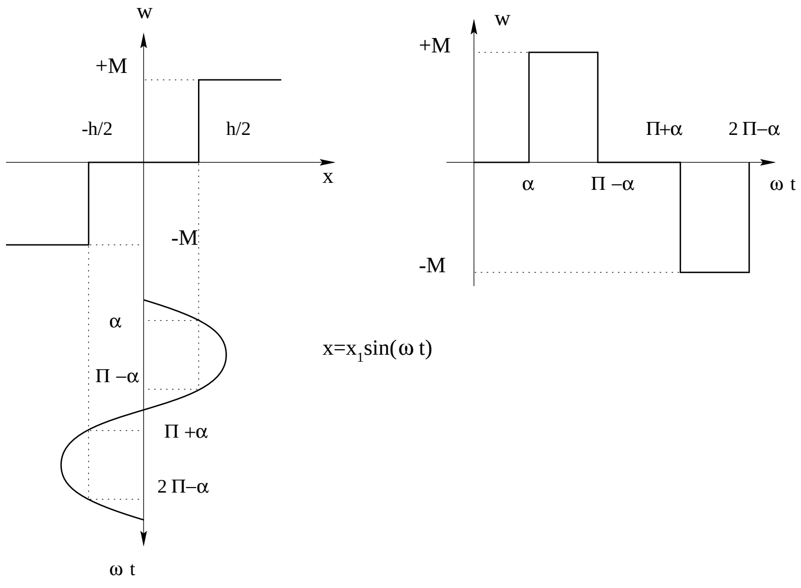


Figure 3.12 : Non linéarité avec zone morte

Equations d'état:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + \lambda \end{cases}$$

Equation de la trajectoire:

$$x_1(t) + x_2(t) = x_{10} + x_{20} + \lambda ln \left[\frac{x_{20} - \lambda}{x_2(t) - \lambda} \right]$$

avec $\lambda = 1, \ 0, \ -1$. Les droites de commutation sont déterminées à l'aide de la caractéristique de la non linéarité, ici la zone morte.

Equations des droites de commutation:

$$\begin{cases} x_1(t) = h/2 = 0.1 \\ x_1(t) = -h/2 = -0.1 \end{cases}$$

Avec les conditions initiales données plus haut, une simulation des trajectoires dans le plan de phase conduit à la figure 3.13.

L'analyse des différentes portions de trajectoires de la figure 3.13 peut être menée de manière identique à ce qui a été fait dans le cas du cycle d'hystérésis à partir des équations et des données du problème.

Première trajectoire:

Partant de la condition initiale $x_{10} = -1$, soit $\epsilon_0 = -x_{10} = 1$, la première portion de trajectoire est définie par $\lambda = 1$. L'équation de la trajectoire jusqu'à la première commutation pour $x_{1c} = -0.1$, $(\epsilon = 0.1)$, est donnée par:

$$x_1(t) + x_2(t) = -1 + ln \left[\frac{-1}{x_2(t) - 1} \right]$$

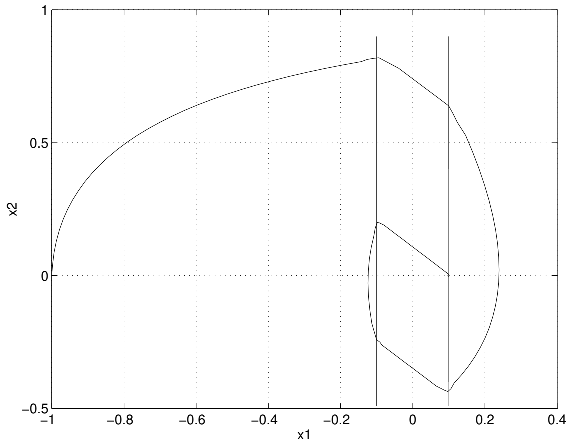


Figure 3.13 : Plan de phase sans contre-réaction tachymétrique

Deuxième trajectoire:

Les conditions initiales de cette deuxième trajectoire sont calculées à partir de la première et correspondent à son point terminal. Cela donne donc $x_{1c} = -0.1$ et $x_{2c} = 0.85$ où x_{2c} est calculé à partir de

$$x_{2c} - 0.1 = -1 + ln\left[\frac{-1}{x_{2c} - 1}\right]$$

Du fait de la commutation de la commande ($\lambda = 0$), l'équation de cette deuxième portion s'écrit alors:

$$x_1(t) + x_2(t) = x_{1c} + x_{2c} = 0.75$$

qui correspond à une portion de droite traduisant le fait que l'on se trouve dans la zone morte et ceci jusqu'à la deuxième commutation pour $x'_{1c} = 0.1$ et $x'_{2c} = 0.65$.

Troisième trajectoire:

Les conditions initiales de cette troisième portion de trajectoire sont $(x'_{1c},\ x'_{2c})$ ce qui conduit après la commutation $\lambda = -1$ à l'équation:

$$x_1(t) + x_2(t) = x'_{1c} + x'_{2c} - ln\left[\frac{x'_{2c} + 1}{x_2(t) + 1}\right] = 0.75 - ln\left[\frac{1.75}{x_2(t) + 1}\right]$$

Cette analyse peut être ainsi poursuivie pour la suite des portions de trajectoire montrant en final que la trajectoire dans le plan de phase se bloque dans la zone morte pour $(x_{1f}, x_{2f}) = (0.1, 0)$. Pour éviter ce phénomène ou du moins en limiter l'importance, il est possible d'introduire une contre-réaction tachymétrique de gain β. Les équations des droites de commutation deviennent alors:

$$\left\{\begin{array}{l} x_2(t) = \frac{-x_1(t)}{\beta} - \frac{0.1}{\beta} \\ \\ x_2(t) = \frac{-x_1(t)}{\beta} + \frac{0.1}{\beta} \end{array}\right.$$

Les figures 3.14 et 3.15 représentent les trajectoires dans le plan de phase pour différentes valeurs du gain de contre-réaction tachymétrique.

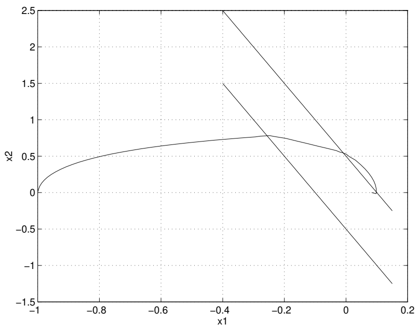


Figure 3.14 : Plan de phase pour $\beta = 0.2$

La condition d'existence du régime glissant est ici donnée par:

$$\frac{1}{\beta} < 1$$

puisque après la première commutation, l'équation de la trajectoire est une équation de droite de pente 1. Une fois la commutation effectuée, la trajectoire de phase est bloquée dans la zone morte comme le montre la figure 3.15.

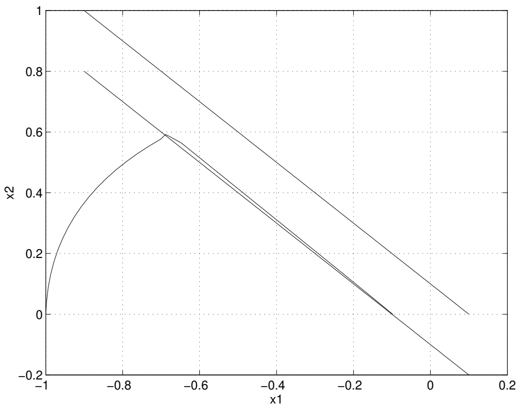


Figure 3.15 : Plan de phase pour $\beta = 1$

Chapitre IV

Introduction à la commande à structure variable

Nous avons vu dans la section précédente la notion de régime glissant dans un cas très particulier. De fait, le régime glissant intervient de manière prépondérante dans la définition et les propriétés d'une classe de systèmes de commandes très importante: les systèmes de commande à structure variable. Cette partie a donc pour objet d'introduire les principes et les propriétés de tels systèmes de commande.

IV.1 Introduction

Le but de cette partie est d'introduire à l'aide d'un exemple historique, les notions de base sur les systèmes de commande à structure variable nécessaires à la bonne compréhension de la suite de ce cours. Les premiers travaux concernant les systèmes de commande à structure variable en mode de glissement ont été proposés et élaborés au début des années 1950 en Union Soviétique par Emelyanov. L'idée fondamentale fut illustrée à l'origine par un système du second ordre. Les termes et notions qui sont définis sur cet exemple seront généralisés et explicités par la suite.

Le modèle du second ordre est défini par les équations d'état:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

où :

$$u(t) = -kx_1 \quad et \quad \begin{cases} k = 4 \quad pour \quad s(x_1, x_2) > 0 \\ k = -4 \quad pour \quad s(x_1, x_2) < 0 \end{cases}$$

$s(x_1, x_2)$ est définie par la forme quadratique:

$$s(x_1, x_2) = x_1(0.5x_1 + x_2)$$

Dans le plan de phase, la fonction $s(x_1, x_2)$ correspond à deux droites divisant le plan en des régions où le signe de cette fonction change et donc la commande induite. La fonction $s(x_1, x_2)$ est appelée *fonction de commutation* alors que l'ensemble des points dans le plan de phase tels que $s(x_1, x_2) = 0$ est appelé *la surface de commutation*. La loi de commande, (ici un gain de retour d'état), commute donc pour chaque "traversée" de la surface de commutation et le système commandé est ainsi défini analytiquement par deux modèles différents dans deux régions du plan de phase. Le premier modèle est donnée par les équations d'état linéaires suivantes:

$$\text{région } I \qquad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -5x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

Si l'on étudie la nature du point d'équilibre de ce système avec les techniques développées dans le chapitre précédent, alors le point d'équilibre $(0,0)$ apparait être un foyer instable. Le deuxième modèle ci-dessous a pour point d'équilibre l'origine qui est, dans ce cas, un point selle.

$$\text{région } II \qquad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

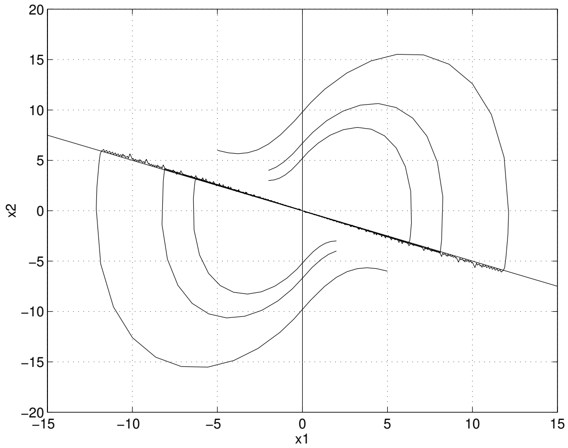


Figure 4.1 : Plan de phase

La région I est définie par $s(x_1, x_2) > 0$ alors que la région II est définie par $s(x_1, x_2) < 0$. Les allures des trajectoires de phase dans la région I et II sont donc très differentes. Si l'on désire étudier maintenant les trajectoires de phase du système global, il est nécessaire d'adjoindre à l'étude dans chacune des régions I et II, l'étude de la trajectoire du système sur la surface de glissement. La droite $x_1 = 0$ correspond à une frontière où les trajectoires d'allure différentes se joignent alors que la droite $0.5x_1 + x_2 = 0.5x_1 + \dot{x}_1 = 0$ décrit une trajectoire de phase particulière, représentant la dynamique d'ordre inférieur donnée par $0.5x_1 + \dot{x}_1 = 0$. Quand la dynamique du système est décrite de cette manière, on dit qu'il est en *mode glissant*.

Cet exemple de système de commande à structure variable montre que ce type de systèmes a en général deux modes de fonctionnement :

- Le mode non glissant, (reaching mode) ou encore mode d'accés.
- Le mode glissant, (sliding mode).

Ainsi, la trajectoire de phase, partant d'une condition initiale quelconque, atteint la surface de commutation en un temps fini, (mode non glissant), puis tend asymptotiquement vers le point d'équilibre avec une dynamique définie par le mode glissant. Quatre caractéristiques principales de ce fonctionnement sont illustrées par cet exemple:

- Puisque l'état d'équilibre du système est l'origine du plan de phase, le comportement du système en mode glissant est le comportement du système en *mode transitoire*.
- Pendant le mode glissant, les dynamiques du système sont d'ordre inférieur aux dynamiques du système original.
- Pendant le mode glissant, les dynamiques du système sont uniquement déterminées par les paramètres décrivant la droite $x_1 = 0$.
- Le mode glissant n'est intrinsèque à aucune des structures I ou II.

Il est à noter que tous les systèmes de commande à structure variable ne possèdent pas un régime glissant mais que les propriétés de celui-ci constituent une grande partie des mérites de ce type de systèmes de commande.

IV.2 Principes de la commande à structure variable en mode glissant

Après la présentation de cet exemple simple, nous allons définir plus formellement et plus rigoureusement toutes les notions introduites. Les modèles considérés dans ce mémoire sont définis par:

$$\dot{x}(t) = A(x,t) + B(x,t)u(t)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de commande avec $n > m$. La structure d'un système de commande à structure variable est définie pour chacune des composantes du vecteur de commande, u_i $(i = 1, \ldots, m)$, par:

- m fonctions de commutations représentées sous forme vectorielle par la fonction $s(x)$.
- Une commande à structure variable,

$$\begin{cases} u_i(x) = \psi_i^+(x) \quad pour \quad s_i(x) > 0 \\ \\ u_i(x) = \psi_i^-(x) \quad pour \quad s_i(x) < 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, m \end{cases}$$

  telle que la condition d'accès soit vérifiée, c'est à dire telle que la trajectoire d'état atteigne la surface de commutation $s(x) = 0$ en un temps fini.

Définition 18 *: fonction de commutation*
La structure de commande est caractérisée par le signe d'une fonction vectorielle $s(x)$ appelée **fonction de commutation**. *Dans le cas de modèles linéaires, la fonction de commutation est choisie comme une fonction linéaire de l'état:*

$$s(x) = [s_1(x)\ s_2(x) \cdots s_m(x)]' = Cx$$

où $C = [c_1\ c_2\ \cdots\ c_m]' \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et c_i' est un vecteur ligne.

Chaque fonction scalaire de commutation $s_j(x)$ décrit une surface linéaire $s_j(x) = 0$.

Définition 19 *: hyperplan de commutation*
La surface de commutation associée au système de commande à structure variable défini précédemment:

$$S_j = \{x \in \mathbb{R}^n : s_j(x) = 0\}, \qquad j = 1, \ldots, m$$

est appelée **hypersurface de glissement**.

Dans le cas de surfaces de commutation linéaires, des définitions précédentes, il est facile d'induire les conclusions suivantes:

- Un système d'ordre n avec m commandes possédera $2^m - 1$ surfaces de commutation.
- Il existe m hypersurfaces de commutation S_j de dimension $n-1$.
- L'intersection de deux surfaces de commutation S_i et S_j est une hypersurface de commutation de dimension $n-2$, $S_{ij} = S_i \bigcap S_j$.
- Il existe une hypersurface de commutation unique, intersection de toutes les m hypersurfaces de commutation, qui est de dimension $n-m$.

$$S = \bigcap_{j=1}^{m} S_j = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx = 0\} \tag{4.2}$$

En termes géométriques, le sous-espace S est le noyau de C, noté $\mathcal{N}(C)$.

Définition 20 *: régime glissant*
Si, pour tout vecteur d'état initial $x(t_0) \in S$, la trajectoire d'état reste dans l'hypersurface S, $x(t) \in S$, $\forall t > t_0$ alors $x(t)$ est un **mode glissant** *pour le système.*

Définition 21 *: surface de glissement*
Si tout point de S est tel qu'il existe des trajectoires d'état hors de S le contenant alors la surface de commutation S est appelée **surface de glissement**.

Le but d'un système de commande à structure variable est d'amener asymptotiquement l'état du système à partir d'une condition initiale quelconque $x(0) = x_0$ vers l'origine de l'espace d'état quand $t \to \infty$. Pour cela, deux modes distincts, le reaching mode et le mode de glissement, sont considérés. Dans la première phase, l'état du système, partant d'une condition initiale tend vers une surface de commutation sur laquelle il va glisser pour atteindre l'hypersurface de glissement S. Certains auteurs par abus de langage considèrent le mouvement sur une surface de commutation comme un mouvement glissant. Nous considérons le mode de glissement comme exclusivement définissant le mouvement dans l'hypersurface S, intersection de toutes les surfaces de commutation.

Ce mode de glissement est souvent qualifié d'idéal du fait qu'il requiert pour exister, une fréquence de commutation infiniment grande. De fait, tout système de commande comprend des imperfections telles que retards, hystérésis, qui imposent une fréquence de commutation finie. La trajectoire d'état oscille alors dans un voisinage de la surface de glissement, phénomène appelé **chattering** ou **broutement**.

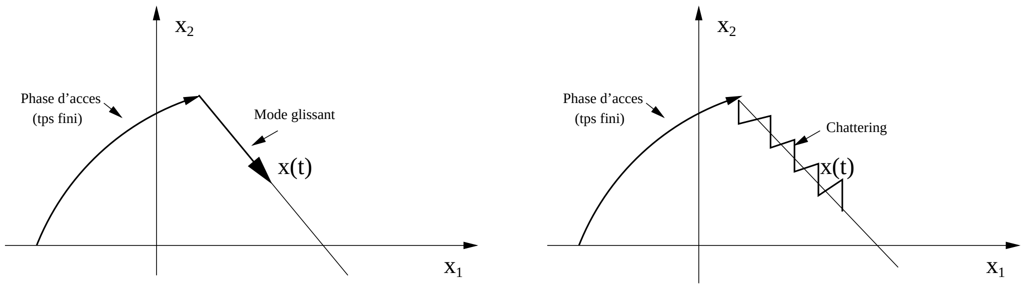


Figure 4.2 : Phénomène de chattering

De ce qui précède, on peut déduire que la synthèse d'un système de commande à structure variable se décompose en deux phases. La phase 1 consiste en la synthèse de l'hypersurface de glissement afin d'obtenir un comportement dynamique désiré en mode de glissement. La phase 2 se résume en la construction de lois de commande à commutation conduisant la trajectoire d'état sur l'hypersurface de glissement en un temps fini.

IV.3 Le régime glissant

IV.3.1 Introduction

L'étude du régime glissant d'un système de commande à structure variable sous-entend la définition et l'étude de problèmes particuliers tels que :

- Définition de conditions d'existence du régime glissant.

- Existence et unicité des solutions en régime glissant.

- Choix de la surface de glissement.

- Invariance du régime glissant vis à vis d'incertitudes paramétriques et/ou perturbations.

Dans cette section, nous développerons uniquement les trois derniers points réservant les conditions d'existence du mode de glissement à la section concernant le mode d'accés.

IV.3.2 La commande équivalente

Les systèmes de commande à structure variable sont modélisés par des équations différentielles présentant des discontinuités, (dans le second membre), du fait de la commutation de la commande. Ils ne satisfont donc pas les résultats conventionnels d'existence et d'unicité de la théorie des équations différentielles ordinaires. La question est de savoir si le système a un comportement dynamique unique quand $s(x) = 0$. Différentes méthodes de prolongement par continuité ont été proposées. Toutefois, une des approches les plus anciennes et les plus formalisées mathématiquement est la méthode développée par Filippov. Elle constitue une théorie mathématique systématique pour les équations différentielles avec discontinuités. Elle possède néanmoins l'inconvénient de s'appliquer au cas mono-entrée. Dans le cas multi-entrées, la méthode de la commande équivalente peut être considérée comme une extension formelle de cette dernière.

IV.3.2.1 Cas général

Pour développer cette technique, on considère le modèle d'état précédent,

$$\dot{x}(t) = A(x,t) + B(x,t)u(t)$$

On suppose que la trajectoire d'état atteint l'hypersurface de glissement à l'instant t_0 et qu'un mode glissant existe pour $t \geq t_0$. Cela implique

$$s(x) = 0 \quad et \quad \dot{s}(x) = 0$$

ce qui conduit après substitution de $\dot{x}$ à écrire

$$\frac{\partial s}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial s}{\partial x}[A(x,t) + B(x,t)u_{eq.}(t)] = 0$$

où $u_{eq.}(t)$ est **la commande équivalente** qui résoud l'équation. Cette commande étant supposée connue et introduite dans l'équation du modèle, on obtient alors le modèle du comportement du système sur la surface de glissement en supposant que la condition initiale $x(t_0)$ vérifie $s(x(t_0)) = 0$.
Le calcul de la commande équivalente est possible si $[\partial s/\partial x]B(x,t)$ est inversible pour tout t et x. Alors,

$$u_{eq.}(t) = -\left[\left[\frac{\partial s}{\partial x}\right] B(x,t)\right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x}A(x,t)$$

Ainsi, pour $s(x(t_0)) = 0$ donné, le modèle du système sur la surface de glissement est:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left[I - B(x,t) \left[\left[\frac{\partial s}{\partial x} \right] B(x,t) \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right] A(x,t) \\ \\ s(x) = 0 \end{cases}$$

Il est remarquable de constater que les dynamiques du système en mode glissant sont d'ordre inférieur au système original. Cette réduction d'ordre est aisément explicable par le nombre de variables d'état contraintes par la relation $s(x) = 0$.

IV.3.2.2 Cas linéaire

Un cas particulièrement important du fait de sa simplicité est celui où les dynamiques du système ainsi que la surface de glissement sont supposées ou choisies linéaires. Le modèle du système est alors:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

et la surface de glissement est:

$$s(x) = Cx \qquad C \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Si le système est en régime glissant alors:

$$s(x) = Cx(t) = 0 \qquad \forall \ t \geq t_0$$

où t_0 est le temps pour lequel le mode de glissement est atteint. En différentiant par rapport au temps et en utilisant la même démarche que précédemment, on obtient:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{\partial s}{\partial x} Ax(t) + \frac{\partial s}{\partial x} Bu(t) = 0 \\ \dot{s} &= CAx(t) + CBu(t) = 0, \quad \forall \ t \geq t_0 \end{aligned}$$

Si $|CB| \neq 0$, ce qui est assuré par les hypothèses que l'on pose en préambule, la commande équivalente $u_{eq.}$ peut être déterminée par :

$$\begin{aligned} u_{eq}(t) &= -\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} A \\ u_{eq}(t) &= Kx(t) \end{aligned}$$

où la matrice de retour d'état $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est donnée par:

$$\boxed{K = -\left(CB\right)^{-1} CA}$$

Ainsi le mouvement de glissement est décrit par l'équation du système en boucle fermée:

$$\boxed{\dot{x}(t) = A_{eq}x(t) = \left[I_n - B\left(CB\right)^{-1} C \right] Ax(t), \qquad \forall \ t > t_0}$$

L'équation en mode glissant est ainsi le résultat de la projection du membre de droite de l'équation initiale sur la variété $s(x) = 0$ avec l'opérateur de projection défini par:

$$I_n - B(CB)^{-1}C$$

Cette méthode de la commande équivalente peut être illustrée géométriquement de manière simple. La commande équivalente, étant déduite de $\dot{s} = 0$, est la commande continue remplaçant la commande discontinue telle que le vecteur d'état dérivé appartienne à la variété tangente de $s(x) = 0$.

Cette méthode formelle peut être pleinement justifiée par l'utilisation du concept de *couche limite*. La couche limite $||s(x)|| < \delta$ est définie comme un voisinage de la variété $s(x) = 0$ dans lequel la commande discontinue idéale est remplacée par une commande réelle telle que les trajectoires d'état du système restent dans la couche limite. Quand la couche limite tend vers 0, la limite de la solution de l'équation différentielle ainsi définie existe et est choisie comme la solution du système en mode glissant idéal.

IV.3.3 Synthèse de l'hypersurface de glissement

Dans cette partie, nous ne présenterons que le cas entièrement linéaire pour des raisons de simplification. Toutefois, les développements présentés ici peuvent être étendus au modèle général non linéaire de départ.

Le dernier point à aborder afin de définir parfaitement le régime de glissement concerne la synthèse de l'hypersurface de glissement. Les dynamiques pendant le régime glissant sont indépendantes de la loi de commande non linéaire réellement implantée et dépendent uniquement du choix de la matrice C, ce qui en retour détermine la matrice de "retour d'état" K de la commande équivalente. Le problème peut donc être réduit au choix de la matrice K qui peut être réalisé sans connaissance a priori du vecteur de commande réel $u(t)$. Afin de simplifier la présentation des principes d'une telle synthèse, il est souhaitable d'utiliser une forme canonique particulière.

On suppose que la matrice B est de rang plein m, si bien qu'il existe une matrice de transformation T orthogonale $n \times n$ telle que:

$$TB = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

où $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est non singulière. La contrainte d'orthogonalité est imposée sur T pour des raisons de stabilité numérique. Une méthode qui permet de déterminer T est la factorisation QU, par laquelle B est décomposée sous la forme:

$$B = Q \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonale et $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, non singulière et triangulaire supérieure. T est ainsi déterminée par permutation des lignes de Q^T. La variable d'état transformée est définie par $y = Tx$ et l'équation d'état se réécrit:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = A_{11}y_1(t) + A_{12}y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = A_{21}y_1(t) + A_{22}y_2(t) + B_2u(t) \end{cases}$$

En partitionnant l'état y comme:

$$y^T = \begin{pmatrix} y_1^T & y_2^T \end{pmatrix}, \quad y_1 \in \mathbb{R}^{n-m},\ y_2 \in \mathbb{R}^m$$

La condition de glissement devient alors:

$$C_1y_1(t) + C_2y_2(t) = 0$$

où:

$$TAT^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad CT^T = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$$

et C_2 est non singulière, (donc CB non singulière).
La condition qui définit le mode de glissement est équivalente à:

$$y_2(t) = Fy_1(t)$$

où la matrice F de dimension $m \times (n-m)$ est définie par:

$$\boxed{F = -C_2^{-1}C_1}$$

Cette équation indique que l'évolution de y_2 dans le mode de glissement est linéaire par rapport à y_1. Le mode de glissement idéal est donc gouverné par les équations:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{y}_1(t) = A_{11}y_1(t) + A_{12}y_2(t) \\ y_2(t) = Fy_1(t) \end{cases}}$$

L'ordre du système est réduit à $(n-m)$ et y_2 joue alors le rôle de commande. La commande équivalente définie comme solution du problème $\dot{s}(x) = 0$, a la forme:

$$\boxed{u_{eq}(t) = -\left(C_2B_2\right)^{-1}\left[(C_1A_{11} + C_2A_{21})x_1(t) + (C_1A_{12} + C_2A_{22})x_2(t)\right]}$$

Ce modèle détermine de manière unique les dynamiques dans le mode de glissement.

Le système en boucle fermée est donné par l'équation:

$$\dot{y}_1(t) = (A_{11} + A_{12}F)y_1(t)$$

La synthèse d'un mode de glissement stable entraine donc la détermination d'une matrice de retour d'état stabilisante F sur le système réduit, pour laquelle différentes méthodes sont possibles:

- Minimisation d'un critère quadratique, (commande optimale linéaire quadratique).
- Placement de pôles par retour d'état.

Une fois déterminée la matrice F, nous pouvons calculer la matrice C. Il est à noter que l'on dispose alors d'un certain nombre de degrés de liberté du fait de la liberté de choix sur la matrice inversible C_2. En supposant $C_2 = I_m$,

$$\boxed{C = \begin{bmatrix} F & I_m \end{bmatrix} T}$$

où T est la matrice de transformation prédéfinie.

IV.3.4 Principe d'invariance

Dans cette section, une propriété essentielle du fonctionnement en mode glissant est présentée: **l'insensibilité** ou **la robustesse** vis à vis d'une certaine classe d'erreurs de modélisation ou de perturbations. Le modèle différentiel du système en mode glissant peut ainsi être complètement indépendant d'éventuelles erreurs de modélisations ou d'éventuels perturbations. On dit alors que le système vérifie la propriété **d'invariance**. Cette propriété nécessite toutefois que certaines hypothèses appelées **matching conditions** soient vérifiées par les perturbations.
On considère un modèle linéaire donné par:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t) + f(t)$$

où ΔA et $f(t)$ sont respectivement le terme d'erreurs de modélisation et une perturbation externe.

Définition 22 *: matching conditions*
ΔA et $f(t)$ vérifient l'hypothèse des matching conditions s'il existe $\Delta\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\Delta\tilde{f} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ telles que:

$$\boxed{\Delta A = B\Delta\tilde{A} \qquad f(t) = B\Delta\tilde{f}}$$

La signification physique de cette hypothèse est que l'on considère des incertitudes de modélisation ou une perturbation attaquant le système par la matrice d'entrée. L'intérêt de considérer un tel type d'incertitudes apparaît clairement si l'on suppose vérifiée l'hypothèse suivante.

Hypothèses 4 *:*
On suppose pour la suite que

$$\mathcal{R}(B) \bigcap \mathcal{N}(C) = \emptyset$$

où $\mathcal{R}$ dénote l'espace engendré par les colonnes de B et C est la matrice définissant l'hypersurface de glissement.

Du fait que la trajectoire du système en mode glissant idéal est confinée dans $\mathcal{N}(C)$, le comportement dynamique du système n'est alors pas affecté par tout vecteur appartenant à $\mathcal{R}(B)$. Cela implique donc une invariance totale du mode glissant vis à vis d'incertitudes vérifiant les matching conditions sous réserve d'un choix adéquat des valeurs limites de la commande.

Exemple: Soit le modèle suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1+p & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

où $p \in [-10\ ,\ 1]$ est le terme incertain. L'équation précedente peut être réécrite sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [p\ p] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

montrant clairement que les matching conditions sont vérifiées.

IV.4 Le mode non glissant

Le mode préliminaire au mode glissant, partant d'une condition initiale quelconque pour atteindre la surface de glissement est appelé **mode d'accés** ou **mode non glissant**, (reaching mode en anglais). La définition complète de ce mode nécessite la définition d'une **condition d'accés** ainsi que la définition de la loi de commande non linéaire et de sa structure.

IV.4.1 Conditions d'accés

Cette condition est en fait la condition sous laquelle le mode de glissement existe et sous laquelle la trajectoire d'état va effectivement atteindre la surface de glissement en un temps fini. Deux types de conditions d'accés à la surface de glissement sont présentés.

IV.4.1.1 Approche directe

Cette approche est la plus ancienne. Elle est globale mais ne garantit pas en revanche un temps d'accés fini.

$$\boxed{\dot{s}_i(x,t)s_i(x,t) < 0 \qquad i = 1, \cdots, m}$$

Cette condition est toutefois difficile à utiliser pour faire la synthèse de la loi de commande, particulièrement dans le cas d'un système multi-entrées.

IV.4.1.2 Approche de Lyapunov

Une condition globale d'accés est donnée par:

$$\boxed{V(x,t) = \dot{s}(x,t)'s(x,t) < 0 \quad pour\ s(x,t) \neq 0}$$

Si l'on souhaite garantir un temps d'accés fini, la condition devient

$$\boxed{V(x,t) = \dot{s}(x,t)'s(x,t) < -\epsilon \quad pour\ s(x,t) \neq 0,\ \epsilon > 0}$$

Il est à noter que $V(x,t)$ est une fonction candidate de Lyapunov pour le système, (cf chapitre V). D'autres conditions d'accés que nous ne présenteront pas pour des raisons de concision existent dans la littérature spécialisée.

IV.4.2 Synthèse de la loi de commande

Lors de la synthèse de la loi de commande non linéaire, l'objectif est de satisfaire une condition d'accés. Si l'on ne souhaite pas donner une structure particulière à la loi de commande, celle-ci peut être simplement déterminée en la contraignant à satisfaire une des deux conditions précédentes. Dans certains cas, il est toutefois intéressant d'assigner une structure de commande et d'en déterminer les paramètres tout en respectant une condition d'accés. Les structures les plus utilisées sont les trois suivantes.

IV.4.2.1 La commande à relais

La forme de la commande est donnée par:

$$\boxed{\begin{aligned} u_i(x) &= \psi_i^+(x) \quad pour \quad s_i(x) > 0 \\ &= \psi_i^-(x) \quad pour \quad s_i(x) < 0 \qquad i = 1, \cdots, m \end{aligned}}$$

Les valeurs exactes de $\psi_i^+(x)$, $\psi_i^-(x)$ sont choisies afin qu'une condition d'accés soit vérifiée.

IV.4.2.2 Le retour linéaire à gains commutés

La forme de la commande est donnée par:

$$\boxed{u(x) = \psi(x)x \quad \psi = [\psi_{ij}] \in \mathbb{R}m \times n \quad \psi_{ij} = \begin{array}{lll} \alpha_{ij} & pour & s_i(x)x_j > 0 \\ \beta_{ij} & pour & s_i(x)x_j < 0 \end{array}}$$

Une fois de plus, les paramètres α_{ij}, β_{ij} sont choisis afin qu'une condition d'accés soit vérifiée.

IV.4.2.3 La commande unitaire

La forme de la commande est donnée par:

$$\boxed{u(x) = u_{eq.} + \frac{\rho}{||Cx||}Cx \qquad \rho > 0}$$

où $u_{eq.}$ est la commande équivalente issue du calcul de la surface de glissement C et ρ est une constante à déterminer afin de vérifier une condition d'accés.

IV.5 Conclusions

Bien entendu, nous n'avons pas traité dans ce chapitre tous les problèmes rencontrés dans le calcul et la mise en oeuvre d'une commande à structure variable, (élimination du broutement), ni toutes les méthodes reliées. Il faut voir ce chapitre comme une introduction sommaire à l'étude de ce type de systèmes de commande.

Les systèmes de commande à structure variable sont apparus dans les années 60 et ont longtemps souffert de la difficulté de leur mise en oeuvre pratique due principalement au phénomène de broutement et à la discontinuité de la commande. Ces problèmes étaient principalement dûs à l'inadéquation des matériels électroniques ou mécaniques dédiés à la fonction de commutation. Ces systèmes comportant des délais, des retards ou encore présentant des phénomènes d'hystérésis non négligeables, ne permettaient pas d'atteindre une fréquence de commutation suffisamment élevée.

Cet état de fait est largement dépassé du fait des avancées technologiques dans le domaine de l'électronique de puissance et particulièrement dans celui des convertisseurs de puissance. Ces technologies trouvent ainsi de nombreuses applications dans le domaine des systèmes de commande rapides.
Les applications de la commande à structure variable en mode glissant vont ainsi de la commande de robot manipulateur à dynamiques fortement couplées à la commande de moteurs électriques pour lesquels cette technique semble naturelle et particulièrement bien adaptée.

Chapitre V

Approximation de l'équivalent harmonique

Dans la littérature, on trouve également les dénominations équivalentes suivantes: méthode de linéarisation harmonique, méthode de l'équivalent harmonique, méthode du premier harmonique, describing function method. Les méthodes harmoniques ou méthodes fondées sur l'utilisation de la réponse fréquentielle ont montré leur efficacité en vue de l'analyse et de la synthèse des systèmes de commande linéaires. On substitue à la représentation temporelle par équations différentielles linéaires à coefficients constants, une représentation dans le domaine des fréquences. Les avantages en sont principalement les outils graphiques disponibles, (cf. introduction), facilitant l'analyse et la synthèse ainsi que les interprétations physiques que ces méthodes permettent de dégager.

La méthode de linéarisation harmonique est une tentative de généralisation des méthodes harmoniques classiques. Elle consiste à remplacer un élément non linéaire par un "équivalent" linéaire invariant qui constitue en quelque sorte une approximation de l'élément non linéaire donné.

Cette méthode est utilisée afin d'analyser et prévoir approximativement certains comportements non linéaires. Elle permet principalement de prévoir les cycles limites, mais également les phénomènes de saut, les sous-harmoniques ainsi que les réponses des systèmes non linéaires à des entrées sinusoidales. Dans le cadre de ce cours, nous appliquerons cette méthode pour la prévision des cycles limites ainsi qu'afin de déterminer approximativement leur amplitude et fréquence.

V.1 La méthode de linéarisation harmonique

V.1.1 Hypothèses d'application

H1- On considère uniquement les sytèmes asservis possédant un élément non linéaire dans la chaine d'asservissement (figure 5.1).

H2- L'élément non linéaire sera invariant dans le temps.

H3- Les parties linéaires dans la chaine d'asservissement sont stables et se comportent comme des filtres pass-bas, (hypothèse de filtrage).

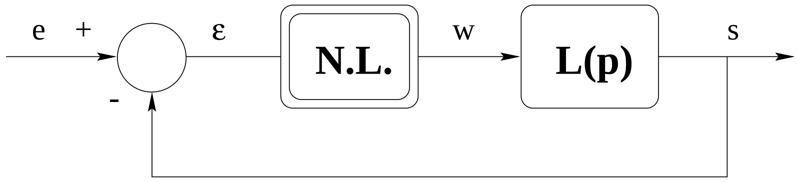
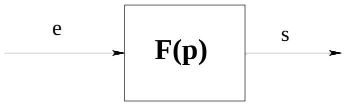


Figure 5.1 : Schéma-bloc standard

V.1.2 Equivalent harmonique

V.1.2.1 Rappel sur les systèmes linéaires

(e, s) sont respectivement les signaux d'entrées et de sortie.



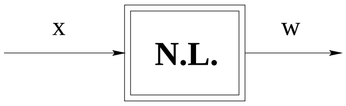
$$Si \quad e(t) = e_0 sin(\omega t) \quad alors \quad s(t) = s_0 sin(\omega t + \Phi)$$

$$L'hypoth\grave{e}se\ de\ lin\acute{e}arit\acute{e} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = A(\omega) = \frac{s_0}{e_0} \;\rightarrow\; gain\ du\ syst\grave{e}me \\ \\ \Phi = \Phi(\omega) \;\rightarrow\; phase\ du\ syst\grave{e}me \end{cases}$$

Dans le cas des systèmes linéaires, l'équivalent harmonique est défini exactement.

V.1.2.2 Cas des systèmes non linéaires

(x, w) sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie.



Pour un signal d'entrée sinusoidal, la réponse, dans la majorité des cas, est un signal périodique bien que non sinusoidal et peut donc être décomposé en séries de Fourier. $w(t)$ est une somme infinie de signaux sinusoidaux, les harmoniques.

$$Si \quad x(t) = x_1 sin(\omega t) \qquad alors \qquad w(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n sin(n\omega t + \Phi_n) + w_0$$

On ne retient que **le premier harmonique**, $w(t) \simeq w_1 sin(\omega t + \Phi_1)$.

V.1.2.3 Justification de l'approximation à travers un exemple

Cette justification repose essentiellement sur le filtrage des hautes fréquences par l'étage linéaire en cascade, (filtrage des harmoniques supérieures). Ici, $L(p) = KG(p)$ et la non linéarité est du type tout ou rien avec saturation représentée à la figure 5.2.

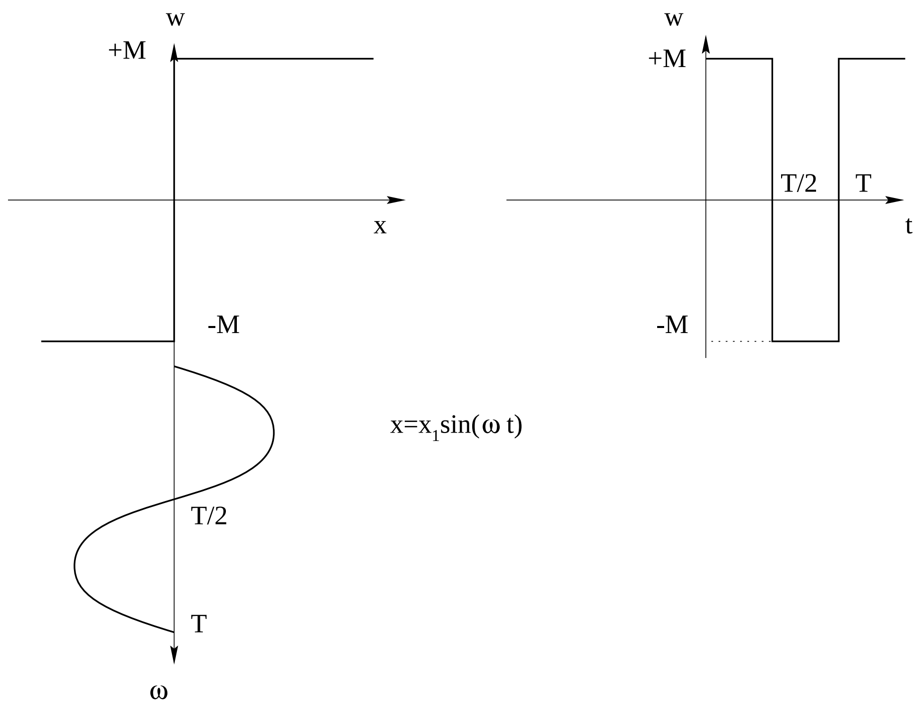


Figure 5.2 : Non linéarité tout ou rien avec saturation

Etude de l'organe non linéaire:

La réponse harmonique est donnée par le développement en séries de Fourier:

$$w(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n sin(n\omega t + \Phi_n) + w_0$$

Dans ce cas, du fait de la symétrie du signal $w(t)$, $w_0 = 0$.
L'amplitude des différents harmoniques est alors donée par:

- Harmonique 1 : $w_1 = \frac{4M}{\pi x_1}$
- Harmonique 2 : $w_2 = 0$
- Harmonique 3 : $w_3 = \frac{4M}{3\pi x_1}$

Etude de l'élément linéaire:
On a choisi un élément linéaire composé d'un intégrateur et d'un premier ordre donné par sa constante de temps τ.

$$KG(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)} \qquad |KG(j\omega)| = \frac{K}{\omega\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

D'après le principe de superposition, on peut ecrire $s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(t)$.

$$\frac{|s_1|}{|w_1|} = \frac{k}{\omega\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \qquad et \qquad \frac{|s_3|}{|w_3|} = \frac{k}{3\omega\sqrt{1+9\tau^2\omega^2}}$$

d'où

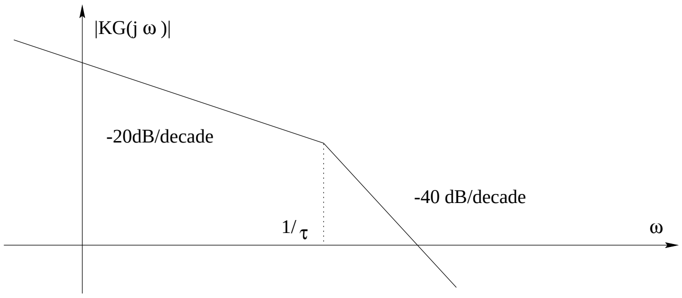


Figure 5.3 : Diagramme de Bode de l'élément linéaire

$$\boxed{\frac{s_3}{s_1} \simeq 1/27 \simeq 3\%}$$

La contribution de l'harmonique immédiatement supérieur au fondamental peut donc être négligée.

V.1.3 Fonction de transfert généralisée

On considère un organe non linéaire quelconque à l'entrée duquel on applique un signal sinusoidal d'amplitude x_1 et de fréquence $\frac{\omega}{2\pi} = f$, $x(t) = x_1 sin(\omega t)$. Comme nous l'avons vu précédemment, une fois le régime transitoire achevé, le signal de sortie de l'élément non linéaire est en général une fonction périodique symétrique pouvant être décomposée en série de Fourier:

$$w(t) = w_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n sin(n\omega t) + b_n cos(n\omega t) = w_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n sin(n\omega t + \Phi_n)$$

où les coefficients de Fourier sont donnés par:

$$\boxed{\begin{aligned} w_0 &= \tfrac{\omega}{\pi} \int_0^T w(t)dt \\ a_n &= \tfrac{\omega}{\pi} \int_0^T w(t)sin(n\omega t)dt \\ b_n &= \tfrac{\omega}{\pi} \int_0^T w(t)cos(n\omega t)dt \end{aligned}}$$

Remarques:

1- Pour $n = 1$, le signal sinusoidal est appelé **signal fondamental**, alors que pour $n > 1$, on parlera des **harmoniques supérieures**.

2- En général, le signal de sortie est périodique de même période que le signal d'entrée sauf dans certains cas, (résonance sous-harmonique, oscillations propres, non périodicité).

3- Pour les non linéarités impaires, $(w(t) = -w(-t) \ \ \forall t)$, $b_n = 0$ alors que pour les non linéarités paires, $(w(t) = w(-t) \ \ \forall t)$, $a_n = 0$.

V.1.3.1 Approximation du premier harmonique

L'hypothèse de l'équivalent harmonique permet de substituer au signal global $w(t)$, un signal équivalent composé uniquement du signal fondamental ou premier harmonique. Cette approximation de l'équivalent harmonique est appelée également approximation de Dutilh.

$$\boxed{\begin{array}{l} w(t) \simeq a_1 sin(\omega t) + b_1 cos(\omega t) \\ \\ a_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T w(t) sin(\omega t) dt \\ \\ b_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T w(t) cos(\omega t) dt \end{array}}$$

Ce qui permet d'écrire:

$$w(t) = a_1 sin(\omega t) + b_1 cos(\omega t) = \frac{\overbrace{a_1}^{q(x_1,\omega)}}{x_1} x_1 sin(\omega t) + \frac{\overbrace{b_1}^{q'(x_1,\omega)}}{x_1} x_1 cos(\omega t)$$

$$w(t) = q(x_1, \omega) x(t) + q'(x_1, \omega) \frac{1}{\omega} \frac{dx(t)}{dt}$$

que l'on peut réécrire sous la forme:

$$w(t) = x_1 B(x_1, \omega) sin(\omega t + \Phi)$$

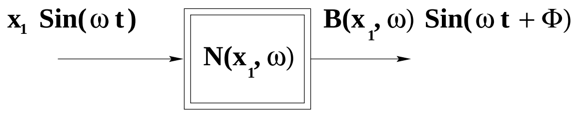
$$\boxed{\begin{array}{ll} \overbrace{B(x_1, \omega)}^{Module} = \sqrt{q^2 + q'^2} & \overbrace{\Phi}^{Phase} = Arctg[\frac{q'}{q}] \\ \\ q(x_1, \omega) = \frac{\omega}{x_1 \pi} \int_0^T w(t) sin(\omega t) dt & q'(x_1, \omega) = \dfrac{\omega}{x_1 \pi} \int_0^T w(t) cos(\omega t) dt \end{array}}$$

La composante fondamentale du signal $w(t)$ correspondant à une entrée sinusoidale est une sinusoide de même fréquence. En représentation complexe, cette sinusoide peut être représentée par:

$$W = B(x_1, \omega) x_1 e^{j(\omega t + \Phi)}$$

Ainsi, de manière équivalente au concept de réponse fréquentielle dans le cas linéaire, qui n'est rien d'autre que le rapport fréquentiel entre l'entrée sinusoidale et la sortie sinusoidale du système, il est possible de définir **la fonction de transfert généralisée** de l'élément non linéaire comme étant le rapport complexe de la composante fondamentale sur l'entrée sinusoidale:

$$N(x_1, \omega) = B(x_1, \omega) e^{j\Phi(x_1, \omega)} = \frac{x_1 B(x_1, \omega) e^{j(\omega t + \Phi)}}{x_1 e^{j\omega t}}$$



La fonction de transfert généralisée représente la réponse fréquentielle de l'élément non linéaire.

A l'inverse du cas linéaire, la fonction de transfert généralisée dépend conjointement de l'amplitude et de la fréquence du signal sinusoidal d'entrée. Le fait de passer à une telle représentation est également appelé **quasi-linéarisation** de l'élément non linéaire.

Cas particulier important:
Dans le cas d'une non linéarité statique, la fonction de transfert généralisée $N(x_1, \omega)$ est indépendante de la fréquence :

$$\boxed{N(x_1) = B(x_1)e^{j\Phi(x_1)}}$$

Exemples:
Seuils, saturations, hystérésis, tout ou rien et combinaisons des précédentes.
Dans la suite de ce cours, nous ne considérerons que les non linéarités vérifiant cette hypothèse.

V.1.3.2 Représentation graphique: lieu critique

Plutôt que de tracer directement dans le plan de Nyquist ou Black, le lieu des points $N(x_1)$, on trace **le lieu critique** qui est le lieu des points complexes donnés par:

$$\boxed{C(x_1) = \frac{-1}{N(x_1)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} module \;\; 1/B(x_1) \\ \\ argument \;\; \pi - \Phi(x_1) \end{array} \right.}$$

Remarque:

- En linéaire, il est nécessaire de connaitre $(A(\omega),\ \Phi(\omega))$, c'est à dire la réponse fréquentielle du système que l'on peut tracer dans Bode, Black, Nyquist, pour caractériser complêtement le système asservi.

- En non linéaire, dans le cadre de l'approximation du premier harmonique, le système asservi est complètement caractérisé par :

  - le lieu de réponse en fréquence de l'élément linéaire,

  - le lieu critique de l'organe non linéaire.

V.1.4 Calcul de la fonction de transfert généralisée

Différentes méthodes peuvent être utilisées afin de déterminer la fonction de transfert généralisée d'un élément non linéaire. Quand la caractéristique de la non linéarité $w = f(x)$ est connue analytiquement et si l'intégration entrant dans le calcul des coefficients de Fourier peut être menée facilement, une évaluation **analytique** de la fonction de transfert généralisée peut être calculée. C'est le cas notamment des non linéarités que nous examinerons par la suite. Dans d'autre cas, la caractéristique de la non linéarité peut être donnée par un graphe ou une table. La fonction de transfert généralisée peut alors être évaluée par **intégration numérique**. On obtient dans ce cas directement un graphique représentant la fonction de transfert généralisée.

Finalement, dans le cas de non linéarités complexes, il peut être nécessaire d'utiliser une évaluation expérimentale en excitant la non linéarité par une entrée sinusoidale d'amplitude et de fréquence donnée. La fonction de transfert généralisée est alors obtenue en utilisant un analyseur harmonique. Dans le cas non linéaire, il est nécessaire de faire varier non seulement la fréquence du signal d'entrée comme en linéaire mais également l'amplitude, conduisant à un ensemble de courbes dans le plan complexe, décrivant $N(x_1, \omega)$.

Nous présentons maintenant quelques calculs de fonction de transfert généralisées associées à des non linéarités usuelles.

V.1.4.1 Tout ou rien avec saturation

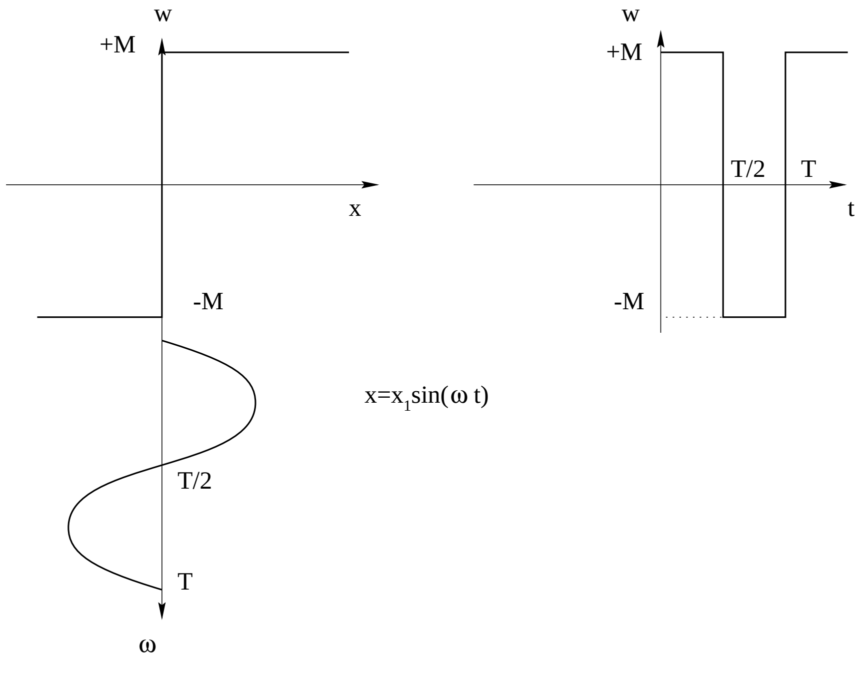


Figure 5.4 : Non linéarité tout ou rien

- non linéarité symétrique/axe des abscisses et impaire:

$$w_0 = 0 \quad q'(x_1, \omega) = 0$$

- non linéarité statique:

$$N(x_1, \omega) = N(x_1)$$

d'où l'on effectue les calculs suivants:

$$N(x_1) = B(x_1)e^{j\Phi(x_1)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} B(x_1) = \sqrt{q^2 + q'^2} = q(x_1) \\ \\ \Phi(x_1) = arctg[\frac{q'}{q}] = 0 \end{array} \right.$$

<u>Calcul de $q(x_1)$:</u>

$$q(x_1) = \frac{\omega}{\pi x_1} \int_0^T w(t) sin(\omega t) dt = \frac{\omega M}{\pi x_1} \left[\int_0^{T/2} sin(\omega t) dt - \int_{T/2}^T sin(\omega t) dt \right]$$

$$q(x_1) = \frac{M}{\pi x_1} \left\{ [-cos(\omega t)]_0^{T/2} + [cos(\omega t)]_{T/2}^T \right\} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\boxed{N(x_1) = \frac{4M}{\pi x_1}}$$

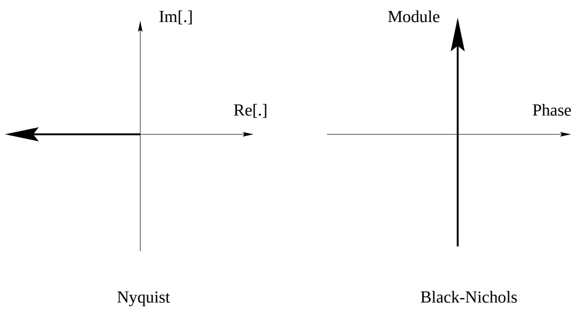


Figure 5.5 : Non linéarité tout ou rien

<u>Lieu critique :</u>

$$C(x_1) = \frac{-1}{N(x_1)} = \frac{-\pi x_1}{4M}$$

V.1.4.2 Tout ou rien avec zone morte et saturation

- non linéarité symétrique/axe des abscisses et impaire:

$$w_0 = 0 \qquad q'(x_1, \omega) = 0$$

- non linéarité statique:

$$N(x_1, \omega) = N(x_1)$$

<u>Remarque:</u>

- $q(x_1) = \frac{\omega}{\pi x_1} \int_0^T w(t) sin(\omega t) dt = \frac{1}{\pi x_1} \int_0^{2\pi} w(\omega t) sin(\omega t) d(\omega t)$

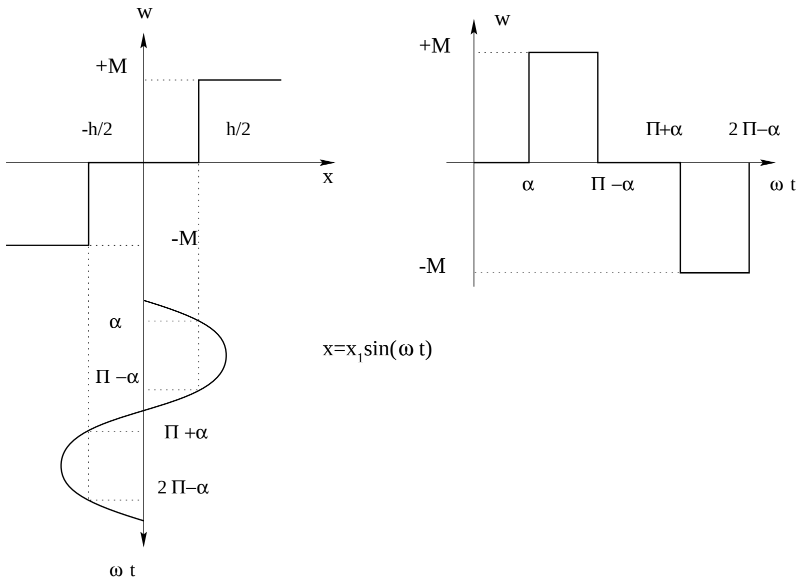


Figure 5.6 : Non linéarité avec zone morte

- $q(x_1)' = \frac{\omega}{\pi x_1} \int_0^T w(t)cos(\omega t)dt = \dfrac{1}{\pi x_1} \int_0^{2\pi} w(\omega t)cos(\omega t)d(\omega t)$

d'où l'on effectue les calculs suivants:

$$N(x_1) = B(x_1)e^{j\Phi(x_1)} \qquad avec \qquad \begin{cases} B(x_1) = \sqrt{q^2 + q'^2} = q(x_1) \\ \\ \Phi(x_1) = Arctg\left[\frac{q'}{q}\right] = 0 \end{cases}$$

<u>Calcul de $q(x_1)$:</u>

$$q(x_1) = \frac{1}{\pi x_1} \int_0^{2\pi} w(\omega t)sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{M}{\pi x_1}\left[\int_\alpha^{\pi-\alpha} sin(\omega t)d(\omega t) - \int_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} sin(\omega t)d(\omega t)\right]$$

$$q(x_1) = \frac{M}{\pi x_1}\left\{[-cos(\omega t)]_\alpha^{\pi-\alpha} + [cos(\omega t)]_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha}\right\}$$

$$q(x_1) = \frac{4M}{\pi x_1}cos(\alpha)$$

<u>Calcul de $cos(\alpha)$:</u>

$$x_1 sin(\alpha) = \frac{h}{2} \qquad sin(\alpha) = \frac{h}{2x_1} \qquad cos(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{h^2}{4x_1^2}}$$

Soit

$$\boxed{N(x_1) = \frac{4M}{\pi x_1}\sqrt{1 - \frac{h^2}{4x_1^2}}}$$

<u>Nota:</u> cette formule est vraie pour $x_1 > \frac{h}{2}$.

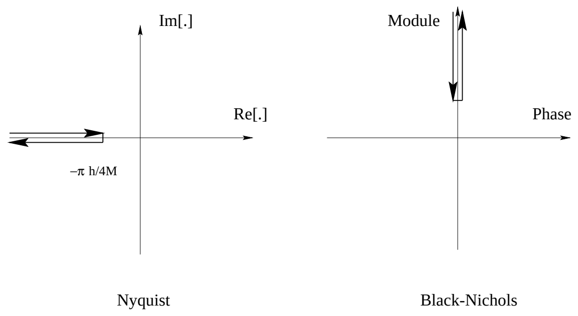


Figure 5.7 : Non linéarité avec zone morte

Lieu critique : figure 5.7

$$C(x_1) = \frac{-1}{N(x_1)} = \frac{-\pi x_1^2}{2M\sqrt{4x_1^2 - h^2}}$$

qui est une fonction réelle toujours négative.

$$\left[\begin{array}{ccc} C(x_1) & \underset{x_1 \to 0}{\longrightarrow} & -\infty \\ & & \\ C(x_1) & \underset{x_1 \to +\infty}{\longrightarrow} & -\infty \end{array}\right. \qquad \frac{dC(x_1)}{dx_1} = \frac{-\pi x_1[2x_1^2 - h^2]}{M(4x_1^2 - h^2)\sqrt{4x_1^2 - h^2}}$$

Le point annulant cette dérivée est donnée par $x_1^* = \frac{h}{\sqrt{2}}$, ce qui donne $C(x_1^*) = \frac{-\pi h}{4M}$.

V.1.4.3 Elément avec hystérésis

- non linéarité ni paire ni impaire mais symétrique / axe des abscisses.

$$w_0 = 0$$

- non linéarité statique :

$$N(x_1, \omega) = N(x_1)$$

$$B(x_1) = \sqrt{q^2 + q'^2}$$

$$\Phi(x_1) = arctg[\tfrac{q'}{q}]$$

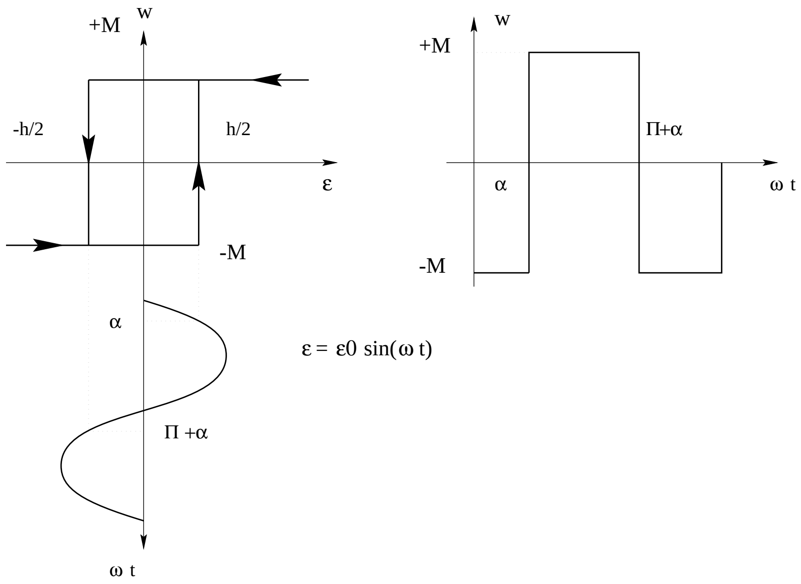


Figure 5.8 : Non linéarité avec hystérésis

Calcul de $q(x_1)$ et de $q'(x_1)$:

- $$\begin{aligned} q(x_1) &= \frac{1}{\pi x_1}\int_0^{2\pi} w(\omega t) sin(\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{M}{\pi x_1}\left[-\int_0^{\alpha} sin(\omega t)d(\omega t) + \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} sin(\omega t)d(\omega t) - \int_{\pi+\alpha}^{2\pi} sin(\omega t)d(\omega t)\right] \\ &= \frac{M}{\pi x_1}\left[[cos(\omega t)]_0^{\alpha} - [cos(\omega t)]_{\alpha}^{\pi+\alpha} + [cos(\omega t)]_{\pi+\alpha}^{2\pi}\right] \\ &= \frac{4M cos(\alpha)}{\pi x_1} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} q'(x_1) &= \frac{1}{\pi x_1}\int_0^{2\pi} w(\omega t) cos(\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{M}{\pi x_1}\left[-\int_0^{\alpha} cos(\omega t)d(\omega t) + \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} cos(\omega t)d(\omega t) - \int_{\pi+\alpha}^{2\pi} cos(\omega t)d(\omega t)\right] \\ &= \frac{M}{\pi x_1}\left[[-sin(\omega t)]_0^{\alpha} + [sin(\omega t)]_{\alpha}^{\pi-\alpha} + [sin(\omega t)]_{\pi+\alpha}^{2\pi}\right] \\ &= \frac{-4M sin(\alpha)}{\pi x_1} \end{aligned}$$

Calcul de $cos(\alpha)$ et de $sin(\alpha)$:

$$x_1 sin(\alpha) = \frac{h}{2} \qquad sin(\alpha) = \frac{h}{2x_1} \qquad cos(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{h^2}{4x_1^2}}$$

On obtient donc:

$$B(x_1) = \frac{4M}{\pi x_1}$$

$$\Phi(x_1) = -arcsin(\frac{h}{2x_1})$$

Soit

$$\boxed{N(x_1) = \frac{4M}{\pi x_1}\left[cos(\alpha) - jsin(\alpha)\right]}$$

Nota: cette formule est vraie pour $x_1 > \frac{h}{2}$.

Lieu critique : figure 5.9

$$C(x_1) = \frac{-1}{N(x_1)} = \frac{-\pi x_1}{4M}\sqrt{1 - \frac{h^2}{4x_1^2}} - j\frac{\pi h}{8M}$$

$$C(x_1) = -\frac{\pi x_1}{4M}e^{j\alpha} \qquad \alpha = arcsin[\frac{h}{2x_1}]$$

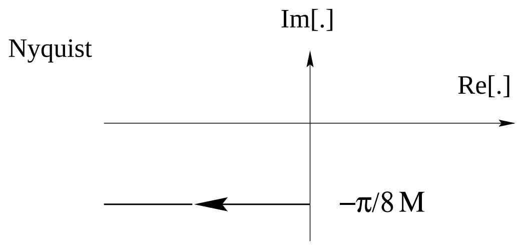


Figure 5.9 : Hystérésis

Le lieu critique $C(x_1)$ est défini par:

$$\begin{cases} Module = \frac{\pi x_1}{4M} \\ Argument = arcsin[\frac{h}{2x_1}] + \pi \end{cases}$$

V.1.4.4 Elément linéaire saturé

- non linéarité impaire et symétrie / axe des abscisses.

$$w_0 = 0 \qquad q'(x_1) = 0$$

- non linéarité statique :

$$N(x_1, \omega) = N(x_1) = B(x_1)$$

Calcul de $q(x_1)$:
pour $x_1 > x_M$

$$q(x_1) = \frac{4}{\pi x_1}\int_0^{\pi/2} w(\omega t)sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{4k}{\pi x_1}\left[\int_0^{\alpha} kx_1 sin^2(\omega t)d(\omega t) + \int_{\alpha}^{\pi/2} kx_M sin(\omega t)d(\omega t)\right]$$

$$q(x_1) = \frac{4k}{\pi x_1}\left[-x_M\left[cos(\omega t)\right]_{\alpha}^{\pi/2} + x_1\int_0^{\alpha}\frac{[1 - cos(2\omega t)]}{2}d(\omega t)\right]$$

$$q(x_1) = \frac{4k}{\pi x_1}\left[\frac{x_M cos(\alpha)}{2} + \frac{x_1\alpha}{2}\right]$$

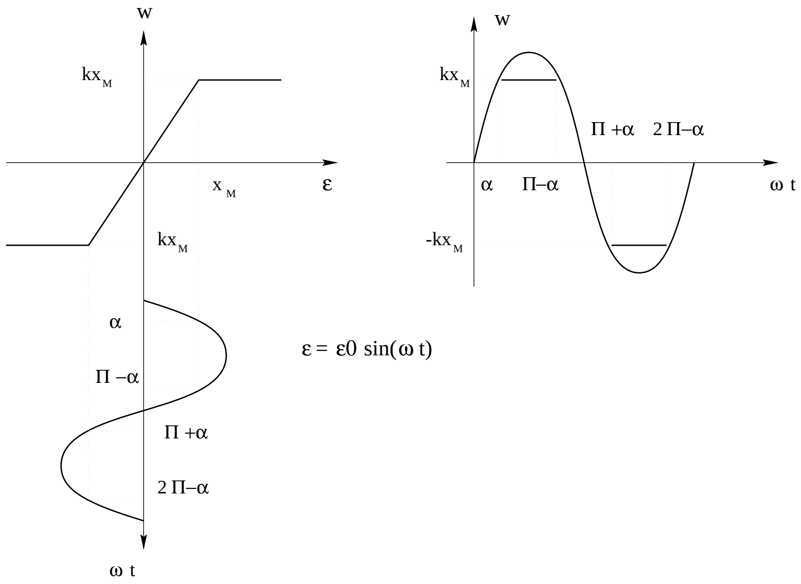


Figure 5.10 : Elément linéaire saturé

Calcul de $cos(\alpha)$ et de $sin(\alpha)$:

$$x_1 sin(\alpha) = x_M \qquad sin(\alpha) = \frac{x_M}{x_1} \qquad cos(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{x_M^2}{x_1^2}}$$

On obtient donc:

$$\boxed{N(x_1) = \frac{2k}{\pi x_1}\left[x_1 Arcsin[\frac{x_M}{x_1}] + x_M\sqrt{1 - \frac{x_M^2}{x_1^2}}\right]}$$

Nota: pour $x_1 < x_M$, on a $N(x_1) = k$.

Lieu critique : figure 5.11

$$C(x_1) = \frac{-1}{N(x_1)} = \frac{-\pi x_1}{2k}\left[x_1 arcsin[\frac{x_M}{x_1}] + x_M\sqrt{1 - \frac{x_M^2}{x_1^2}}\right]$$

Nota : $C(x_1)$ est réel et toujours négatif.

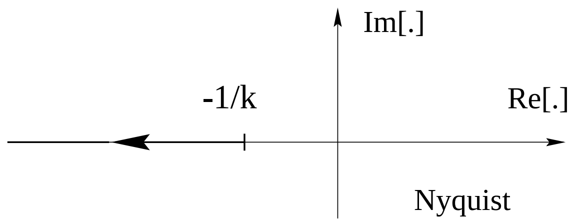


Figure 5.11 : Linéarité saturée

limites:

$$\left[\begin{array}{lcl} C(x_1) & \underset{x_1 \to x_M}{\longrightarrow} & -1/k \\ & & \\ C(x_1) & \underset{x_1 \to +\infty}{\longrightarrow} & -\infty \end{array}\right.$$

V.2 Cycles limites et méthodes du premier harmonique

Comme il est mentionné en introduction de ce chapitre, la méthode du premier harmonique peut être utilisée afin de prévoir l'existence de cycles limites dans les asservissements comportant un élément non linéaire et d'en déterminer approximativement l'amplitude et la fréquence. Le principe est fondé sur une utilisation généralisée du critère du revers, lui même version simplifiée du critère de nyquist, développé dans le cadre des asservissements linéaires.

V.2.1 Rappels sur le critère du revers

Soit l'asservissement linéaire de la figure 5.12, où $G(p)$, la fonction de transfert en boucle ouverte, (B.O.), est donnée par $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$.

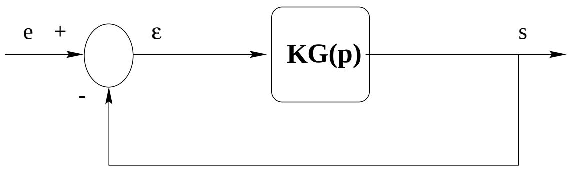


Figure 5.12 : Asservissement linéaire

La fonction de transfert en boucle fermée , (B.F.), s'écrit $H_{B.F.}(p) = \frac{KG(p)}{1+KG(p)} = \frac{KN(p)}{D(p)+KN(p)}$.

Définition 23 : *Stabilité*
L'asservissement ci-dessus est stable si le polynôme caractéristique du système asservi, (dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée), a des racines, (pôles de la fonction de transfert), à partie réelle négative.

Théorème 8 : *Critère du revers*
Le système est stable si le lieu de Nyquist, (resp. Black), de $G(j\omega)$, (fonction de transfert en boucle ouverte), parcouru dans le sens des ω croissants, laisse à gauche, (resp. à droite), le point critique -1/K.

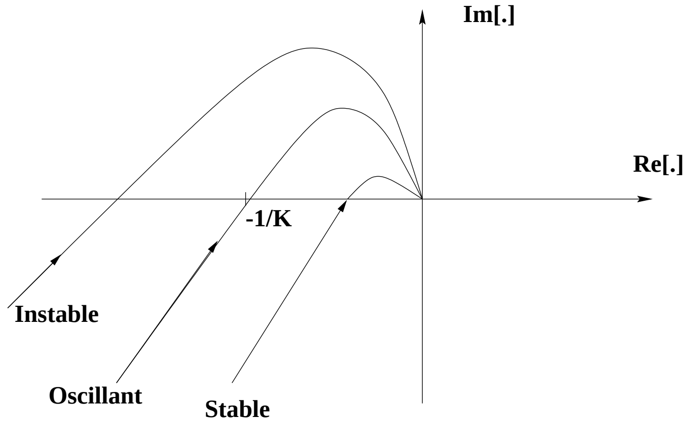


Figure 5.13 : Critère du revers dans le plan de Nyquist

Nota :

- Ce critère ne s'applique qu'aux **systèmes stables** et à **minimum de phase** en boucle ouverte.
- Le polynôme caractéristique s'écrit $1 + KG(p) = 0$.

V.2.2 Extension au cas des asservissements non linéaires

Nous donnons tout d'abord la définition d'un cycle limite.

Définition 24 *: Cycle limite*
Les systèmes non linéaires peuvent être le siège d'oscillations d'amplitude et de fréquence fixées, indépendantes des conditions initiales et sans excitation extérieure, (auto-oscillations) dénommées **cycles limites**.

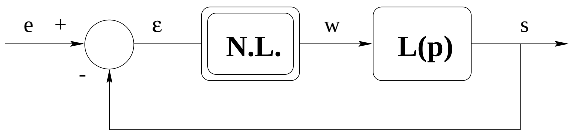


Figure 5.14 : Schéma-bloc standard

Conditions d'existence:
Supposons que le système non linéaire asservi précédent soit le siège d'une oscillation d'amplitude ϵ_1 et de pulsation ω_0, avec $e \equiv 0$, et $\epsilon = \epsilon_1 sin(\omega_0 t)$, alors

$$\begin{cases} \epsilon(t) = -s(t) \\ W = N(\epsilon_1)\epsilon \\ S = L(j\omega_0)W \end{cases} \longrightarrow \qquad S[1 + L(j\omega_0)N(\epsilon_1)] = 0$$

Comme $S \not\equiv 0$ alors $1 + L(j\omega_0)N(\epsilon_1) = 0$. Le cycle limite est alors caractérisé par son amplitude ϵ_1 et sa pulsation ω_0 qui doivent vérifier la condition d'existence:

$$\boxed{L(j\omega_0) = \frac{-1}{N(\epsilon_1)}}$$

La relation précédente est équivalente à deux équations non linéaires, (une pour la partie réelle et une pour la partie imaginaire), algébriques en les deux variables (ϵ_1, ω). Ces deux équations sont généralement difficiles à résoudre analytiquement, ce qui a entrainé la recherche de méthodes graphiques.
L'asservissement considéré a une fonction de transfert généralisée en boucle ouverte.

$$\frac{S}{\epsilon} = N(\epsilon_1)L(j\omega)$$

Pour ϵ_1 fixé, $N(\epsilon_1)$ est un nombre fixé, (qui peut être complexe dans le cas d'un cycle d'hystérésis). L'asservissement peut donc être considéré comme linéaire de fonction de transfert en boucle ouverte $N(\epsilon_1)L(p)$, ($N(\epsilon_1)$ étant considéré comme un gain fixe), auquel on peut appliquer le critère du revers par rapport au point critique $\frac{-1}{N(\epsilon_1)}$.

Quand ϵ_1 varie, $\frac{-1}{N(\epsilon_1)}$ parcourt le lieu critique, donc à l'amplitude ϵ_1, la stabilité du système va dépendre de la position de ce point par rapport au lieu $L(j\omega)$. Le lieu critique se trouve ainsi partagé en régions d'amplitude de stabilité et en régions d'amplitude d'instabilité, (importance des points d'intersection entre le lieu critique et le lieu de transfert).

<u>Nota:</u>
la différence avec les systèmes linéaires est qu'un asservissement non linéaire est stable ou instable <u>à l'amplitude ϵ_1</u>.

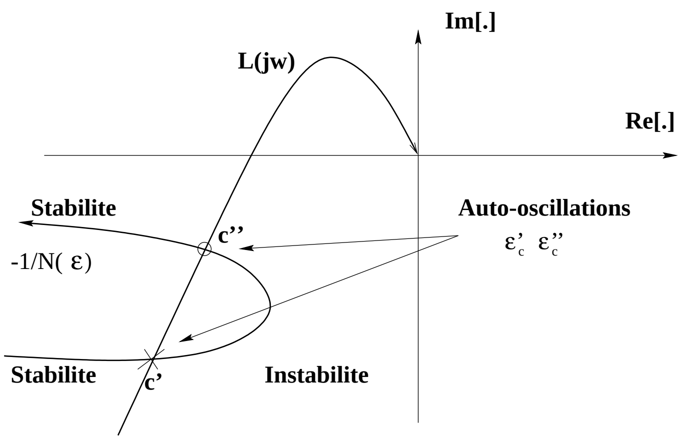


Figure 5.15 : Lieu de Nyquist

<u>Pour $\epsilon_1 < \epsilon'_c$,</u> stabilité, les auto-oscillations vont décroitre.

<u>Pour $\epsilon'_c < \epsilon_1 < \epsilon''_c$,</u> instabilité, les auto-oscillations vont croitre, $\epsilon_1 \nearrow \epsilon''_c$.

<u>Pour $\epsilon''_c < \epsilon_1$,</u> stabilité, les auto-oscillations vont décroitre, $\epsilon_1 \searrow \epsilon''_c$.

d'où l'on peut déduire

- la notion d'auto-oscillations stables et instables.

- la notion d'oscillations limites de stabilité.

<u>Conclusions :</u>

1- Une *oscillation limite instable* n'apparait pas physiquement en tant qu'oscillation du système mais constitue une frontière de stabilité.

   - Pour des amplitudes supérieures, le système diverge et tend vers une oscillation limite stable de plus grande amplitude.
   - Pour des amplitudes inférieures, il revient à l'état d'équilibre ou vers une oscillation limite stable de plus faible amplitude.

2- Une oscillation limite stable apparait physiquement.

Il est important, afin de comprendre le fonctionnement du système de trouver ses solutions périodiques et d'étudier leur stabilité. La méthode est donc la suivante:

1- Pour trouver les oscillations limites

$$\textbf{Lieu critique} \bigcap \textbf{Lieu de transfert}$$

2- Pour déterminer leur stabilité

Critère de Loeb

V.2.3 Etude des auto-oscillations et de leur stabilité

Cette étude se fait de manière systématique à l'aide d'un critère géométrique ayant sa contre-partie algébrique.

Théorème 9 *: Critère de Loeb - géométrique*
Soit une oscillation limite obtenue comme intersection du lieu de transfert $L(j\omega)$ et du lieu critique $\frac{-1}{N(\epsilon_1)}$, possédant une pulsation $\omega = \omega_0$ rd/s et une amplitude $\epsilon_1 = \epsilon_0$. Cette oscillation est stable si l'intersection est telle que, en parcourant le lieu de Nyquist $L(j\omega)$ dans le sens des fréquences croissantes, on laisse à sa gauche la direction des ϵ_1 croissants sur le lieu critique.

Théorème 10 *: Critère de Loeb - algébrique*
Soit une oscillation limite obtenue comme intersection du lieu de transfert $L(j\omega)$ et du lieu critique $\frac{-1}{N(\epsilon_1)}$, possédant une pulsation $\omega = \omega_0$ rd/s et une amplitude $\epsilon_1 = \epsilon_0$, racines de l'équation complexe:

$$L(j\omega)N(\epsilon_1) + 1 = 0$$

Séparant les parties réelles et imaginaires dans cette équation

$$X(\omega, \epsilon_1) + jY(\omega, \epsilon_1) = 0$$

L'oscillation sera stable si la condition suivante est vérifiée :

$$\left[\frac{\partial X}{\partial \epsilon_1}\frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial Y}{\partial \epsilon_1}\frac{\partial X}{\partial \omega}\right]_{(\epsilon_0,\omega_0)} > 0$$

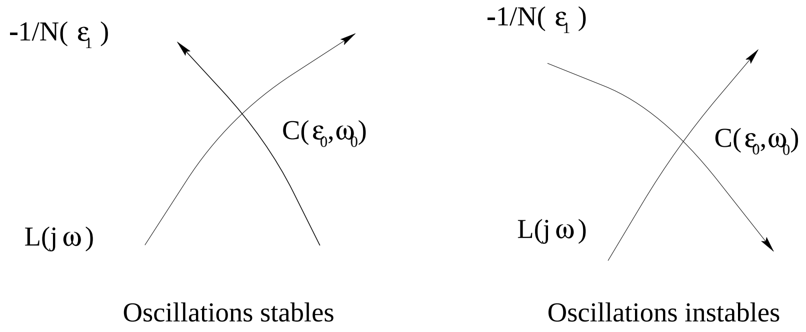


Figure 5.16 : Critère de Loeb

V.2.4 Exemples d'application

Auto-oscillation stable d'un système par plus ou moins

Soit l'asservissement non linéaire donné à la figure 5.17 dont l'élément non linéaire est constitué d'un tout ou rien avec seuil plus hystérésis.

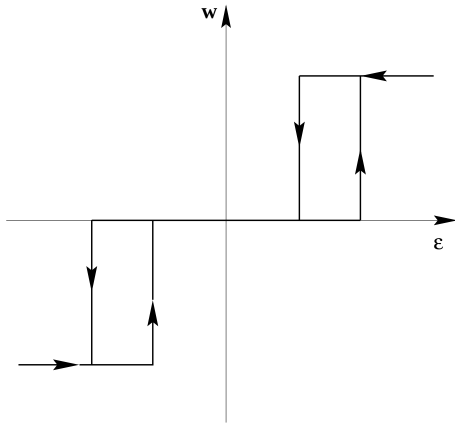


Figure 5.17 : Non linéarité avec hystérésis

Cet asservissement est caractérisé dans le plan de Nyquist par son lieu critique et par son lieu de transfert représenté à la figure 5.18, d'où l'on peut déduire par application du critère de Loeb que l'on a une oscillation limite stable.

Remarques:

- L'augmentation de la zone morte du relais déplace le lieu critique vers la gauche, d'où la disparition de l'oscillation libre stable.

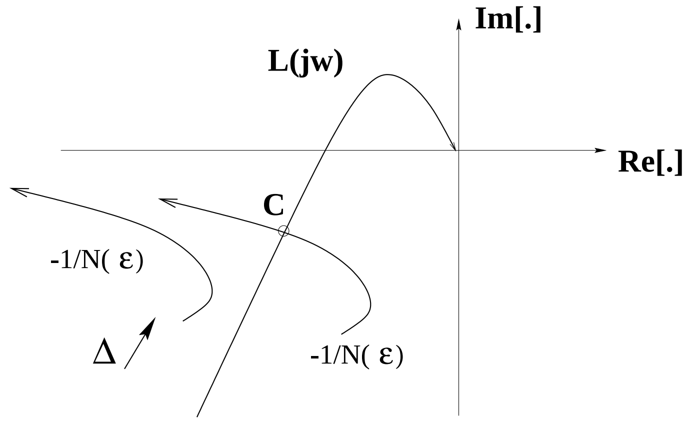


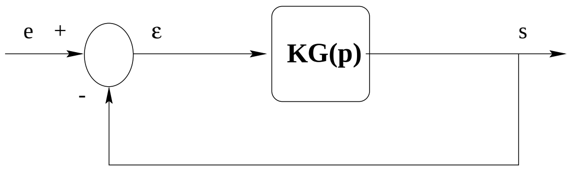
Figure 5.18 : Lieu de Nyquist

- La présence d'hystérésis diminue la fréquence et augmente l'amplitude de l'oscillation libre.

Conclusions:
Cette oscillation libre d'un système à relais se produit ordinairement à hautes fréquences et possède une petite amplitude. Cela entraine une vibration du système autour de sa position d'équilibre qui peut être génante. Il est possible de la faire disparaitre en agissant sur l'organe non linéaire, (augmentation du seuil), ou sur l'organe linéaire par l'utilisation d'un réseau correcteur.

Auto-oscillations stables d'un système linéaire saturé : pompage

Considérons le système asservi linéaire donné à la figure ci-dessous. Lorsque l'on augmente le gain statique, généralement, le système se déstabilise et devient le siège d'une oscillation de grande amplitude fixe à la fréquence telle que $Arg[KG(j\omega)] = \pi$, c'est **le phénomène de pompage**, que la théorie linéaire ne peut expliquer.



Ceci peut être expliqué en introduisant dans le modèle linéaire un organe non linéaire de type saturation, conduisant à tracer un lieu critique équivalent à celui de la figure 5.11. En traçant le lieu de transfert de l'élément linéaire, il y aura intersection entre les deux courbes pour une valeur de $K = K_{lim}$, soit en appliquant le critère de Loeb, une auto-oscillation stable. Le système tend, en toutes circonstances vers une auto-oscillation stable. L'amplitude de cette auto-oscillation est fixe, totalement déterminée par l'intersection entre le lieu de transfert et le lieu critique (figure 5.19). Elle diffère ainsi d'une oscillation libre d'un système linéaire juste oscillant, extrêmement sensible aux variations de paramètres.

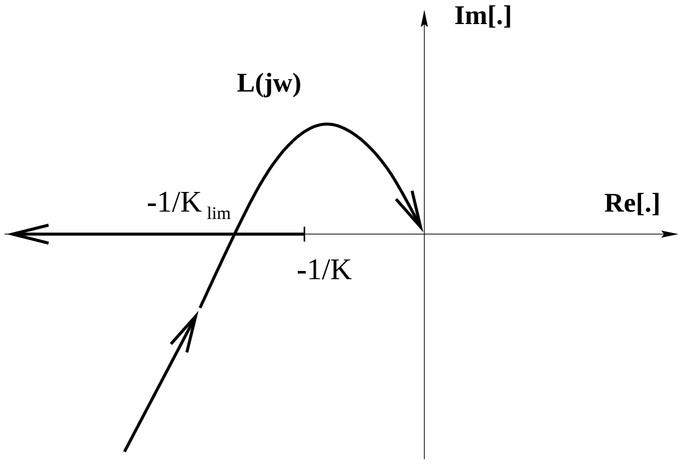


Figure 5.19 : Phénomène de pompage

Annexe A

Recueil d'exercices

Exercice 1
Soit le système asservi non linéaire donné par la figure 1.1 avec $L(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$ et $w = \epsilon^3$.

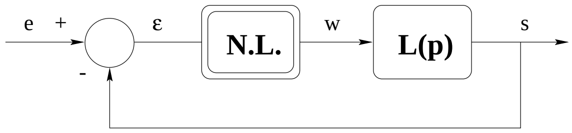


Figure 1.1 :

1- Calculer la fonction de transfert généralisée associée à l'élément non linéaire.

2- Déterminer l'existence d'un ou plusieurs cycles limites pour ce système asservi. Dans l'affirmative, déterminer la stabilité, la fréquence et l'amplitude des cycles limites. On utilisera la méthode algébrique et la méthode graphique.

Nota : $sin^4(\omega t) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}cos(\omega t) + \frac{1}{8}cos(4\omega t)$.

Exercice 2
Soit l'élément linéaire par morceaux dont la caractéristique est donnée par la figure 1.2.

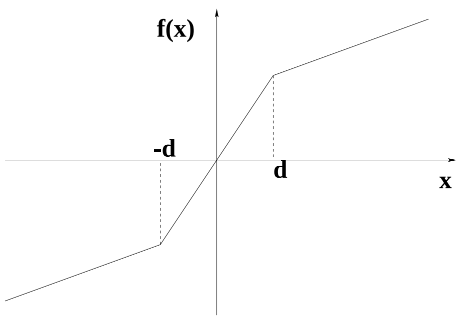


Figure 1.2 :

1- Calculer la fonction de transfert généralisée associée à cet élément non linéaire.

2- On associe cet élément non linéaire à un élément linéaire du premier ordre de constante de temps T avec une intégration. Etudier l'existence et la stabilité des auto-oscillations, (cycles limites), du système asservi à retour unitaire résultant, (méthode analytique ou graphique).

Nota : $sin^2(a) = \frac{1-cos(2a)}{2}$.

Exercice 3

On considère un élément non linéaire dont la caractéristique entrée-sortie est définie par:

$$y = b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 + b_7x^7 + \cdots$$

où x est l'entrée de type sinusoidale de l'élément non linéaire et y sa sortie. Montrer que la fonction de transfert généralisée de cette non linéarité peut être donnée par:

$$N = b_1 + \frac{3}{4}b_3X^2 + \frac{5}{8}X^4 + \frac{35}{64}b_7X^6 + \cdots$$

où X est l'amplitude de l'entrée sinusoidale $x = Xsin(\omega t)$.

Exercice 4

Soit un asservissement identique à celui de l'exercice 1 où la fonction de transfert:

$$L(p) = \frac{K}{p(1+0.1p)(1+0.002p)}$$

et la non linéarité est une saturation intervenant en ± 20. Déterminer le plus grand $K = K_{max}$ préservant la stabilité du système. Si $K = 2K_{max}$, trouver l'amplitude et la fréquence des auto-oscillations.

Exercice 5

On considère toujours le même type d'asservissement, (exercice 1), avec cette fois:

$$L(p) = \frac{(p+20)^2}{p(1+p)(2+p)(p+3)}$$

et l'élément non linéaire est donné par le schéma 1.3:

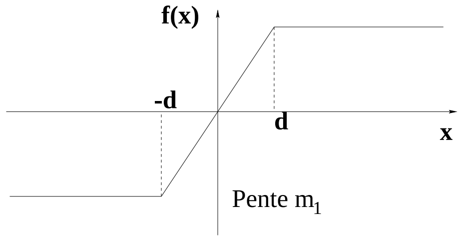


Figure 1.3 :

Etudier l'existence de cycles limites pour un tel asservissement. S'il en existe, on donnera leurs caractéristiques respectives.

Exercice 6
On considère les systèmes non linéaires décrits par les équations d'état suivantes:

$$a- \quad \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \qquad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$b- \quad \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \qquad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$c- \quad \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 \qquad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$$

En utilisant les coordonnées polaires, déterminer l'existence de cycles limites pour ces trois systèmes ainsi que leur nature dans l'affirmative.

Exercice 7
Tracer le portrait de phase des systèmes suivants en utilisant la méthode des isoclines:

$$a- \quad \ddot{\theta} + \dot{\theta} + 0.5\theta = 0$$

$$b- \quad \ddot{\theta} + \dot{\theta} + 0.5\theta = 1$$

$$c- \quad \ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 + 0.5\theta = 0$$

Exercice 8
Considérer le système non linéaire donné par:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 1)sin\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right) \\ \\ \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - 1)sin\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right) \end{cases}$$

Sans résoudre les équations explicitement, montrer que le système a un nombre infini de cycles limites. Déterminer la stabilité de ces cycles limites. On utilisera les coordonnées polaires.

Exercice 9
Soit le système présenté à la figure 1.4. Tracer le portrait de phase de ce système et déterminer la stabilité du système.

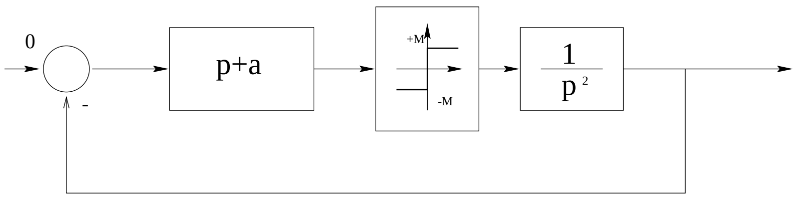


Figure 1.4 :

Exercice 10
On considère l'asservissement et la fonction non linéaire représentés à la figure 1.5.

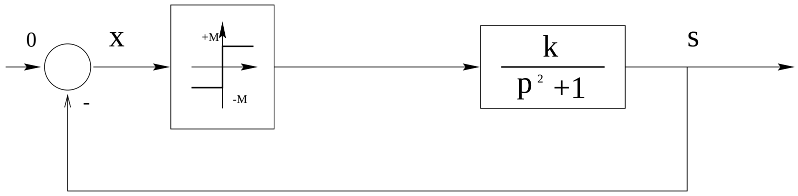


Figure 1.5 :

1- Donner les équations de la trajectoire.

2- Tracer les trajectoires dans le plan de phase pour les conditions initiales $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0$ et $kM = 1$.

3- Donner l'amplitude et la période des oscillations.

4- Etude du régime glissant et optimal. On rajoute une contre-réaction tachymétrique de gain T.

  41- Donner l'équation des droites de commutation.

  42- Quelle est la valeur de T pour être en régime glissant ?

  43- Quelle est la valeur de T pour être en régime optimal ?

Exercice 11

Les équations dynamiques non linéaires d'un manipulateur à joints flexibles sans amortissement sont données par:

$$\begin{cases} I\ddot{q}_1 + MgLsin(q_1) + k(q_1 - q_2) = 0 \\ \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u \end{cases}$$

où $q_1,\ q_2$ sont des positions angulaires, $I,\ J$ sont des moments d'inertie, k est une constante d'élasticité, M est la masse totale, L est une distance, et u est un couple d'entrée. Choisir les variables d'état pour ce système et écrire les équations d'état.

Exercice 12

Un générateur synchrone connecté à un bus infini peut être représenté par:

$$\begin{cases} M\ddot{\delta} = P - D\dot{\delta} - \eta_1 E_q sin(\delta) \\ \\ \tau\dot{E}_q = -\eta_2 E_q + \eta_3 cos(\delta) + E_{FD} \end{cases}$$

où δ est un angle en radians, E_q est une tension, P est une puissance mécanique d'entrée, E_{FD} est un champ électrique d'entrée, D est un coefficient d'amortissement, M est un coefficient d'inertie, τ une constante de temps et $\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3$ sont des paramètres constants.

1- En utilisant $\delta,\ \dot{\delta}$ et E_q comme variables d'état, donner les équations d'état du système.

2- Soit $P = 0.815$, $E_{FD} = 1.22$, $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 2.7$ et $\eta_3 = 1.7$. Donner les points d'équilibre.

3- En supposant que τ est relativement grand tel que $\dot{E}q \sim 0$. Donner le modèle réduit associé. Conclusions.

Exercice 13
Pour tous les systèmes suivants, trouver les points d'équilibre et déterminer le type de chaque point d'équilibre.

1-

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \frac{x_1^3}{6} - x_2 \end{cases}$$

2-

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \\ \dot{x}_2 = 0.1x_1 - 2x_2 - x_1^2 - 0.1x_1^3 \end{cases}$$

3-

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - x_1)x_1 - \frac{2x_1x_2}{1+x_1} \\ \\ \dot{x}_2 = \left(1 - \frac{x_2}{1+x_1}\right) x_2 \end{cases}$$

4-

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - 2x_2^2 - 3x_1^2)\, x_2 \end{cases}$$

Exercice 14
Trouver tous les points d'équilibre du système:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - x_1x_2 \\ \\ \dot{x}_2 = bx_1^2 - cx_2 \end{cases}$$

pour toutes les valeurs réelles positives de a, b, c et déterminer le type de chaque point d'équilibre.

Exercice 15
On considère l'asservissement de la figure 1.6.

1- On suppose que $y = x$:

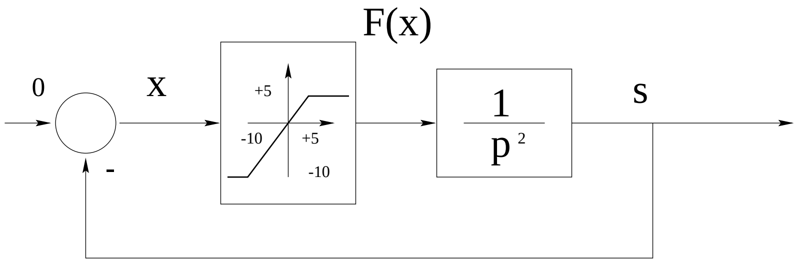


Figure 1.6 :

11- Donner la nature et la position des points singuliers.

12- Tracer les trajectoires dans le plan de phase pour $x_1 = -20,\ x_2 = 0$.

13- En déduire l'amplitude et la période des oscillations.

2- On considère maintenant que $F(x)$ est la fonction non linéaire représentée ci-dessus.

21- Donner la nature et la position des points singuliers.

22- Tracer les trajectoires dans le plan de phase pour $x_1 = -20,\ x_2 = 0$.

23- En déduire l'amplitude et la période des oscillations.

3- On conserve la fonction non linéaire et on rajoute une contre-réaction tachymétrique de gain $T = 0.33$.

31- Quelle est le rôle de la contre-réaction tachymétrique.

32- Donner la nature et la position des points singuliers.

33- Tracer les trajectoires dans le plan de phase.

Exercice 16
Considérer le système:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 \\ \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

L'origine est-elle asymptotiquement stable ? Est-elle globalement asymptotiquement stable?

Exercice 17
Etudier la stabilité de l'origine du système:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$$

en utilisant la fonction candidate de Lyapunov:

$$V(x) = ax_1^2 + bx_2^2$$

Exercice 18
Etudier la stabilité de l'origine du système:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

Exercice 19
Etudier la stabilité de l'origine du système:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(k^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1^2 + x_2^2 + k^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1(x_1^2 + x_2^2 + k^2) - x_2(x_1^2 + x_2^2 - k^2) \end{cases}$$

en utilisant la fonction candidate de Lyapunov:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

quand (a) $k = 0$ et (b) $k \neq 0$.

Exercice 20
Considérer le système du second ordre:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{6x_1}{u^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-2(x_1+x_2)}{u^2} \end{cases}$$

où $u = 1 + x_1^2$. En utilisant la fonction candidate de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2$$

montrer que $V(x) > 0$ et $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 21
Considérer le système:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + g(x_3) \\ \dot{x}_2 = -g(x_3) \\ \dot{x}_3 = -ax_1 + bx_2 - cg(x_3) \end{cases}$$

où a, b et c sont des constantes positives et $g(.)$ satisfait:

$$g(0) = 0 \qquad et \qquad yg(y) > 0, \quad \forall\ 0 < |y| < k$$

pour tout $k > 0$.

1- Montrer que l'origine est un point d'équilibre unique.

2- Avec
$$V(x) = a/2x_1^2 + b/2x_2^2 + \int_0^3 g(y)dy$$
comme fonction candidate de Lyapunov, montrer que l'origine est asymptotiquement stable.

Exercice 22
Considérer le système:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \frac{1}{1+x_3} \\ \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \\ \\ \dot{x}_3 = -3x_3 + x_2 \end{cases}$$
et montrer qu'il possède un point d'équilibre unique dans la région $x_i \leq 0,\ i = 1, 2, 3,$ et étudier la stabilité de ce point d'équilibre en utilisant la méthode de linéarisation.

Exercice 23
Considérer le système:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1x_2 - 1)x_1^3 + (x_1x_2 - 1 + x_2^2)x_1 \\ \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

1- Montrer que l'origine est un point d'équilibre unique.

2- Montrer par la méthode de linéarisation que l'origine est asymptotiquement stable.

3- Est-ce un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable ?

Exercice 24
Considérer le système:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)sin(x_1) - 3x_2 \end{cases}$$

1- Montrer que l'origine est un point d'équilibre unique.

2- Montrer par la méthode de linéarisation que l'origine est asymptotiquement stable.

3- Est-ce un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable ?

Exercice 25
Considérer le système:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - (x_1 + 2x_2)(1 - x_2^2) \end{cases}$$

En utilisant la fonction candidate de Lyapunov $V(x) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$, montrer que l'origine est asymptotiquement stable.

Exercice 26

Pour les systèmes de fonction de transfert données ci-dessous, étudier le problème de stabilité absolue pour $\phi(y) \in [0 \quad k]$, en utilisant dans chaque cas le critère de Popov et le critère du cercle.

1- $G(p) = \frac{1-p}{(1+p)^2}$

2- $G(p) = \frac{1}{(1+p)(p+2)}$

3- $G(p) = \frac{p}{p^2-p+1}$

Bibliographie

[1] N Bogolioubov, I. Mitroplski, *Les méthodes Asymptotiques en Theorie des Oscillations Non Linéaires*, Gauthier-Villars, 1962.

[2] R.A. DeCarlo, S.H. Zak, G.P. Matthews, Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable Systems: A Tutorial", *Proceedings of the IEEE*, Vol.76, No. 3, Mars 1988.

[3] J.Y. Hung, W. Gao, J.C. Hung, Variable Structure Control: A Survey", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol.40, No. 1, Février 1993.

[4] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company, 1992.

[5] C. Mira, *Systèmes Asservis Non Linéaires*, Dunod.

[6] N. Minorsky, *Nonlinear Oscillations*, D. Van Nostrand Company, 1960.

[7] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice-hall international eds, 1990.

[8] P.C. Parks, V. Hahn, *Stability Theory*, Prentice-hall international eds, 1993.

[9] J. J. Slotine, W. Li, *Applied Non Linear Control*, Prentice-hall international eds, 1991.

[10] M. Vidyasagar, *Non Linear Systems*, Prentice-hall international eds, 1993.