Jeux répétés en réseaux, communication et Folk Théorème

Marie Laclau

HEC Paris - Economics and Decision Science Department
1 rue de la Libération, 78351 Jouy-en-Josas Cedex, France
laclaum@hec.fr

Mots-Clés : *jeux répétés, Folk théorèmes, observation imparfaite, graphes, réseaux de communication, unicast.*

1 Introduction

On considère un jeu répété avec observation imparfaite dans lequel chaque joueur a un certain nombre de voisins avec lesquels il peut communiquer : à chaque étape, chaque joueur peut envoyer des messages non coûteux à ses voisins (la communication est unicast : ces messages peuvent être différents d'un voisin à l'autre). Le paiement du joueur i ne dépend que des actions choisies par lui-même et par ses voisins. Cette structure est naturellement représentée par un graphe non-orienté. On suppose que les joueurs observent leur paiement d'étape, mais pas les actions choisies par leurs voisins. On établit une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un protocole capable d'identifier en temps fini l'auteur d'une déviation éventuelle, ce qui nous permet d'obtenir un Folk théorème généralisé (caractérisation de l'ensemble des paiements d'équilibre du jeu répété).

Les jeux dans les réseaux ont déjà été traités dans la littérature. Lorsque les joueurs observent les actions de leurs voisins et que le paiement d'un joueur dépend de l'ensemble des actions choisies par tous les joueurs, Renault et Tomala ([2]) ont montré qu'un Folk théorème généralisé est vérifié pour toute fonction de paiement si et seulement si le graphe est 2-connexe. Dans leur article, la communication est multicast (les joueurs envoient le même message à tous leurs voisins) car les joueurs communiquent grâce à leurs actions.

2 Le modèle

On considère un jeu répété à $N = 1, \ldots, n$ joueurs, $n \geq 2$. Pour tout $i \in N$, soit A^i, l'ensemble fini non-vide des actions du joueur i et $G(i) \subset N \setminus \{i\}$ l'ensemble de ses voisins. On fait l'hypothèse que $i \in G(j)$ si et seulement si $j \in G(i)$. Pour tout $i \in N$ et $j \in G(i)$, le paiement du joueur i à l'étape t est défini par $g_t^i : \prod_{j \in G(i) \cup \{i\}} A^j \to \mathbb{R}$. On suppose de plus que chaque joueur i peut envoyer des messages (différents) à ses voisins et en recevoir de leur part à chaque étape (messages choisis dans un ensemble fini de cardinal supérieur à 2). Le jeu se déroule de la manière suivante : à chaque étape t, les joueurs choisissent indépendamment leur action et envoient des messages à leurs voisins. On fait l'hypothèse que chaque joueur ne peut pas observer les actions choisies par ses voisins. Donc, avant de commencer l'étape $t+1$, le joueur i apprend seulement son paiement $g^i_t(a^{G(i)\cup\{i\}})$ et les messages qu'il a reçus de la part de ses voisins à l'étape t. On suppose que les joueurs maximisent l'espérance de leur paiement moyen et on utilise la notion d'équilibre uniforme (Sorin, 1992). Soit $\Gamma_\infty(G,g)$ le jeu infiniment répété défini par la description précédente, et soit $E_\infty(G,g)$ l'ensemble des paiements d'équilibre associé. Soit G le graphe non-dirigé dont les sommets représentent les joueurs et où il y a une arête entre i et j si et seulement si $j \in G(i)$ et $i \in G(j)$. Notre but est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur la structure d'observation $G = (G(i))_{i\in N}$ afin d'obtenir un Folk théorème.

3 Théorème principal

On fait l'hypothèse suivante sur la forme de la fonction de paiement.

Hypothèse : $\forall j \in N$, $\forall i \in G(j)$, $\forall a^j$, $b^j \in A^j$, tel que $a^j \neq b^j$, $g^i(a^{i\cup G(i)\setminus\{j\}}, b^j) \neq g^i(a^{i\cup G(i)})$.

Cette hypothèse est importante car sinon une déviation de l'un de joueurs pourrait ne pas être repérée par ses voisins. Pour tout $a \in A$, on note $g(a) = (g^1(a^{G(1)\cup\{1\}}), \ldots, g^n(a^{G(n)\cup\{n\}})$ et $g(A) = \{g(a)\ ;\ a \in A\}$. Soit $IR(G,g)$ l'ensemble des paiements individuellement rationnels (paiements supérieurs au niveau de punition, i.e. le niveau de paiement que peut garantir chaque joueur quel que soient les actions de ses voisins).

Théorème 1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour toute fonction de paiement vérifiant l'hypothèse ci-dessus,* $\mathrm{co}\, g(A) \cap IR(G,g) \subseteq E_\infty(G,g)$ *: l'ensemble des paiements réalisables et individuellement rationnels est inclus dans l'ensemble des paiements d'équilibre uniforme.*
2. *Le graphe G vérifie la propriété suivante :*
   $\forall i \in N,\ \forall j,k \in G(i)$ *tels que* $j \neq k$, $\exists l \in G(j) \triangle G(k)$ *tel qu'il existe un chemin de l à i ne passant ni par j ni par k.*

Afin d'établir ce théorème, on définit un protocole de communication qui permet, lorsque la condition sur G ci-dessus est vérifiée, de repérer une déviation unilatérale et d'identifier le joueur qui a dévié en temps fini (afin qu'il puisse être puni par ses voisins par la suite).

Références

[1] A. Beimel, M. Franklin. Reliable Communication over Partially Authenticated Networks. *Theoretical Computer Science*, 220:185–210, 1999.

[2] J. Renault, T. Tomala. Repeated Proximity Games. *International Journal of Game Theory*, 27:539–559, 1998.

[3] J. Renault, T. Tomala. Learning the State of Nature in Repeated Games with Incomplete Information and Signals. *Games and Economic Behavior*, 47:124–156, 2004.

[4] J. Renault, T. Tomala. Probabilistic Reliability and Privacy of Communication Using Multicast in General Neighbor Networks. *Journal of Crypotlogy*, 21(2):250–279, 2008.