Equilibres forts et jeu de la coupe maximum

Laurent Gourvès[1], Jérôme Monnot[1]

LAMSADE, CNRS FRE 3234 et Université Paris Dauphine, place du Maréchal de Lattre de Tassigny
75775 Paris, France
{laurent.gourves,monnot}@lamsade.dauphine.fr

Mots-Clés : *Jeux stratégiques, équilibres forts, Max Cut.*

1 Introduction

Le problème de la coupe maximum d'un graphe (MAX CUT) est le suivant : étant donné un graphe simple $G = (V, E)$ dont les arêtes possèdent des poids non négatifs, partitionner V en deux ensembles V_1, V_2 de sorte que la somme des poids des arêtes de la coupe (i.e. celles ayant une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2) soit maximum.

Par exemple, ce problème modélise le cas où plusieurs agents (les sommets du graphe) souhaitent communiquer via des signaux radios mais seulement deux fréquences sont disponibles. Le poids d'une arête est l'interférence que les deux sommets extrémités subissent s'ils utilisent la même fréquence. Ainsi ont peut chercher à affecter les fréquences aux sommets afin de maximiser les interférences évitées.

Ce problème peut être vu sous forme d'un jeu stratégique où chaque sommet représente un joueur ayant pour stratégies 1 ou 2 (i.e. aller dans V_1 ou V_2). L'intérêt d'un joueur/sommet est alors d'aller dans le sous ensemble qui maximise le poids des arêtes de la coupe qui lui sont incidentes.

On s'intéresse aux situations d'équilibre de ce jeu et en particulier à la qualité des coupes induites vis-à-vis du poids d'une coupe optimale.

2 Equilibres

La notion d'équilibre la plus souvent étudiée est celle de Nash. C'est une situation où aucun joueur ne peut, de manière unilatérale, changer de stratégie et augmenter strictement son utilité. Tout jeu fini possède un tel équilibre si les joueurs peuvent adopter des stratégies *mixtes* (distribution de probabilités sur les stratégies possibles) mais l'existence d'un équilibre de Nash *pur* (où chaque joueur désigne une de ses stratégies de façon déterministe) n'est pas toujours garantie.

Un équilibre *fort* est un raffinement de l'équilibre de Nash où aucune coalition de joueurs ne peut, de manière unilatérale, changer de stratégie et augmenter strictement l'utilité de chacun de ses membres [1]. Un équilibre k-fort est la restriction aux coalitions de taille au plus k (un équilibre de Nash est donc 1-fort).

FIGURE 1 – Chaque arête a un poids 1. A gauche (resp. droite), on a un équilibre de Nash pur (resp. équilibre fort pur) induisant une coupe 1/2 approchée (resp. 2/3 approchée) de la coupe optimale.

Pour le jeu de la coupe maximum, il est facile de montrer qu'une coupe maximum correspond à un équilibre fort pur.

3 Résultats

On s'intéresse au rapport entre le poids d'une coupe induite par un équilibre et celui d'une coupe optimale, dans le pire cas. Ce rapport, analogue au rapport d'approximation, est connu sous le nom de *prix de l'anarchie* [2]. Il capture l'impact négatif des choix non concertés (et parfois conflictuels) des joueurs sur la qualité globale du système. Un prix de l'anarchie éloigné de 1 signifie que les joueurs peuvent tendre vers un équilibre socialement mauvais.

Pour les équilibres de Nash, le prix de l'anarchie du jeu de coupe est le rapport d'approximation d'une recherche locale simple, à savoir 1/2. Pour les équilibres forts, nous montrons que le prix de l'anarchie est 2/3. On peut se reporter à la Figure 1 pour voir deux cas simples où ces rapports sont atteints. Les équilibres forts sont donc socialement meilleurs que les équilibres de Nash. Que dire des équilibres k-forts ? On peut montrer que le prix de l'anarchie est 1/2 pour $k \leq \sqrt{|V|}$.

4 Extensions

Il est naturel de s'intéresser à la q partition de G, correspondant au cas où $q \geq 2$ fréquences sont disponibles. Comme précédement, une q-coupe optimale correspond à un équilibre de Nash. Pour les équilibres forts, nous avons montré qu'une q-coupe optimale correspond à un équilibre 3-fort. Pour certaines instances, une q-coupe optimale n'est pas un équilibre 4-fort.

Enfin, une autre généralisation de MAX CUT, connue sous le nom de NOT ALL EQUAL SAT, peut être étudiée sous forme de jeu. Nous montrons qu'un équilibre fort existe toujours et que le prix de l'anarchie est 2/3 si les clauses contiennent toutes deux littéraux. Au delà de deux littéraux, l'existence d'un équilibre fort n'est pas garantie.

Références

[1] R. Aumann. Acceptable points in general cooperative n-person games. *Contribution to the Theory of Games.* Annals of Mathematics Studies, vol. IV, 40, pp. 287 – 324, 1959.

[2] E. Koutsoupias, C. H. Papadimitriou. Worst Case Equilibria. *Proceedings of STACS'99*, LNCS, vol. 1563, pp. 404 – 413, Springer, 1999.