

Une approche de choix résolu à la Jaffray dans les arbres décision hasard munis de probabilités imprécises

Gildas Jeantet¹, Olivier Spanjaard¹

LIP6-CNRS; UPMC; 104, avenue du Président Kennedy, F-75016 Paris, France
{jeantet,spanjaard}@lip6.fr

Mots-Clés : *décision séquentielle, probabilités imprécises, choix résolu, critère d'Hurwicz.*

La décision dans l'incertain traite des problèmes où les conséquences d'une décision dépendent d'événements incertains. Lorsque cette incertitude est probabilisée, on parle alors de décision dans le risque. Dans ce cadre, on caractérise une décision par une *loterie* sur les conséquences possibles. Un critère de décision classique pour comparer des loteries (et donc des décisions) est l'espérance d'utilité (EU). Dans ce modèle, une *fonction d'utilité* u (propre à chaque décideur) assigne une valeur numérique à chaque conséquence. L'évaluation d'une loterie est alors réalisée via le calcul de son espérance d'utilité. Cependant, lorsque plusieurs experts ont des points de vue divergents ou quand certaines données empiriques manquent, il n'est pas évident d'élucider des probabilités numériques précises pour chacun des événements. Une manière naturelle de prendre en compte explicitement cette difficulté est d'utiliser des intervalles de probabilités au lieu de valeurs scalaires. On parle alors de *probabilités imprécises*. Comparer des décisions revient alors à comparer des loteries imprécises, c'est-à-dire des loteries où plusieurs distributions possible de probabilité sont prises en compte. Un décideur pessimiste prendra la décision qui maximise la pire espérance d'utilité possible. Ceci est connu sous le nom de critère Γ -*maximin*. Inversement, un décideur optimiste prendra la décision qui maximise la meilleure espérance d'utilité possible. C'est le critère Γ -*maximax*. Entre ces deux attitudes extrêmes, Jaffray and Jeleva ont récemment proposé d'utiliser le critère d'Hurwicz qui permet de rendre compte d'attitudes plus modérées en s'intéressant à une combinaison linéaire des deux critères précédents [4]. C'est le critère auquel nous nous intéressons ici.

Nous nous plaçons ici dans le formalisme des arbres décision hasard pour représenter un problème de *décision séquentielle*. L'ensemble des stratégies est combinatoire dans un tel contexte. Le calcul d'une stratégie optimale pour un critère de décision donné (dont le critère d'Hurwicz) est par conséquent un problème algorithmique en soi. Dans un arbre décision hasard muni de probabilités scalaires, il est connu qu'une stratégie optimale pour EU peut être calculée en temps linéaire par programmation dynamique. Ce n'est plus le cas lorsqu'on utilise des probabilités imprécises et le critère d'Hurwicz. En effet, avec ce critère, une stratégie optimale vue de la racine peut comporter des stratégies sous-optimales dans certains sous-arbres. Contournant cette difficulté, dans le cas des critères Γ -maximin et Γ -maximax, Kikuti *et al.* [1] ont présenté des algorithmes qui retournent des stratégies calculées par induction arrière dans l'arbre décision hasard. Ce type de stratégie sera suivie par un décideur *sophistiqué*, c'est-à-dire qui est capable d'anticiper sur ses actions futures, et qui adopte de plus un comportement *conséquentialiste*, c'est-à-dire que ses décisions ne dépendent ni du passé, ni d'événements contrefactuels. Il a néanmoins été montré que, lorsque les probabilités sont imprécises, l'adoption d'un tel comportement, à la fois sophistiqué et conséquentialiste, rend le décideur vulnérable aux manipulations et plus généralement susceptible de suivre une stratégie irrationnelle [2]. Pour cette raison, un décideur utilisant le critère d'Hurwicz doit faire du *choix résolu* [5] : fixer initialement une stratégie puis ne jamais en dévier par la suite. Une manière de faire du choix résolu

est de déterminer la stratégie optimale du point de vue de la racine et d'appliquer ensuite la stratégie sans jamais en dévier. Cependant, dans la pratique, ce type de stratégie présente l'inconvénient de réquerir une forte résolution de la part du décideur, de par la tentation de dévier qu'il peut y avoir lorsqu'on arrive en un sous-arbre où la stratégie à suivre est loin de l'optimum. Face à ce constat, Jaffray [3] propose une approche différente : on considère chaque noeud de décision comme un *ego* indépendant (différentes "incarnations" d'un même décideur dans plusieurs contextes décisionnels), chaque ego étant maître de la décision qu'il va prendre. On construit alors une stratégie qui satisfait tous les egos présents dans la stratégie. Ainsi, chaque ego, au moment de prendre sa décision, ne sera pas incité à dévier de la stratégie prédéfinie. L'idée est donc d'optimiser le critère de décision parmi l'ensemble des stratégies qui réalisent un compromis acceptable entre les egos.

Pour ce faire, nous adaptons ici un algorithme proposé par Jaffray pour faire du choix résolu à base d'egos. Le principe de l'algorithme est de remonter par programmation dynamique, en chaque noeud de décision N , un ensemble de sous-stratégies qui est le résultat d'un compromis entre l'ego associé à N et les egos présents dans le sous-arbre induit par N . Pour ce faire, chaque ego reçoit un ensemble de sous-stratégies estimées acceptables par l'ensemble des egos appartenant à son futur, et met à jour ces sous-stratégies en y préfixant les décisions dont il dispose. Une première condition nécessaire à l'adhésion d'un ego à une stratégie de compromis est l'E-admissibilité de la sous-stratégie induite (une stratégie est dite *E-admissible* si elle est optimale au sens de EU pour au moins une distribution de probabilité). En effet, il est difficilement concevable qu'un ego puisse appliquer une stratégie qui n'est jamais optimale quelle que soit la vraie distribution de probabilité. C'est pourquoi on rejette toutes les sous-stratégies qui ne sont pas E-admissibles. Chaque sous-stratégie de l'ensemble est ensuite évaluée selon le critère d'Hurwicz. Soient V_{max} la meilleure évaluation de l'ensemble et θ la tolérance de perte d'utilité pour chaque ego (θ représente le degré de compromis acceptable par les egos afin de garantir qu'ils ne dévieront pas de la stratégie prédéfinie). Toutes les sous-stratégies dont l'évaluation est inférieure à $V_{max} - \theta$ sont alors rejetées. On procède de même en chaque noeud de décision N . Une fois l'induction arrière terminée, on sélectionne la stratégie de meilleure évaluation dans l'ensemble remonté à la racine de l'arbre et on la retourne. La stratégie retournée par la procédure comporte alors uniquement des sous-stratégies E-admissibles et proches de l'optimum au sens du critère d'Hurwicz.

Les principales difficultés algorithmiques se situent au niveau de l'évaluation d'une stratégie au sens du critère d'Hurwicz ainsi qu'au niveau du test d'E-admissibilité d'une stratégie. Ces tâches sont réalisées en formulant des programmes linéaires. Les résultats des expérimentations numériques que nous avons menées sont assez encourageants. En effet, nous avons pu traiter des arbres binaires complets (arbres binaires dont la combinatoire est la plus élevée) de plus de 65000 noeuds.

Références

- [1] C. P. de Campos D. Kikuti, F. G. Cozman. Partially ordered preferences in decision trees : computing strategies with imprecision in probabilities. In *IJCAI Workshop on Advances in Preference Handling*, 2005.
- [2] P. Hammond. Consequentialist foundations for expected utility. *Theory and Decision*, 25 :25–78, 1988.
- [3] J.-Y. Jaffray. Rational decision making with imprecise probabilities. In *1st International Symposium on Imprecise Probability : Theories and Applications*, pages 183–188, 1999.
- [4] J.-Y. Jaffray and M. Jeleva. Information processing under imprecise risk with the Hurwicz criterion. In *5th International Symposium on Imprecise Probability : Theories and Applications*, pages 233–242, 2007.
- [5] E.F. McClennen. *Rationality and Dynamic choice : Foundational Explorations*. Cambridge University Press, 1990.