Analyse Structurelle dans les Systèmes Algébro-différentiels et Optimisation Combinatoire

Mathieu Lacroix[1], A. Ridha Mahjoub[2] et Sébastien Martin[2]

1. LIMOS ; Université Blaise Pascal Clermont II ; Complexe Scientifique des Cézeaux, 63177 Aubière Cedex, France, `lacroix@lamsade.dauphine.fr`
2. LAMSADE ; Université Paris-Dauphine ; Place du Maréchal De Lattre De Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France. `mahjoub@lamsade.dauphine.fr, martin@lamsade.dauphine.fr`

Mots-Clés : *Système algébro-différentiel, analyse structurelle, graphe, programmation linéaire en nombres entiers, couplage, algorithme de coupes et branchements.*

1 Introduction

Les systèmes algébro-différentiels (SAD) sont utilisés pour modéliser des systèmes physiques complexes comme les circuits électriques et les mouvements dynamiques. Ces systèmes peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$F(x, \dot{x}, u, p, t) = 0, \tag{1}$$

où x est le vecteur des variables, $\dot{x}$ est le vecteur des variables dérivées, u est le vecteur d'entrées, p est le vecteur de paramètres et t exprime le temps.

Il est très utile de savoir à l'avance si un SAD peut être, ou non, résolu afin d'éviter une résolution par simulation longue et fastidieuse. Une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour la résolution d'un SAD est de pouvoir associer à chaque équation une unique variable et à chaque variable une unique équation. Si ce couplage est vérifié, on dit que le système est *bien contraint*. Autrement, le système est dit *mal contraint*. Dans ce cas le SAD n'admet pas de solution [1]. Le problème de l'analyse structurelle (PAS) pour un SAD consiste à vérifier si le système en question est bien contraint.

Pour résoudre le problème nous pouvons associer à un SAD un graphe biparti $G = (U \cup V, E)$ où chaque sommet de U correspond à une équation, chaque sommet de V à une variable, et il existe une arête $u_i v_j \in E$ entre un nœud $u_i \in U$ et un nœud $v_j \in V$ si la variable correspondant à v_j apparaît dans l'équation correspondant à u_i. Le graphe G est appelé *graphe d'incidence*. Pour vérifier si un système est bien contraint, il suffit de vérifier s'il existe un couplage parfait dans le graphe d'incidence associé. S'il n'existe pas de tel couplage alors le système est mal contraint [1, 2].

A notre connaissance, le PAS n'a pas été étudié dans le cas des SAD possédant des équations conditionnelles. L'objet de ce papier est d'étudier le problème dans ce cas.

2 Le PAS pour les SAD conditionnels

Un SAD conditionnel peut générer plusieurs systèmes non conditionnels en fonction de la valeur des conditions. Dans ce papier nous considérons les SAD conditionnels où à chaque équation conditionnelle est associée une seule condition et chaque équation conditionnelle peut générer une seule équation suivant la valeur vraie ou fausse de la condition associée.

Etant donné un SAD conditionnel possédant n équations, $eq_1, ..., eq_n$, et n variables, $x_1, ..., x_n$, on considère le graphe biparti $G = (U \cup V, E)$ où $U = \{u_1, ..., u_n\}$ (resp. $V = \{v_1, ..., v_n\}$) est associé aux equations (resp. variables). Entre un sommet $u_i \in U$ et un sommet $v_j \in V$ on considère une arête, appelé *arête vraie* (resp. *arête fausse*), si la variable x_j apparaît dans l'équation eq_i, quand la condition de eq_i est vraie (resp. fausse). Soit E_i^t (resp. E_i^f) l'ensemble des arêtes vraies (resp. fausses) incidentes à u_i, pour tout $i = 1, ..., n$. Soit $E = \bigcup_{i=1,...,n}(E_i^t \cup E_i^f)$. Le PAS pour les SAD conditionnels revient donc à vérifier s'il existe un sous-graphe G' de G ne possédant pas de couplage parfait et tel qu'à chaque sommet u_i est incident exactement un sous ensemble E_i^t ou E_i^f. Si un tel sous graphe existe, alors le système est mal contraint.

Pour un sommet $u_i \in U$, soit $x(u_i)$ une variable binaire qui prend 1 si E_i^t est pris dans G' et 0 si E_i^f est pris dans G', c'est-à-dire $x(u_i) = 1$ si la condition de l'équation eq_i est vraie et 0 sinon.

Soit M un couplage parfait de G. Soit $x \in \{0,1\}^U$ tel que $x(u_i) = 1$ si $M \cap E_i^t \neq \emptyset$ et $x(u_i) = 0$ si $M \cap E_i^f \neq \emptyset$. Alors le sous-graphe G' induit par les E_i^t tels que $x(u_i) = 1$ et les E_i^f tels que $x(u_i) = 0$ contient le couplage parfait M.
Donc, une solution n'induisant pas de couplage parfait satisfait la contrainte

$$\sum_{u_i v_j \in M \cap E_i^t} x(u_i) + \sum_{u_i v_j \in M \cap E_i^f} (1 - x(u_i)) \leq n - 1.$$

Le PAS est donc équivalent au programme suivant,

$$\begin{aligned}
&\min y \\
&\sum_{u_i v_j \in M \cap E_i^t} x(u_i) + \sum_{u_i v_j \in M \cap E_i^f} (1 - x(u_i)) - y \leq n - 1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour tout } M \in \mathcal{M}, && (2)\\
&0 \leq x(u_i) \leq 1, \qquad\qquad \text{pour tout } u_i \in U, && (3)\\
&0 \leq y, && (4)\\
&x(u_i) \in \{0,1\}, \qquad\qquad \text{pour tout } u_i \in U, && (5)
\end{aligned}$$

Les contraintes (2) sont en nombre exponentiel.
Nous prouvons, dans un premier temps, que résoudre le PAS dans le cas des SAD conditionnels est un problème NP-Difficile. Nous montrons par la suite que la résolution de la relaxation linéaire de ce programme peut être effectuée. En d'autre termes, on montre que le problème de séparation des contraintes (2) peut être résolu en temps polynomial. En se basant sur ces résultats, nous donnons un algorithme de coupes et branchements et présentons quelques résultats expérimentaux.

Références

[1] K. Murota. Systems Analysis by Graphs and Matroids. *Springer-Verlag*, 1987.

[2] K. Murota. Matrices and Matroids for Systems Analysis. *Springer-Verlag*, 2000.

[3] G. Reibig, U. Feldmann. A simple and general method for detecting structural inconsistencies in large electrical networks. *Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 2002, pp. 237-240.

[4] J. Unger, A. Kroner, W. Marquardt. Structural analysis of differential-algebraic equation systems - theory and application. *Computeurs and Chemical Engineering*, 1995, pp. 867-882.