Le problème de conception de réseau fiable avec contrainte de borne

I. Diarrassouba[1], V. Gabrel[2], A. R. Mahjoub[2]

[1] Laboratoire LIMOS, Université Blaise Pascal, Complexe Scientifique des Cézeaux, 63177, Aubière, France
diarrass@isima.fr

[2] Laboratoire LAMSADE, Université Paris Dauphine, Place du Maréchal De Lattre de Tassigny, 75775, Paris Cedex 16, France
{gabrel,mahjoub}@lamsade.dauphine.fr

Mots-Clés : *chaînes arête-disjointes de longueur bornée, chemins arc-disjoints, transformation de graphe*

1 Introduction

Etant donné un graphe valué non orienté $G = (V, E)$, un ensemble de demandes $D \subseteq V \times V$ et deux entiers positifs $k \geq 2$ et $L \geq 2$, *le problème de conception de réseau fiable avec contrainte de borne* (kHNDP) consiste à déterminer un sous-graphe de G de poids minimum tel qu'entre chaque paire de sommets $\{s, t\} \in D$, il existe k chaînes arête-disjointes de longueur inférieure ou égale à L.

Le kHNDP trouve ses applications dans la conception de réseaux de télécommunications où l'on impose des contraintes de fiabilité et où le routage du traffic doit être effectué sur un nombre limité de liaisons. Il est NP-difficile dans le cas général (voir Huygens et al. [3] pour $L \in \{2, 3\}$ et $|D| \geq 2$). Lorsque $k \geq 2$, $L \in \{2, 3\}$ et $|D| = 1$, le problème peut être résolu en temps polynomial grâce à un algorithme de coupes (voir [1, 2, 4]).

Dans cet article, on considère le kHNDP d'un point de vue polyhédral dans le cas où $k \geq 2$, $L \in \{2, 3\}$ et $|D| \geq 2$. En particulier, nous montrons que la résolution du problème se ramène à la recherche de chemins arc-disjoints dans un ou plusieurs graphes orientés obtenus à partir du graphe G. Nous introduisons de nouvelles formulations du problème sous forme de programmes linéaires en nombres entiers basées sur ces transformations et, pour chaque formulation, nous étudions le polyèdre associé. Nous introduisons des familles d'inégalités valides et présentons des algorithmes de coupes et branchements ou de coupes, génération de colonnes et branchements pour résoudre le problème ainsi que des résultats expérimentaux.

2 Transformations de graphe et formulations du problème

Soient $G = (V, E)$, un graphe non orienté, $D \subseteq V \times V$, et deux entiers $k \geq 2$ et $L \in \{2, 3\}$. Dans cette section, nous introduisons deux transformations du graphe G en graphes orientés. La première, appelée *transformation séparée*, est donnée comme suit.

Soit $\{s,t\} \in D$ et $\widetilde{G}_{st} = (\widetilde{V}_{st}, \widetilde{A}_{st})$ le graphe orienté obtenu de la manière suivante. Soit $N_{st} = V \setminus \{s,t\}$, N'_{st} une copie de N_{st} and $\widetilde{V}_{st} = N_{st} \cup N'_{st} \cup \{s,t\}$. La copie dans N'_{st} d'un sommet $u \in N_{st}$ est notée u'. A chaque arête $e = st \in E$, on associe un arc (s,t) dans $\widetilde{G}_{st}$ de capacité 1. A chaque arête $su \in E$ (resp. $vt \in E$), on associe dans $\widetilde{G}_{st}$ l'arc (s,u), $u \in N_{st}$ (resp. (v',t), $v' \in N'_{st}$) avec une capacité 1. A chaque sommet $u \in V \setminus \{s,t\}$, on associe dans $\widetilde{G}_{st}$ un arc (u,u') avec une capacité infinie. Enfin, si $L = 3$ on associe à chaque arête $uv \in E \setminus \{s,t\}$, deux arcs (u,v') et (v,u'), avec $u,v \in N_{st}$ and $u',v' \in N'_{st}$ de capacité 1.

La seconde transformation de graphe, appelée *transformation aggrégée*, permet d'associer au graphe G un seul graphe orienté $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{A})$ obtenu comme suit. On note par S_D (resp. T_D) l'ensemble des sommets qui sont sources (resp. destinations) dans une demande. Soient N' et N'' deux copies de l'ensemble de sommets V. On note par u' et u'' les sommets de N' et N'' correspondant à un sommets $u \in V$. Soit $\widetilde{V} = S_D \cup N' \cup N'' \cup T_D$. Pour tout sommet $u \in V$, on ajoute dans $\widetilde{G}$ un arc (u',u''). Pour chaque demande $\{s,t\} \in D$, avec $s \in S_D$ et $t \in T_D$, on applique la procedure suivante.

i) Pour une arête $e = st$, on ajoute dans $\widetilde{G}$ un arc (s,t') et un arc (t',t) ;

ii) Pour une arête $su \in E$, $u \in V \setminus \{s,t\}$, on ajoute un arc (s,u') dans $\widetilde{G}$;

iii) Pour une arête $vt \in E$, $v \in V \setminus \{s,t\}$, on ajoute un arc (v'',t).

Si $L = 3$, pour chaque arête $e = uv \in E$, on ajoute deux arcs (u',v'') and (v',u'').

Théorème 1 *Soient $G = (V,E)$, $D \subseteq V \times V$, $k \geq 2$ et $L \in \{2,3\}$.*

1. *Il existe une solution du kHNDP dans G si et seulement si le graphe $\widetilde{G}_{st}$ contient k chemins arc-disjoints pour tout $\{s,t\} \in D$.*
2. *Il existe une solution du kHNDP dans G si et seulement si le graphe $\widetilde{G}$ contient k chemins arc-disjoints pour tout $\{s,t\} \in D$.*

Comme conséquence du théoreme 1, le kHNDP peut être modélisé sous forme de programmes linéaires en nombres entiers basés respectivement sur les st-coupes (*formulation par coupes*), les flots (*formulation arc-sommets*) et les chemins (*formulation arc-chemins*) dans les graphes orientés $\widetilde{G}_{st}$, pour tout $\{s,t\} \in D$, et par une formulation basée sur les st-coupes dans le graphe $\widetilde{G}$, pour tout $\{s,t\} \in D$ (*formulation aggrégée*).

Pour chaque formulation, nous introduisons des familles d'inégalités valides pour le polyèdre associé. Nous développons des algorithmes de coupes et branchements ou de coupes, génération de colonnes et branchements pour le problème et donnons des résultats expérimentaux.

Références

[1] F. Bendali, I. Diarrassouba, A. R. Mahjoub and J. Mailfert, "The k edge-disjoint 3-hop-constrained paths polytope", *soumis to Discrete Optimization.*

[2] G. Dahl, D. Huygens, A. R. Mahjoub and P. Pesneau, "On the k edge-disjoint 2-hop-constrained paths polytope", *Operation Research Letters 34 (5)*, 2006, pp. 577-582.

[3] D. Huygens, A. R. Mahjoub, M. Labbe and P. Pesneau, "The two-edge connected hop-constrained network design problem : Valid inequalities and Branch-and-Cut", *Networks 49 (1)*, 2007, pp. 116-133.

[4] D. Huygens, A. R. Mahjoub and P. Pesneau, "Two edge-disjoint hop-constrained paths and polyhedra", *SIAM Journal on Discrete Mathematics 18 (2)*, 2004, pp. 287-312.

[5] F. Bendali, I. Diarrassouba, M. Didi Biha, A. R. Mahjoub, J. Mailfert, "A branch-and-cut algorithm for the k-edge connected subgraph problem", *Networks 55 (1)*, 2010, pp. 13-32.