Le problème de ramassage et livraison préemptif mono-véhicule asymétrique unitaire : description polyédrale dans les cactus

Hervé L.M. Kerivin[1], Mathieu LACROIX[2], A. Ridha Mahjoub[2]

[1] Department of Mathematical Sciences, Clemson University, O-326 Martin Hall, Clemson, SC 29634, USA
kerivin@clemson.edu
[2] Laboratoire LAMSADE, Université Paris Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France
{lacroix,mahjoub}@lamsade.dauphine.fr

Mots-Clés : *Problème de ramassage et livraison préemptif mono-véhicule asymétrique unitaire, programme linéaire en nombres entiers, polyèdre, cactus.*

Le problème de ramassage et livraison mono-véhicule consiste à minimiser le trajet d'un véhicule transportant des demandes de leurs origines à leur destinations. Dans ce travail, nous nous intéressons à la version préemptive de ce problème, c'est-à-dire, lorsque les demandes peuvent être temporairement déchargées/rechargées en n'importe quel nœud du réseau. On ne considère aucune contrainte ni aucun coût additionnel sur le nombre de déchargements/rechargements. De plus, on suppose que le véhicule transporte une seule demande à la fois et traverse chaque arc du réseau au plus une fois. Ce problème, appelé *Problème de ramassage et livraison préemptif mono-véhicule asymétrique unitaire (1-PRLPA unitaire)*, peut être défini en termes de graphe comme suit. Soient $D = (V, A)$ un graphe orienté correspondant au réseau, avec $n = |V|$, et $c \in \mathbb{R}^A$ un vecteur coût associé aux arcs du graphe. Notons par v_0 le sommet correspondant au dépôt du véhicule. Considérons un ensemble $K = \{1, 2, \ldots, p\}$ de demandes. À chaque demande est associé un couple (o^k, d^k) correspondant respectivement aux sommets origine et destination de la demande k, $k \in K$. On note par Φ le graphe tel que l'ensemble des sommets correspond à l'ensemble V et l'ensemble des arcs est égal à $\{(o^k, d^k) : k \in K\}$. Le problème consiste alors à déterminer le circuit du véhicule C et un ensemble L de chemins élémentaires arc-disjoints, correspondant aux chemins des demandes, tel que le coût associé au circuit C est minimum et (C, L) forme une solution réalisable, c'est-à-dire que C forme un circuit partant du dépôt v_0 et transportant (avec déchargements/rechargements) les demandes de leurs origines à leurs destinations sur les chemins de L. Des conditions nécessaires et suffisantes [1] ont été données pour qu'un couple (C, L) forme une solution réalisable. Ces conditions reposent sur le fait que le triplet (H, v_0, L), où H est le graphe induit par le circuit C, ne contient pas une certaine structure, appelée *sous-graphe imprenable* [1]. Grâce à ces conditions nécessaires et suffisantes, nous avons alors formulé le problème à l'aide d'un programme linéaire en nombres entiers [1].

Nous nous intéressons maintenant à la description du polyèdre des solutions du problème dans le cas où le graphe D correspond à un circuit doublement orienté, c'est-à-dire qu'il existe deux arcs (u, v) et (v, u) entre deux sommets u et v adjacents. Dans ce cas, le 1-PRLPA unitaire peut se formuler de la manière suivante. Pour toute demande $k \in K$, on note par A^k l'ensemble des arcs correspondant aux deux chemins élémentaires de o^k à d^k. Pour tout arc $a \in A$, on note par K^a l'ensemble des demandes pouvant être transportées sur l'arc a, c'est-à-dire, $K^a = \{k \in K : a \in A^k\}$. Considérons les variables $(x, y) \in \{0,1\}^{2np} \times \{0,1\}^{2n}$ telles que

$$x_a^k = \begin{cases} 1 & \text{si la demande } k \text{ est transportée sur l'arc } a, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour toute demande $k \in K$ et pour tout arc $a \in A^k$, et

$$y_a = \begin{cases} 1 & \text{si le véhicule traverse l'arc } a, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tout arc $a \in A$. Soit $S(D, v_0, K)$ l'ensemble des vecteurs (x, y) associés aux solutions réalisables du 1-PRLPA unitaire. Un vecteur unitaire (x, y) appartient à $S_U(D, v_0, K)$ si et seulement s'il satisfait les contraintes suivantes

$$\sum_{a \in \delta^{\text{out}}(W)} y_a - y_{a'} \geq 0 \qquad \forall\ W \subseteq V \text{ tel que } v_0 \in W, \forall\ a' \in A(\overline{W}), \tag{1}$$

$$\sum_{a \in \delta^{\text{out}}(v)} y_a - \sum_{a \in \delta^{\text{in}}(v)} y_a = 0 \qquad \forall\ v \in V, \tag{2}$$

$$\sum_{a \in \delta^{\text{out}}(v) \cap A^k} x_a^k - \sum_{a \in \delta^{\text{in}}(v) \cap A^k} x_a^k = b_v^k \qquad \forall\ k \in K,\ \ \forall\ v \in V, \tag{3}$$

$$y_a - \sum_{k \in K^a} x_a^k \geq 0 \qquad \forall\ a \in A, \tag{4}$$

$$\sum_{a \in \delta^{\text{out}}(W)} y_a - \sum_{k \in A_\Phi(\overline{W})} \sum_{a \in \delta^{\text{out}}(W) \cap A^k} x_a^k \geq 1 \quad \forall W \subset V, v_0 \in W, A_\Phi(\overline{W}) \neq \emptyset, \delta_\Phi(W) = \emptyset. \tag{5}$$

où le nombre b_v^k, défini par

$$b_v^k = \begin{cases} 1 & \text{si } v = o^k, \\ -1 & \text{si } v = d^k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

représente le volume de la demande $k \in K$ disponible/requis associé à chaque sommet $v \in V$.

Dans ce papier, nous montrons que les contraintes (1)-(5) ne sont pas suffisantes pour décrire le polytope des solutions du 1-PRLPA unitaire même dans le cas où le graphe D est un circuit doublement orienté. Nous introduisons alors deux nouvelles familles de contraintes et montrons que ces nouvelles contraintes, avec les contraintes de la formulation, permettent d'obtenir la description du polyèdre si chaque sommet différent du dépôt v_0 est incident à au moins une demande. Nous montrons par la suite que, si le graphe D est une 1-somme de deux graphes D^1 et D^2, alors le polyèdre dans D peut être obtenu à partir de D^1 et D^2 et de certaines contraintes supplémentaires. Comme conséquence, nous obtenons la description complète du polyèdre des solutions du 1-PRLPA unitaire lorsque le graphe D est un cactus.

Références

[1] M. Lacroix. Le problème de ramassage et livraison préemptif : complexité, modèles et polyèdres., *Thèse*, Université Blaise-Pascal, Clermont-Ferrand, 2009.