Une approche d'optimisation robuste pour l'ordonnancement de projet sous contraintes de ressources avec durées incertaines

C. Artigues[1,2], R. Leus[3]

[1] CNRS ; LAAS ; 7 avenue du Colonel Roche, F-31077 Toulouse, France.
[2] Université de Toulouse ; UPS, INSA, INP, ISAE ; LAAS ; F-31077 Toulouse, France.
[3] Research group ORSTAT, Faculty of Business and Economics
K.U.Leuven, Leuven, Belgium.
`Christian.Artigues@laas.fr, Roel.Leus@econ.kuleuven.be`

Mots-Clés : *Ordonnancement de projet sous contraintes de ressources, optimisation robuste, intervalles de durées, regret min-max, méthode de décomposition*

Nous considérons un problème d'ordonnancement de projet sous contraintes de ressources (*RPCSP : Resource Constrained Project Scheduling Problem*, voir [2] pour un état de l'art) soumis à des incertitudes sur les durées. Le problème comporte n activités et la durée p_i de chaque activité $i = 1, \ldots, n$ est supposée toutefois appartenir à un ensemble fini discret P_i. Une réalisation des durées est un vecteur $\mathbf{p}$ tel que $p_i \in P_i$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. On obtient donc un ensemble $\mathcal{P} = \Pi_{i=1}^{m} P_i$ de réalisations possibles (scenarios). On dispose d'un ensemble de m ressources de disponibilités b_k, $k = 1, \ldots, m$. Chaque activité $i = 1, \ldots, n$ doit être exécutée pendant p_i unités de temps consécutives en utilisant simultanément un nombre $b_{ik} \geq 0$ (supposé connu avec précision) d'unités de chaque ressource $k = 1, \ldots, m$. De plus les activités sont soumises à des contraintes de précédence simples représentées par le graphe $G(V, E)$ où V comprend les activités plus des sommets fictifs de début et de fin 0 et $n + 1$. De manière classique, une solution du RCPSP en présence de durées incertaines est représentée par une *politique d'ordonnancement au plus tôt*, c'est-à-dire un ensemble de contraintes de précédence X ajoutées au contraintes E tel que toute antichaîne dans le graphe $G(V, E \cup X)$ donne un ensemble d'activités ordonnançables simultanément sans violer de contraintes de ressources. De plus, pour toute réalisation des durées, un ordonnancement au plus tôt $\mathbf{s}(X, \mathbf{p})$ peut être calculé à partir de X en posant $s_i(X, \mathbf{p})$ comme le plus long chemin de 0 à i dans le graphe $G(V, E \cup X, \mathbf{p})$, obtenu en valuant chaque arc par la durée de l'activité origine.

On propose de trouver une politique réalisable X qui minimise le plus grand regret (absolu ou relatif) [4, 1] par rapport à la durée totale de l'ordonnancement. Pour une réalisation des durées donnée, le regret absolu d'une solution est l'écart entre la durée totale de cette solution $s_{n+1}(X, \mathbf{p})$ et la durée totale optimale en supposant les durées connues à l'avance $s^*_{n+1}(\mathbf{p})$. Le plus grand regret d'une solution est obtenu en maximisant le regret pour toutes les réalisations possibles de durées. Si $\mathcal{X}$ représente l'ensemble des politiques réalisables, le problème de minimisation du plus grand regret absolu (AR-RCPSP) s'écrit $\min_{X \in \mathcal{X}} \max_{p \in \mathcal{P}} \left(s_{n+1}(X, \mathbf{p}) - s^*_{n+1}(\mathbf{p}) \right)$ et le problème de de minimisation du plus grand regret relatif (RR-RCPSP) s'écrit $\min_{X \in \mathcal{X}} \max_{p \in \mathcal{P}} \left(s_{n+1}(X, \mathbf{p}) - s^*_{n+1}(\mathbf{p}) \right) / s^*_{n+1}(\mathbf{p})$.

Notons que pour évaluer le regret d'une solution X pour un vecteur de durées $\mathbf{p}$, il est nécessaire de résoudre un problème NP-difficile, le RCPSP. En remarquant que $s^*_{n+1}(\mathbf{p}) = \min_{Y \in \mathcal{X}} s_{n+1}(Y, \mathbf{p})$, on peut réécrire les problèmes comme des problèmes d'optimisation bi-niveaux :

$$\text{(AR-RCPSP)} \quad \min_{X\in\mathcal{X}} \max_{Y\in\mathcal{X},p\in\mathcal{P}} (s_{n+1}(X,\mathbf{p}) - s_{n+1}(Y,\mathbf{p}))$$
$$\text{(RR-RCPSP)} \quad \min_{X\in\mathcal{X}} \max_{Y\in\mathcal{X},p\in\mathcal{P}} \frac{s_{n+1}(X,\mathbf{p}) - s_{n+1}(Y,\mathbf{p})}{s_{n+1}(Y,\mathbf{p})}$$

Nous considérons dans un premier temps le problème de deuxième niveau, NP-difficile, d'évaluation du regret maximal d'une politique X donnée. Nous montrons que pour le regret absolu, le regret maximal peut toujours être atteint sur un scenario extrême, c'est à dire tels que $p_i = \inf P_i$ ou $p_i = \sup P_i$, alors que ce n'est pas le cas pour le regret relatif. Par exemple, pour deux activités réalisables en parallèle avec $p_1 \in \{2, 3, 6\}$ et $p_2 \in \{1, 3, 5\}$, le regret maximal relatif de la politique $X = \{(1, 2)\}$ a pour valeur 1, ce qui est atteint uniquement pour $p_1 = 3$ et $p_2 = 3$. Le problème de calcul du regret maximal absolu peut être défini comme un problème de RCPSP multi-mode [5] avec fonction objectif composite qui consiste à maximiser la différence entre le plus long chemin dans $G(V, E \cup X)$ et la durée totale du RCPSP. La complexité du calcul de différentes bornes inférieures et supérieures du problème est discutée. Nous donnons aussi une formulation compacte de programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) comprenant des variables binaires pour représenter la politique Y et les choix entre les durées minimales et maximales des activités, et des variables continues pour les dates de début des activités, les flots d'unités de ressources entre les activités et le plus long chemin dans $G(V, E \cup X)$.

Nous proposons ensuite une méthode exacte de résolution de (AR-RCPSP), basée sur la considération explicite des scénarios p^h, avec $h = 1, \ldots, |\mathcal{P}|$ et de leurs solutions optimales $s^*_{n+1}(p^h)$ qui conduit à une formulation de PLNE avec un nombre exponentiel de contraintes. Nous proposons de résoudre une relaxation qui considère un nombre restreint de scenarios (voir [1, 3] pour une description de ce type d'approches dans un contexte général d'optimisation robuste), ce qui donne une borne inférieure BI du regret maximal. Par résolution du RCPSP multi-mode pour la politique X ainsi obtenue, un vecteur de durée donnant un regret plus grand que BI est calculé puis inclus dans l'ensemble restreint de scénarios et la méthode est itérée jusqu'à ce qu'un tel vecteur ne puisse être trouvé, ce qui prouve l'optimalité de BI. Nous montrons comment cette méthode peut être adaptée pour résoudre la minimisation du regret maximal relatif (RR-RCPSP).

Sur la base de résultats expérimentaux, nous montrons que notre méthode peut améliorer le schéma de résolution proposé dans [3]. Des heuristiques sont enfin proposées pour l'application de méthode d'optimisation robuste à des RCPSP de taille réaliste.

Références

[1] H. Aissi, C. Bazgan, and D. Vanderpooten. Min-max and min-max regret versions of combinatorial optimization problems : a survey. *European Journal of Operational Research*, 197:427–438, 2009.

[2] C. Artigues, S. Demassey, and E. Néron (editors). Resource-constrained project scheduling : models, algorithms, extensions and applications. ISTE-WILEY, 2008.

[3] T. Assavapokee, M.J. Real, and J.C. Ammons. A new min-max regret robust optimization approach for interval data uncertainty. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 137:297–316, 2008.

[4] I. Averbakh. Computing and minimizing the relative regret in combinatorial optimization with interval data. *Discrete Optimization* 2:273–287, 2005

[5] G. Zhu, J. F. Bard, G. Yu, A branch-and-cut procedure for the multimode resource-constrained project-scheduling problem, *INFORMS Journal on Computing*, 18:377–390, 2006.