Vers une solution équitable du jeu de production linéaire

Jean-Claude Hennet[1], Sonia Mahjoub[1,2]

[1] LSIS-CNRS ; Université de Marseille ; Avenue Escadrille Normandie Niemen, F-13297 Marseille, France
`{jean-claude.hennet, sonia.mahjoub}@lsis.org`
[2] FIESTA , ISG de Tunis, 41 rue de la liberté, 2000 Le Bardo, Tunisie

Mots-Clés : *théorie des jeux coopératifs, coalitions, programmation linéaire, dualité.*

1 Introduction

Dans un jeu coopératif, les joueurs cherchent à former une coalition afin de maximiser leur fonction d'utilité. Le jeu de production linéaire est un jeu coopératif dans lequel les joueurs possèdent des ressources et les mettent en commun pour fabriquer des biens qui procurent du profit. Ce travail étudie la compatibilité entre la formation d'une coalition viable et l'allocation équitable du profit entre les participants. Il est montré qu'en général, l'allocation duale purement compétitive ne vérifie pas la propriété d'équité. Une technique est proposée pour construire une allocation viable et équitable quand le cœur du jeu ne se réduit pas à l'ensemble des allocations compétitives.

2 Le jeu de production linéaire

Dans un jeu de production linéaire, étudié en particulier dans [2], les ressources possédées par un ensemble de joueurs peuvent être mises en commun pour maximiser le profit attendu de la production de biens. Un exemple type est la constitution d'une chaîne logistique par association opportuniste d'entreprises en réseau [1]. On note $\mathcal{R}=\{r=1,...,R\}$ l'ensemble des ressources, $\mathcal{N}=\{j=1,...,N\}$ l'ensemble des joueurs et $\mathcal{P}=\{i=1,...,P\}$ l'ensemble des produits.

Pour une coalition $\mathcal{S}\subset\mathcal{N}$ de joueurs, le vecteur $x(\mathcal{S})=[x_1(\mathcal{S})...x_P(\mathcal{S})]^T$, $x_i(\mathcal{S})\geq 0\forall i\in\mathcal{P}$, des quantités de biens à produire sur une période de référence prédéfinie est lié au vecteur $q(\mathcal{S})=[q_1(\mathcal{S})...q_R(\mathcal{S})]^T$, $q_r(\mathcal{S})\geq 0\forall r\in\mathcal{R}$, des quantités de ressources disponibles par les contraintes linéaires (1) qui caractérisent les capacités de production.

$$Ax(\mathcal{S})\leq q(\mathcal{S}) \tag{1}$$

La composante courante a_{ri} de la matrice A est non-négative. Elle représente la quantité de ressource r nécessaire à la production d'une unité de bien i. Le critère de profit à maximiser s'écrit lui aussi sous forme linéaire :

$$C(\mathcal{S})=\pi^T x(\mathcal{S}). \tag{2}$$

Le vecteur $\pi=[\pi_1...\pi_P]^T$ est le vecteur des profits unitaires par unités de produits. Ces profits unitaires sont supposés fixes et connus. Par définition, la valeur d'une coalition $\mathcal{S}$, notée $v(\mathcal{S})$, est le profit maximal $C^*(\mathcal{S})$ obtenu par maximisation de la fonction objectif (2) sous la contrainte (1).

Trouver une solution au jeu coopératif $(\mathcal{N},v)$ consiste à résoudre les deux problèmes suivants :

- maximiser la fonction d'utilité globale : $v^*=\max_{\mathcal{S}\subset\mathcal{N}}C^*(\mathcal{S})$, et trouver toutes les coalitions $\mathcal{S}$ permettant d'atteindre cette valeur,
- déterminer la part de chaque joueur $(u_i)_{i\in\mathcal{N}}$ lors du partage de v^* entre les partenaires.

On peut noter le caractère additif du second membre de la contrainte (1) : $q(\mathcal{S}) = \sum_{j \in \mathcal{S}} q(\{j\})$. On en déduit que le profit global maximal est obtenu pour la "grande" coalition, $\mathcal{N}$: $v^* = \max_{\mathcal{S}} C^*(\mathcal{S}) = C^*(\mathcal{N})$. Toutefois, la grande coalition n'est généralement pas minimale. On peut chercher aussi à minimiser le cardinal de la coalition pour laquelle le profit maximal est obtenu [1]. Une coalition sera dite optimale et notée $\mathcal{S}^*$ si elle génère le profit maximum, v^* en ayant la plus petite cardinalité.
Pour qu'une coalition soit viable, c'est à dire qu'elle puisse résoudre le jeu coopératif, il est nécessaire que la politique d'allocation $(u_j)_{j \in \mathcal{N}}$, satisfasse les conditions d'efficacité et de rationalité ci-dessous :

- efficacité (Pareto optimalité) : $\sum_{j=1}^{N} u_i = v^*$
- rationalité : $v(\mathcal{S}) \leq \sum_{j \in \mathcal{S}} u_i \quad \forall \mathcal{S} \subset \mathcal{N}$.

L'ensemble des politiques d'allocation qui vérifient les propriétés d'efficacité et de rationalité est appelé le "cœur" du jeu.

3 L'ensemble d'Owen et les solutions équitables

Une politique d'allocation particulière, appelée ensemble d'Owen, peut être obtenue à partir de la solution z^* du problème dual : minimiser $q^T(\mathcal{N})z$ sous $A^T z \geq \pi$. Cet ensemble est défini par les relations suivantes : $u_j = \sum_{r=1}^{R} q_r(\{j\}) z_r^*$. D'une façon classique, les variables duales optimales $z_r^*,\ r \in \mathcal{R}$ sont interprétées comme les coûts marginaux des ressources. Selon l'allocation des gains décrite ci-dessus, le gain de chaque joueur est égal aux quantités des ressources dont il dispose, multipliées respectivement par les coûts marginaux de ces ressources. Owen a montré que cet ensemble appartient au cœur du jeu [2]. Toutefois, on peut montrer que ce schéma d'allocation ne partage pas le profit total d'une façon équitable, car certains joueurs appartenant à la coalition $\mathcal{S}^*$ obtiennent un gain nul. Ceci peut menacer la stabilité de la coalition de cardinalité minimale, $\mathcal{S}^*$.

L'attribution d'un gain nul aux joueurs ne détenant que des ressources utilisées mais globalement excédentaires constitue une propriété de la solution d'Owen qui dérive directement de la théorie de dualité. En effet, à l'optimum du problème dual, le coût marginal d'une ressource est nul si l'addition d'une unité supplémentaire de cette ressource n'a aucun effet sur la valeur optimale du critère primal. A la lumière de cette propriété, la solution d'Owen n'assure pas une stabilité robuste de la coalition puisque les joueurs possédant uniquement des ressources en quantité marginalement excédentaire deviennent indifférents entre participer ou non à ce jeu.. A partir de cette observation, un ensemble de solutions d'allocation $w_j,\ j \in \{1, ..., N\}$, est construit à partir de la solution d'Owen $u_j,\ j \in \{1, ..., N\}$. On définit les ensembles suivants : $\mathcal{S}_0 = \{j \in \mathcal{S}^*;\ u_j = 0\}$, $\mathcal{S}_1 = \{j \in \mathcal{S}^*;\ u_j > 0\}$, $\mathcal{S}_2 = \{j \notin \mathcal{S}^*\}$. En outre, pour tout $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}$, on note, pour k=0, 1, 2, $s_k = Card(\mathcal{S}_k)$, $\Sigma_k = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}_k$ et $\sigma_k = Card(\Sigma_k)$. Le résultat de cette étude est résumé par le théorème suivant.

Théorème 1 *Il existe un ensemble d'imputations équitables qui appartient au cœur du jeu si et seulement si :*

$$\min_{S \subset \tilde{S}} \frac{s_0}{\sigma_1 s_0 - \sigma_0 s_1} \Big(\sum_{j \in \Sigma_1} u_j - v(S \cup \mathcal{S}_2) \Big) > 0, \ \textit{avec}\ \tilde{S} = \{S \subset \mathcal{S}^* \ \textit{tels que}\ \sigma_1 s_0 - \sigma_0 s_1 > 0\}. \quad (3)$$

Ce théorème permet, quand c'est possible, d'attribuer une compensation aux joueurs obtenant un gain nul selon la solution duale, en transférant une partie des gains des autres partenaires de la coalition optimale obtenant des gains positifs.

Références

[1] Hennet J.-C., Mahjoub S. A Cooperative Approach to Supply Network Design. *13ème IFAC Symp. INCOM'09, Moscou, Russie*, pp.307–324, 2009.

[2] Owen, G., On the core of linear production games. *Math. Programming*, 9, pp.358.370, 1975.