

Partage équitable de biens indivisibles et représentation compacte de préférences : une approche ordinale

Sylvain Bouveret¹, Ulle Endriss², Jérôme Lang³

¹ Onera-DTIM/DCSD. 2, av. Édouard Belin, 31055 TOULOUSE Cedex 4.

{prenom.nom}@onera.fr

² University of Amsterdam. The Netherlands

ulle.endriss@uva.nl

³ LAMSADE. Université Paris-Dauphine & CNRS, 75775 Paris Cedex 16.

lang@irit.fr

Mots-Clés : *partage, équité, représentation compacte.*

Un problème de partage équitable de biens indivisibles (voir par exemple [3]) consiste en la donnée d'un ensemble d'objets indivisibles \mathcal{V} , d'un ensemble d'agents $A = \{1, \dots, N\}$, chacun d'entre eux ayant une relation de préférence (ou une fonction d'utilité) sur $2^{\mathcal{V}}$, et il s'agit de trouver une allocation $\pi : A \rightarrow 2^{\mathcal{V}}$, telle que $\pi(i) \cap \pi(j) = \emptyset$ pour tout $i \neq j$, satisfaisant certains critères d'équité et d'efficacité. Deux critères sont fréquemment utilisés dans la littérature : l'*absence d'envie* (une allocation est sans envie si chaque agent préfère (au sens large) sa part à la part de n'importe quel autre agent), et l'*efficacité de Pareto* (il n'y a aucune autre allocation satisfaisant au moins aussi bien chaque agent et satisfaisant strictement mieux au moins un des agents). Un des paradoxes (et l'une des difficultés) du partage de biens indivisibles est que ces critères sont dans une large mesure antagonistes, puisqu'il existe des problèmes pour lesquels il n'existe pas d'allocation qui soit à la fois sans envie et Pareto-efficace. Ces deux critères sont purement ordinaux, c'est-à-dire que pour déterminer s'il existe une allocation Pareto-efficace sans envie, il suffit de connaître les préférences relatives (donc la relation de préférence) des agents sur les sous-ensembles d'objets.

Dès lors que le nombre d'objets dépasse quelques unités, il n'est pas raisonnable d'attendre des agents qu'ils spécifient leur relation de préférence *explicitement* (en énumérant tous les sous-ensembles dans l'ordre de préférence). Ce problème a déjà été remarqué dans [3, 4], qui suggèrent de faire spécifier aux agents une relation de préférence sur les *singletons*, et d'en induire une relation de préférence (partielle) sur les sous-ensemble d'objets, en faisant deux hypothèses : (a) la relation de préférence est monotone (un agent est toujours au moins aussi satisfait avec la part A qu'avec la part $B \subset A$) et (b) la préférence d'un objet i à un objet j (pour un agent donné) s'interprète toutes choses étant égales par ailleurs (*ceteris paribus*), c'est-à-dire que l'agent préfère $X \cup \{i\}$ à $X \cup \{j\}$ pour tout $X \subseteq \mathcal{V} \setminus \{i, j\}$. Cette méthode permet certes une représentation concise des préférences des agents, mais ne permet aucunement de tenir compte de dépendances préférentielles entre objets (comme «si j'ai l'objet a alors je préfère avoir b à c , sinon c à b »). D'où le besoin, pour permettre à la fois une représentation concise du problème et l'expression de dépendances préférentielles, de recourir à un *langage de représentation compacte de préférences*.

Le partage équitable avec des langages de représentation compacte a déjà été abordé d'un point de vue algorithmique, mais dans des cadres assez restrictifs (préférences dichotomiques, ou additives).

Pour ces raisons, nous avons proposé dans [2] un langage de représentation compacte, appelé CI-nets (pour *Conditional Importance Networks*), purement ordinal, pour la représentation de préférences ordinales, qui s’inspire des CP-nets [1]. Dans ce langage, les préférences s’expriment localement au moyen d’énoncés de la forme $A^+, B^- : X \triangleright Y$, interprété comme «toutes choses étant égales par ailleurs, si je possède tous les objets de A et aucun objet de B , le sous-ensemble X est préféré au sous-ensemble Y » – ainsi, si $\mathcal{V} = \{a, b, c, d, e, f\}$, l’énoncé $b^+e^- : a \triangleright c, d$ induit les préférences $\{a, b\} \succ \{b, c, d\}$ et $\{a, b, f\} \succ \{b, c, d, f\}$. Ce langage est complètement expressif, c’est-à-dire qu’il permet de représenter toutes les relations de préférences monotones sur \mathcal{V} .

Les CI-nets permettent ainsi d’exprimer des préférences de façon compacte et de résoudre des problèmes de partage équitable. La relation de préférence \succ_i de chaque agent i sur $2^{\mathcal{V}}$ est décrite par un CI-net \mathcal{N}_i . Le problème est que \succ_i n’est pas nécessairement totale, ce qui nous conduit à redéfinir l’absence d’envie et l’efficacité de Pareto comme des notions «modales» : si $\langle \succ'_1, \dots, \succ'_N \rangle$ est un N -uplet de préordres totaux étendant \succ_1, \dots, \succ_N , alors on dit que $\langle \succ'_1, \dots, \succ'_N \rangle$ est une complétion de \succ_1, \dots, \succ_N ; alors, suivant [3], une allocation π est

- *nécessairement sans envie* si π est sans envie pour toutes les complétions de \succ_1, \dots, \succ_N ;
- *possiblement sans envie* si π est sans envie pour au moins une complétion de \succ_1, \dots, \succ_N ;

Les notions d’allocation nécessairement (resp. possiblement) Pareto-efficace sont définies de façon analogue.

Dans cet exposé, nous irons au-delà de [2] (qui était focalisé sur le langage des CI-nets plus que sur son application au partage équitable) et aborderons les problèmes de complexité et d’algorithmique de la recherche d’allocations (idéalement, nécessairement efficaces et sans envie) lorsque la représentation de l’input est sous forme de CI-nets.

Références

- [1] C. Boutilier, R. I. Brafman, C. Domshlak, H. H. Hoos, and D. Poole. CP-nets : A tool for representing and reasoning with conditional ceteris paribus statements. *JAIR*, 21 :135–191, 2004.
- [2] S. Bouveret, U. Endriss, and J. Lang. Conditional importance networks : A graphical language for representing ordinal, monotonic preferences over sets of goods. In *Proceedings of IJCAI’09*, pages 67–72, Pasadena, California, July 2009.
- [3] S. J. Brams, P. H. Edelman, and P. C. Fishburn. Fair division of indivisible items. *Theory and Decision*, 5(2) :147–180, 2004.
- [4] S. J. Brams and D. King. Efficient fair division—help the worst off or avoid envy? *Rationality and Society*, 17(4) :387–421, 2005.