Analyse de sensibilité pour le problème d'équilibrage des lignes d'assemblage de type SALBP-2

Evgeny Gurevsky, Olga Guschinskaya, Alexandre Dolgui

Centre G2I, École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne
158, cours Fauriel, 42023 Saint-Étienne Cédex 2, France
{gurevsky, guschinskaya, dolgui}@emse.fr

Mots-Clés : *analyse de sensibilité, SALBP-2, optimisation combinatoire.*

Le problème d'équilibrage des lignes d'assemblage connu sous le nom SALBP-2 (Simple Assembly Line Balancing Problem of type 2, [1]) est considéré. Ce problème d'optimisation consiste à affecter un ensemble d'opérations d'assemblage, dénoté ici par $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 2$, à un nombre fixe de postes de travail, dénoté par m, $m \geq 2$. Toutes les opérations sont caractérisées par un temps d'exécution, $t_j \in \mathbf{R}_{>}$, $j \in V$. Il existe des contraintes de précédence entre les opérations qui doivent être respectées lors de l'affectation des opérations. Plus précisément, si l'opération i doit précéder l'opération j, elle ne peut pas être affectée à un poste ayant un numéro supérieur au poste d'affectation de l'opération j.

L'objectif de l'optimisation est de minimiser le temps de cycle c égal à $\max_{k \in M} t(V_k)$, où $M = \{1, \ldots, m\}$, V_k est l'ensemble des opérations affectées au k-ème poste de travail et $t(V_k) = \sum_{j \in V_k} t_j$ est la charge en temps opératoire du k-ème poste de travail. Rappelons que le problème d'optimisation de type SALBP-1 [2] porte aussi sur l'affectation des opérations aux postes de travail sous contraintes de précédence, mais il consiste à minimiser le nombre m de postes de travail avec le temps de cycle c fixe qui limite la charge autorisée des postes de travail.

Dans la formulation de base du SALBP-2, les temps opératoires sont déterministes. Cette hypothèse ne représente pas toujours la réalité industrielle. Par exemple, il a été observé que dans les lignes manuelles les temps nécessaires pour l'exécution des opérations par les opérateurs diminuent avec le temps de fonctionnement de la ligne grâce à l'effet d'apprentissage. Du fait des variations possibles dans les temps opératoires, la solution étant optimale pour les données initiales peut perdre son optimalité pour un nouvel ensemble des données. Il est alors important d'étudier la stabilité des solutions optimales et notamment de déterminer les intervalles de sensibilité, c'est-à-dire les intervalles dans lesquels les paramètres du problème peuvent être perturbés sans que la solution perde son optimalité. Ce type d'étude est appelé l'analyse de sensibilité et elle représente un des aspects fondamentaux de l'optimisation combinatoire. Il est à noter que le problème de type SALBP-1 a ainsi été analysé [3], mais, à notre connaissance, jamais le problème de type SALBP-2. Pour combler cette lacune, nous avons étudié la stabilité des solutions optimales pour ce problème et nous présentons les résultats de cette étude.

Dans notre formulation du SALBP-2, nous supposons que l'ensemble des opérations V est constitué de deux sous-ensembles disjoints $\widetilde{V}$ et $\overline{V}$. Les opérations de l'ensemble $\widetilde{V}$ ont des temps opératoires susceptibles de varier lors du fonctionnement de la ligne. Au contraire, les temps opératoires des opérations de l'ensemble $\overline{V}$ restent invariables lors du cycle de la vie de la ligne. Sans perte de généralité, nous supposons que l'ensemble $\widetilde{V} = \{1, 2, \ldots, \tilde{n}\}$ et $\overline{V} = \{\tilde{n}+1, \tilde{n}+2, \ldots, n\}$, où $0 < \tilde{n} \leq n$. Ainsi le vecteur des temps opératoires connus au moment de l'affectation des opérations et ses perturbations sont représentés par les vecteurs $t = (t_1, t_2, \ldots, t_{\tilde{n}}, t_{\tilde{n}+1}, \ldots, t_n)$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\tilde{n}}, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$ respectivement. Le vecteur des temps opératoires à un moment donné du fonctionnement de la ligne est représenté par le vecteur $t^* = (t_1 + \xi_1, t_2 + \xi_2, \ldots, t_{\tilde{n}} + \xi_{\tilde{n}}, t_{\tilde{n}+1}, \ldots, t_n)$.

Remarque 1. *Il est à noter que vu la non-négativité du temps opératoire, nous supposons que* $t_j^* = \max\{0, t_j + \xi_j\}$, $j \in \widetilde{V}$.

Remarque 2. *Etant donné que les variations des temps opératoires n'impliquent pas de modification dans les contraintes de précédence, il est évident qu'une solution faisable pour le vecteur* t *ne peut pas perdre sa faisabilité pour le vecteur* t^**, tout en sachant qu'elle peut perdre son optimalité.*

Dans ce qui suit, nous utilisons les notations suivantes :

- $S(t)$ est l'ensemble de toutes les solutions faisables obtenues pour le vecteur t ;
- $S_{\text{opt}}(t)$ est l'ensemble de toutes les solutions optimales obtenues pour le vecteur t ;
- $V^s = V_1^s \cup V_2^s \cup \ldots \cup V_m^s$ est la répartition des opérations aux postes de travail qui correspond à la solution $s \in S(t)$;
- $\Omega(\varepsilon, t) = \{t' \in \Psi(t) : ||t - t'|| < \varepsilon\}$ est l'ensemble des vecteurs t' situés dans le ε-voisinage du vecteur t, où $\varepsilon > 0$, $\Psi(t) = \{t' \in \mathbf{R}^n_{\geq} : t'_j \geq 0, j \in \widetilde{V} \ \& \ t'_j = t_j, j \in \overline{V}\}$, $||t - t'|| = \max\{|t_j - t'_j| : j \in V\}$;
- $\Xi(s, t) = \{\varepsilon > 0 : \forall t' \in \Omega(\varepsilon, t) \quad (s \in S_{\text{opt}}(t'))\}$;
- $\Upsilon(s, t) = \{\widetilde{V}_k^s : k \in M \ \& \ t(V_k^s) = c_{\min}(t)\}$, où $\widetilde{V}_k^s = V_k^s \cap \widetilde{V}$, $c_{\min}(t) = \min_{s \in S(t)} \max_{k \in M} t(V_k^s)$;
- Le rayon de stabilité $\rho(s, t), s \in S_{\text{opt}}(t)$ est utilisé en tant que mesure des intervalles de sensibilité.

Définition 1. *Une solution* $s \in S_{\text{opt}}(t)$ *est considérée stable si* $\Xi(s, t) \neq \emptyset$.

Définition 2. *Une solution* $s \in S_{\text{opt}}(t)$ *est considérée instable si* $\Xi(s, t) = \emptyset$.

Proposition 1. *Le rayon de stabilité* $\rho(s, t)$ *de la solution* $s \in S_{\text{opt}}(t)$ *peut être calculé de façon suivante :* $\rho(s, t) = \sup \Xi(s, t)$*, si* $\Xi(s, t) \neq \emptyset$ *et* $\rho(s, t) = 0$ *sinon.*

Théorème. *La solution* $s \in S_{\text{opt}}(t)$ *est stable (*$\rho(s, t) > 0$*), c'est-à-dire* $\Xi(s, t) \neq \emptyset$*, si et seulement si pour chaque* $s' \in S_{\text{opt}}(t)$ *l'inclusion* $\Upsilon(s, t) \subseteq \Upsilon(s', t)$ *est vérifiée.*

L'étude de sensibilité des solutions optimales pour SALBP-2 permet d'analyser le comportement de ces solutions face à des variations des temps opératoires. Ainsi les résultats de notre étude peuvent être utilisés par les concepteurs des lignes d'assemblages afin de privilégier les solutions qui sont non seulement optimales, mais aussi le moins sensibles aux perturbations éventuelles des temps opératoires.

Références

[1] I. Baybars. A survey of exact algorithms for the simple assembly line balancing, *Management Science*, 32(8):909–932, 1986.

[2] M.E. Salveson. The assembly line balancing problem, *Journal of Industrial Engineering*, 6(3):18–25, 1955.

[3] Yu.N. Sotskov, A. Dolgui and M.-C. Portmann. Stability analysis of an optimal balance for an assembly line with fixed cycle time. *European Journal of Operational Research*, 168(3):783–797, 2006.