Heuristiques itératives hybrides pour le sac à dos multidimensionnel à choix multiples

Igor Crévits[1], Saïd Hanafi[1], Raïd Mansi[1] et Christophe Wilbaut[1]

LAMIH, Université de Valenciennes, F 59313 Valenciennes Cedex9, France
{igor.crevits,said.hanafi,raid.mansi,christophe.wilbaut}@univ-valenciennes.fr

Mots-Clés : *Sac à dos ; Relaxation ; Fixation ; Recherche locale.*

Le problème du sac à dos multidimensionnel à choix multiples (**MMKP** pour Multi-choice Multi-dimensional Knapsack Problem) est une variante du problème du sac à dos [3]. Le MMKP est défini par un ensemble d'objets G, divisé en n groupes disjoints $G = G_1 \cup \ldots \cup G_n$, avec $G_i \cap G_{i'} = \oslash$ pour $i' \neq i \in \{1, \ldots, n\}$ et où chaque groupe G_i a $n_i = |G_i|$ objets. A chaque objet $j \in G_i$ est associé un profit c_{ij} et un ensemble de poids $A_{ij} = (a^1_{ij}, a^2_{ij}, \ldots, a^k_{ij}, \ldots, a^m_{ij})$ relatifs à m contraintes de sac à dos. Le vecteur $b = (b^1, b^2, \ldots, b^k, \ldots, b^m)$ représente l'ensemble des capacités des sacs. Plus formellement, le MMKP peut être défini comme suit

$$
(\text{MMKP}) \left\{ \begin{array}{lll}
\max & \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j \in G_i} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.c. :} & \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j \in G_i} a^i_{ij} x_{ij} \leq b^k & \forall k = 1, \ldots, m \\
 & \sum\limits_{j \in G_i} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, \ j \in G_i
\end{array} \right.
$$

L'objectif consiste à choisir un objet et un seul dans chaque groupe de façon à maximiser le profit total sans violer les contraintes de sac à dos. De nombreuses applications pratiques de ce problème peuvent être trouvées dans la littérature, par exemple dans le domaine multimédia [3] ou des télécommunications [2]. Dans cet article nous proposons d'appliquer un schéma itératif en trois phases permettant de générer une séquence de bornes supérieures et une séquence de bornes inférieures du problème, en convergeant théoriquement vers une solution optimale du problème. Ce processus itératif est enrichi par quelques ingrédients spécifiques pour le MMKP : une recherche locale et une technique de fixation de variables.

Pour encadrer au mieux la valeur optimale du problème par des bornes supérieures et inférieures, nous appliquons une méthode itérative qui vise à améliorer ces bornes à chaque itération. Le principe général de cette heuristique [6] est basé sur la résolution à chaque itération d'une relaxation du problème qui fournit une borne supérieure et génère un problème réduit. Après avoir résolu ce problème réduit pour améliorer la borne inférieure, des pseudo-coupes sont ajoutées dans le problème courant pour éliminer de l'espace de recherche les solutions déjà explorées ou dominées. Une description algorithmique de ce shéma général est donné dans l'Algorithme 1. Dans cet algorithme, nous résolvons à chaque itération la relaxation en continu $R(Q)$ du problème courant Q pour obtenir une solution $\bar{x}$. Le problème réduit $P(\bar{x})$ est obtenu en fixant les variables ayant une valeur entière dans $\bar{x}$, i.e. $P(\bar{x}) = (P \,|x_j = \bar{x}_j, \forall j \in G \text{ tel que } \bar{x}_j \in \{0, 1\})$. L'ajout d'une pseudo-coupe valide dans le problème courant (ligne 11) est explicité dans [6]. Les auteurs montrent également que ce processus général est

Algorithme 1 : Une instanciation du schéma itératif

Entrées : P : une instance du MMKP
$Q \leftarrow P$;
$x^* \leftarrow$ une solution initiale réalisable ;
$iter \leftarrow 0$, $Stop \leftarrow Faux$;
tant que *non Stop* **faire**
  $iter \leftarrow iter + 1$;
  $\bar{x} \leftarrow$ une solution optimale de $R(Q)$;
  $x \leftarrow$ une solution optimale de $P(\bar{x})$;
  si $c^T x > c^T x^*$ **alors**
    $x^* \leftarrow x$;
  fin
  Enrichir le problème Q d'une ou plusieurs pseudo-coupes ;
  si $c^T \bar{x} - c^T x^* < \epsilon$ *or* $iter > Max_{iter}$ **alors**
    $Stop = Vrai$
  fin
fin
retourner la meilleure borne inférieure $c^T x^*$ et la meilleure borne supérieure $c^T \bar{x}$;

valide pour les problèmes en variables 0-1 mixtes, et qu'il converge théoriquement vers une solution optimale du problème en un nombre fini d'itérations.
Nous utilisons dans ce travail trois relaxations : la relaxation en continu (**LP**), une relaxation appelée **MIP** dans laquelle certaines variables sont forcées à être binaires et les autres sont continues [6], et une nouvelle relaxation dite relaxation semi-continue (**RSC**) dont certaines variables sont contraintes à prendre des valeurs proches de 1 ou de 0. Cette relaxation RSC généralise les relaxations LP et MIP [4, 5]. L'algorithme est renforcé par une recherche locale de type *plus forte descente* qui exploite la structure spéciale du problème MMKP (i.e. la présence des contraintes de choix). Nous intégrons finalement des techniques de fixation usuelles pour les problèmes 0-1 MIP en exploitant les informations duales obtenues à chaque itération.

Nous avons validé nos heuristiques sur deux ensembles d'instances difficiles et corrélées, et référencées dans des travaux récents [1]. Les résultats, qui seront détaillés lors de la conférence, montrent l'efficacité de notre approche qui obtient 13 nouvelles meilleures bornes inférieures et génère également 11 meilleures bornes inférieures connues sur les 33 instances. Nos approches restent valides pour les problèmes 0-1 MIP.

Références

[1] N. Cherfi et M. Hifi. A column generation method for the multiple-choice multi-dimensional knapsack problem. *Computational Optimization and Applications*, DOI 10.1007/s10589-008-9184-7, 2008.

[2] M. Hifi, M. Michrafy et A. Sbihi. Heuristic algorithms for the multiple–choice multidimensional knapsack problem. *Journal of the Operational Research Society*, 55:1323–1332, 2004.

[3] S. Khan, K.F. Li, E.G. Manning et M. Akbar. Solving the knapsack problem for adaptive multimedia systems. *Studia Informatica, Special Issue on Combinatorial Problems*,2(2):157-178, 2002.

[4] R. Mansi, Approches Hybrides pour des Variantes du Sac à Dos et Applications, Thèse de doctorat, Université de Valenciennes, 2009.

[5] S. Hanafi, R. Mansi et C. Wilbaut. Iterative heuristic based on the semi continuous relaxation for the multiple choice multidimensional knapsack problem. Rapport de recherche,Université de Valenciennes, 2009.

[6] C. Wilbaut et S. Hanafi. New convergent heuristics for 0–1 mixed integer programming. *European Journal of Operational Research*, 195:62–74, 2009.