Nouvelles bornes inférieures pour le problème de la somme coloration

Kaoutar Sghiouer[1], Yu Li[2], Corinne Lucet[2], Aziz Moukrim[1]

[1] Université de Technologie de Compiègne, UMR CNRS 6599, Centre de Recherches de Royallieu, BP 20529 60205 Compiègne, France
{kaoutar.sghiouer, aziz.moukrim}@utc.fr
[2] MIS EA 4290, Université de Picardie Jules Vernes, 33 rue St Leu, 80000 Amiens, France
{yu.li, corinne.lucet}@u-picardie.fr

Mots-Clés : *problèmes de coloration de graphe, décomposition en cliques, bornes inférieures.*

1 Introduction

Dans cette étude, nous nous intéressons à l'élaboration de bornes inférieures pour le problème de la somme coloration(MSCP) qui est un problème dérivé de la coloration de graphe(GCP). Le problème MSCP consiste à trouver une coloration d'un graphe G, utilisant des entiers naturels, telle que la somme des couleurs est minimale. MSCP est un problème NP-Difficile [3]. Quelques résultats théoriques ont été établis dans la littérature pour le problème MSCP dans le cas de familles particulières de graphes. Mais à notre connaissance, les seuls résultats numériques pour MSCP ont été obtenus par un algorithme génétique proposé dans [1]. Récemment nous avons proposé une nouvelle famille d'algorithmes gloutons MDSAT [4] pour obtenir de nouvelles bornes supérieures pour MSCP. Afin de mesurer la qualité de ces nouvelles solutions, nous proposons des bornes inférieures obtenues par l'extraction de graphes partiels pour lesquels une solution optimale de MSCP peut être calculée.

2 Définition du problème

Une *coloration valide* d'un graphe $G = (V, E)$ est une fonction $c : v \mapsto c(v)$ associant à tout sommet $v \in V$ une couleur $c(v)$, en s'assurant que $c(v) \neq c(u)$ pour toute arête $[u, v] \in E$. *Le nombre chromatique* $\chi(G)$ d'un graphe G est le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorier G. La résolution du problème de la coloration de graphe (GCP) consiste à trouver une coloration valide utilisant $\chi(G)$ couleurs.

La résolution du problème de la somme coloration minimale de G (MSCP) consiste à trouver une coloration valide telle que $\sum_{v \in V} c(v)$ soit minimale. Cette somme coloration minimale est notée $\sum(G)$. Le plus petit nombre de couleurs utilisées pour colorier le graphe G dans une solution optimale pour MSCP est appelé *force* du graphe, et noté $s(G)$.

3 Bornes inférieures pour MSCP

Notons d'abord que si G' est un graphe partiel de G, alors la somme chromatique de G' est une borne inférieure de G. Pour calculer une borne inférieure de MSCP, il suffit alors de déterminer des graphes partiels pour lesquels nous pouvons calculer la somme chromatique en temps polynomial. Pour cela nous nous sommes intéressés aux graphes bipartis et aux décompositions en cliques.

Pour tout graphe $G = (V, E)$, nous nous intéressons à l'extraction d'un graphe biparti P de G tel que $\sum(P)$ est la plus grande possible. Même si le problème est NP-Difficile pour des graphes bipartis arbitraires, le cas particulier des arbres peut être traité en temps polynomial en utilisant l'algorithme de Kroon [2]. Nous discuterons également quelques cas particuliers basés sur les décompositions en chaînes.

Tout arbre couvrant T extrait de G est un graphe partiel de G, donc $\sum(T)$ est une borne inférieure de la somme chromatique de G. Trouver la meilleure somme chromatique en utilisant l'extraction d'arbres consiste à trouver un arbre couvrant T extrait de G tel que $\sum(T)$ est la plus grande de toutes les extractions d'arbres couvrants possibles de G.

Décomposer le graphe G en chaînes pour avoir la meilleure borne inférieure pour MSCP, consiste à trouver une décomposition avec un maximum d'arêtes, ce qui revient à résoudre le problème du couplage maximum.

Toute coloration d'une clique de taille k nécessite k couleurs avec une somme coloration associée qui vaut $\sum_1^k i = k(k+1)/2$. Nous nous sommes basés sur cette observation pour fournir une borne inférieure issue de la décomposition du graphe G en cliques. La méthode de décomposition utilisée consiste à construire le graphe complémentaire $\overline{G} = (V, (V \times V)\backslash E)$. Toute clique dans G est un stable dans $\overline{G}$, donc toute coloration de $\overline{G}$ fournit une décomposition de $\overline{G}$ en stables (classes de couleurs) $X_1, X_2, \ldots, X_l$ et donc une décomposition en cliques de G. Trouver une borne inférieure pour MSCP revient alors à trouver une partition $V_1, \ldots, V_l$ de V telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$ V_i est un stable (une classe couleur i) et $\sum \frac{|V_i|(|V_i|+1)}{2}$ est maximale. Pour obtenir les différents stables de $\overline{G}$, nous utilisons la nouvelle variante MDSAT et la solution obtenue sera une borne inférieure de G.

Les résultats numériques obtenus nous ont permis d'améliorer les bornes inférieures théoriques citées dans [1]. Nous avons également pu déterminer la somme coloration optimale pour quelques instances de la librairie DIMACS.

Références

[1] Zbigniew Kokosiński and Krzysztof Kwarciany. On sum coloring of graphs with parallel genetic algorithms. In *ICANNGA '07*, 2007.

[2] Leo G. Kroon, Arunabha Sen, Haiyong Deng, and Asim Roy. The optimal cost chromatic partition problem for trees and interval graphs. In *WG '96*, pages 279–292, 1997.

[3] Ewa Kubicka. *The chromatic sum of a graph.* PhD thesis, Western Michigan University, USA, 1989.

[4] Y. Li, C. Lucet, A. Moukrim, and K. Sghiouer. Greedy algorithms for the minimum sum coloring problem. In *International Workshop : Logistics and transport*, 2009.