Sur le polytope du p-médian et la propriété d'intersection

Mourad Baïou[1], Francisco Barahona[2], José Correa[3]

[1] CNRS, LIMOS, complexe scientifique des Cézeaux, 63173 Aubière Cedex, France
baiou@isima.fr
[2] IBM T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY 10589, USA
barahon@us.ibm.com
[3] Department of Industrial Engineering, University of Chile, Chili
joser.correa@gmail.com

Mots-Clés : *p-médian, localisation de dépôts, la propriété d'intersection.*

1 Introduction

Le problème de *localisation de dépôts* (PLD) et le problème du p-médian (pMP) sont parmi les problèmes les plus étudiés en optimisation combinatoire. Dans cet article nous considérons la version dite *collecte de prix* que nous noterons par PLD$'$ et pMP$'$, respectivement, pour les deux problèmes PLD et pMP. La donnée du problème est un graphe biparti $G = (U \cup V, A)$, non nécesssairement connexe et ne contenant pas de sommets isolés. Les arcs dans A sont dirigés de U vers V. Les sommets de U sont appelés les *clients* et ceux de V sont appelés les *localisations*. Un poids $f(v)$ est associé à chaque localisation qui correspond au revenu obtenu à l'ouverture d'un dépôt à cette localisation moins le coût de son installation. Aussi chaque arc (u, v) est muni d'un poids $c(u, v)$ qui représente le revenu obtenu en effectant le client u au dépôt installé dans la localisation v moins le coût généré par cette affectation. La différence entre PLD et PLD$'$ est que dans le premier problème chaque client *doit* être affecté à un dépôt, alors que dans le deuxième problème un client peut ne pas être affecté à aucun dépôt. Si le nombre de dépôts à installer est fixé, par exemple à p, nous obtenons, respectivement, les problèmes pMP et pMP$'$. Le PLD$'$ peut être formulé par le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\max \sum_{(u,v)\in A} c(u,v)x(u,v) + \sum_{v\in V} f(v)y(v) \tag{1}$$

$$\sum_{v:(u,v)\in A} x(u,v) \le 1 \quad \forall u \in U, \tag{2}$$

$$x(u,v) \le y(v) \quad \forall (u,v) \in A, \tag{3}$$

$$y(v) \le 1 \quad \forall v \in V, \tag{4}$$

$$x(u,v) \ge 0 \quad \forall (u,v) \in A, \tag{5}$$

$$y(v) \in \{0,1\} \quad \forall v \in V, \tag{6}$$

$$x(u,v) \in \{0,1\} \quad \forall (u,v) \in A. \tag{7}$$

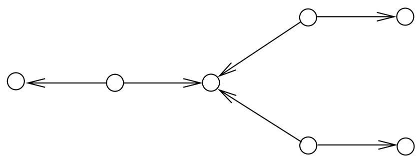

FIGURE 1 –

Si les inégalités (2) sont remplacées par des égalités, alors nous obtenons une formulation pour le PLD. Si nous ajoutons l'équation

$$\sum_{v \in V} y(v) = p \tag{8}$$

à (1)-(7), nous avons une formulation pour le pMP' et si les inégalités (2) sont remplacées par des égalités alors nous obtenons une formulation pour le pMP.

Pour un graphe biparti $G = (U \cup V, A)$, on note par $PLD'(G)$ l'enveloppe convexe des solutions du système (2)-(7), et par $pMP'(G)$ l'enveloppe convexe des solutions du sytème (2)-(8). Les polytopes $PLD(G)$ et $pMP(G)$ sont définis de la même façon. Remarquez que $PLD(G)$ est une face de $PLD'(G)$ et $pMP(G)$ est une face de $pMP'(G)$. Donc une caractérisation de $PLD'(G)$ et $pMP'(G)$ donne directement une description de $PLD(G)$ et de $pMP(G)$. Appelons $P(G)$ la relaxation linéaire de $PLD'(G)$ définie par (2)-(5), et soit $P_p(G)$ la relaxation linéaire de $pMP'(G)$ définie par (2)-(5) et (8).

2 Résultats

Nous montrons que les problèmes PLD, PLD', pMP et pMP' sont NP-complets même dans le cas restrictif où les clients ont un degré inférieur ou égal à deux et les localisations ont un degré égal à au plus trois. Ensuite, nous nous intéresserons à la relation entre les problèmes PLD' et pMP', et nous montrerons que le polytope défini par $PLD'(G)$ plus la contrainte (8) coïncide avec $pMP'(G)$ si et seulement si le graphe G ne contient pas le graphe de la Figure 1 comme un sous-graphe. Ensuite, nous considérerons des inégalités valides introduites dans [1] et nous montrerons que leur ajout à $P(G)$ donne $PLD'(G)$, dans cette même classe de graphes. Nous verrons aussi que ces inégalités peuvent être séparées en temps polynomial. En conséquence, les problèmes PLD, PLD', pMP et pMP' peuvent se résoudre en temps polynomial, par un algorithme de "plans-coupants", dans les graphes ne contenant pas le graphe de la Figure 1 comme un sous-graphe. Enfin, nous présenterons un algorithme combinatoire pour résoudre chacun de ces problèmes dans cette même classe de graphes.

Références

[1] D. C. Cho, E. L. Johnson, M. W. Padberg and M. R. Rao. On the uncapacitated plant location problem. I. Valid inequalities and facets. *Mathematics of Operations Research*, 8 :579–589, 1983.