Indicateurs d'appariement locaux pour le transport optimal en coût concave

Julie Delon[1], Julien Salomon[2],Andreĭ Sobolevskiĭ[3]

[1] LTCI CNRS, Télécom ParisTech ; 46 rue Barrault. F-75634 Paris cedex 13, France
julie.delon@enst.fr
[2] CEREMADE, Université Paris-Dauphine ; Place du Mal. de Lattre de Tassigny, F-75016 Paris, France
salomon@ceremade.dauphine.fr
[3] A. A. Kharkevich Institute for Information Transmission Problems, Moscow, CEI ; UMI 2615 CNRS
"Laboratoire J.-V. Poncelet" ansobol@mccme.ru

Mots-Clés : Transport optimal, logistique, coût concave, algorithmes d'optimisation.

Il est connu que le réarrangement monotone est la solution explicite des problèmes de transport optimal associés à des coût de transport convexes en dimension 1. Cependant, les fonctions de coût concaves s'avèrent plus adaptées à de nombreux modèles économiques. Ce type de problèmes intervient typiquement dans des questions de logistique où les économies d'échelles sont prises en compte. Ce travail porte sur la résolution numérique de problèmes de transport optimal associés à des coûts de transport concaves. Le cadre est celui de deux distributions de N sources et N puits unitaires arbitrairement répartis sur la droite R. Il s'agit de trouver l'appariement minimisant le coût de transport. Notre travail étend celui d'Aggarwal et al. [1] qui ne considérait que des coûts linéaires et apporte une solution algorithmique à la situation étudiée par McCann dans [2].

1 Règle de non-croisement et chaînes

Considérons deux ensembles $P = (p_i)_{i=1,...,N}$ et $Q = (q_i)_{i=1,...,N}$, positions de puits et de sources sur la droite réelle. Le problème que nous considérons consiste à minimiser le coût

$$C(\sigma) = \sum_{i,j} c(p_i, q_{\sigma(i)}), \tag{1}$$

où σ est une permutation de $\{1, ..., N\}$ définissant le plan de transport. Nous nous concentrons sur le cas où la fonction de coût c est concave, c'est-à-dire de la forme $c(p, q) = g(|p-q|)$ où $p, q \in \mathrm{R}$, et où $g(\cdot)$ est une fonction concave croissante à valeurs réelles positives. Nous notons $\sigma^\star$ la permutation associée à un plan de transport optimal. Pour ce type de coût, aucun croisement ne peut se produire, dans le sens où, pour toute paire de couples $(p_i, q_{\sigma^\star(i)})$ et $(p_{i'}, q_{\sigma^\star(i')})$, e.g. $p_i \le q_{\sigma^\star(i)}$ et $p_{i'} \le q_{\sigma^\star(i')}$, l'alternative suivante a lieu :

1. $[p_i, q_{\sigma^\star(i)}] \cap [p_{i'}, q_{\sigma^\star(i')})] = \emptyset$,
2. $[p_i, q_{\sigma^\star(i)}] \subset [p_{i'}, q_{\sigma^\star(i')})]$ ou $[p_{i'}, q_{\sigma^\star(i')})] \subset [p_i, q_{\sigma^\star(i)}]$.

Dans ce contexte, autant de puits que de sources se trouvent entre deux points appariés, ce qui fait que l'on peut partitionner l'ensemble des puits et des sources en chaînes, c'est-à-dire en sous-ensembles stables par le plan de transport optimal vérifiant $p_1 < q_1 < ... < p_i < q_i < p_{i+1} < q_{i+1} < ... < p_N < q_N$.

2 Indicateurs d'appariement locaux

Dans le cadre des chaînes, nous introduisons maintenant notre classe d'indicateurs.

Définition 1 (Indicateurs d'appariement locaux d'ordre k) On appelle indicateurs d'appariement locaux d'ordre k les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} I_k^p(i) &= c(p_i, q_{i+k}) + \sum_{\ell=0}^{k-1} c(p_{i+\ell+1}, q_{i+\ell}) - \sum_{\ell=0}^{k} c(p_{i+\ell}, q_{i+\ell}), \\ I_k^q(i') &= c(p_{i'+k'+1}, q_{i'}) + \sum_{\ell=1}^{k'} c(p_{i'+\ell}, q_{i'+\ell}) - \sum_{\ell=0}^{k'} c(p_{i'+\ell+1}, q_{i'+\ell}), \end{aligned}$$

où k, i vérifient $1 \leq k \leq N-1$ et $1 \leq i \leq N-k$, et où k', i' vérifient $1 \leq k' \leq N-2$ et $1 \leq i' \leq N-k'-1$.

Outre leur coût de calcul très faible et indépendant de N, l'intérêt de ces indicateurs réside dans le théorème suivant. Celui-ci indique que sous certaines hypothèses, la négativité d'un indicateur d'ordre k implique que k paires consécutives sont appariées dans un plan de transport optimal.

Théorème 1 (Indicateurs d'appariement locaux d'ordre k négatifs) Soit $k_0 \in \mathrm{N}$ tel que $1 \leq k_0 \leq N-1$ et $i_0 \in \mathrm{N}$ (resp. $i'_0 \in \mathrm{N}$) tel que $1 \leq i_0 \leq N-k_0$ (resp. $1 \leq i'_0 \leq N-k_0-1$).
Supposons que

1. $I_k^p(i) \geq 0$ pour $k = 1, ..., k_0-1$, $1 \leq i \leq N-k$,
2. $I_k^q(i') \geq 0$ pour $k = 1, ..., k_0-1$, $1 \leq i' \leq N-k-1$,
3. $I_{k_0}^p(i_0) < 0$ (resp. $I_{k_0}^q(i'_0) < 0$).

Alors, il existe un plan de transport optimal tel que la permuation $\sigma^\star$ correspondante vérifie $\sigma^\star(i) = i-1$ pour $i = i_0+1, ..., i_0+k_0$ (resp. $\sigma^\star(i) = i$ pour $i = i_0+1, ..., i_0+k_0$).

3 Algorithme

L'usage récursif de ces indicateurs débouche sur un algorithme efficace de calcul de plans de transport optimaux. La complexité de cet algorithme est N^2 dans le pire des cas et apparaît comme étant quasiment linéaire dans nos premiers tests numériques portant sur des distributions aléatoires.

Références

[1] A. Aggarwal, A. Bar-Noy, S. Khuller, D. Kravets, and B. Schieber. Efficient minimum cost matching using quadrangle inequality. In Foundations of Computer Science, 1992. Proceedings of 33rd Annual Symposium, pages 583–592, 1992.

[2] R. McCann. Exact solutions to the transportation problem on the line. Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 455(1984) :1341–1380, 1999.