Agregation des ordres d'intervalles par une optimisation propositionnelle

Daniel Le Berre[1], Pierre Marquis[1], Meltem Ozturk[2]

[1] CRIL-CNRS ; Universitéé d'Artois ; France
{leberre,marquis}@cril.fr
[2] LAMSADE-CNRS ; Université Paris Dauphine ; France
ozturk@lamsade.dauphine.fr

Mots-Clés : *aide multiricritère à la décision, choix social, agrégation des préférences, SAT, ordre d'intervalle, complexité*

1 Résumé

Agréger les préférences pour trouver un consensus entre plusieurs décideurs (votants ou agents [1]) est un sujet important pour plusieurs domaines comme l'économie, la théorie de la décision et l'intelligence artificielle. Des résultats d'impossibilité (comme la théorème d'Arrow [1]) et des paradoxes (comme celui de Condorcet [3]) ont montré la difficulté d'une telle tâche. Dans la majorité des travaux dédiés à ce sujet les préférences des votants sont supposées être sous forme d'un ordre linéaire ou un préordre. Néanmoins ces structures peuvent apparaître très restrictives lors d'applications réelles. Par exemple lorsqu'un décideur utilise une seuil d'indifférence quand il fait une comparaison entre deux objets ("je préfère a à b si et seulement si la différence entre a et b est significative, *i.e.* plus grande qu'une certaine seuil"), la structure de préférence n'est plus un ordre linéaire ou un préordre mais un ordre d'intervalle. Les ordres d'intervalles sont définis comme des relations complètes, réflexives et ce sont des relations Ferrers (*i.e.* $\forall x, y, z, t \; xPy \;\wedge\; yIz \;\wedge\; zPt \;\longrightarrow\; xPt$ [2]) ([5], [4]).

Il existe peu de travaux dans la littérature portant sur l'agrégation des ordres d'intervalle ([6]). C'est la raison pour laquelle nous nous intéressons à ce sujet dans cet article. Notre idée est de faire l'agrégation en terme de recherche de l'ordre d'intervalle qui sera "le plus proche" de l'ensemble des ordres d'intervalles des votants que nous appelons le profil. La notion de "plus proche" est calculée par la distance de Kemeny. L'utilisation de cette distance pour l'agrégation des ordres linéaires a été déjà étudiée par plusieurs auteurs qui ont montré que cette méthode est la seule méthode étant simultanément neutre, consistante et Condorcet cohérente . Malgré ces avantages de la méthode son utilisation reste restreinte par sa complexité, l'agrégation minimisant la distance de Kemeny est NP-complète ([2]. Ces résultats restant vrais dans le cas de l'agrégation des ordres d'intervalles, nous proposons dans cet article une méthode basée sur la formulation du problème en terme de propositions logiques pour pouvoir profiter des performances des solveurs de SAT. La formulation en SAT nous permet de garantir par des contraintes dures la structure finale de notre ordre qui sera un ordre d'intervalle. Nous ajoutons à ce problème une fonction objectif à minimiser calculant la distance de Kemeny des structures satisfaisant les contraintes dures. Notre problème étant devenu

[1]on peut également parler de consensus entre différents critères servant à juger des objets
[2]xPy : x est préféré à y et xIy : x et y sont indifférents

un problème de MaxSAT nous avons utilisé une formulation de type "*Binate covering problem*". Les données représentant les préférences des votants sont stockées dans une matrice de taille $n * n$, où n représente le nombre de candidats (objets) que nous nommons *matrice compacte*. Les seules entrées de notre méthode sont cette matrice et le nombre de votants. L'ensemble des variables de notre problème est en $O(n^2)$ et celui des contraintes est en $O(n^4)$. Notre méthode est très peu sensible au nombre de votants et peut être appliquée sur des instances comportant jusqu'à 40 objets. Afin de faire des tests avec notre solveur nous avons également générer des ordres d'intervalles d'une manière randomisée. Notre solveur a été également testé sur les données de la competition des solveurs de SAT 2006 où 16 solveurs ont été jugés par rapport à100 ensembles de données. Nous finissons notre article par des résultats théoriques sur les propriétés de notre méthode (comme la transitivité, l'unanimité, la majorité, l'indépendance, etc.) et l'étude de complexité de deux problèmes de choix en cas de résultats multiples.

Références

[1] K.J. Arrow. *Social choice and individual values.* J. Wiley, New York, 1951. 2nd edition, 1963.

[2] J.J. Bartholdi, C.A. Tovey, and M.A. Trick. Voting schemes for which it can be difficult to tell who won the election. *Social Choice and Welfare*, 6 :157–165, 1989.

[3] Marquis de Condorcet. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix.* Imprimerie Royale, Paris, 1785.

[4] P.C. Fishburn. *Interval Orders and Interval Graphs.* J. Wiley, New York, 1985.

[5] R.D. Luce. Semi-orders and a theory of utility discrimination. *Econometrica*, 24, 1956.

[6] M. Pirlot and Ph. Vincke. *Semi Orders.* Kluwer Academic, Dordrecht, 1997.