Sur le dominant du polyèdre des chaînes de longueur bornée

Fatiha Bendali[1], Jean Mailfert[1], Xin Tang[2]

[1] Laboratoire LIMOS-CNRS UMR 6158. Complexe scientifique des Cézeaux. 63177 Aubiere cedex. France
{bendali,mailfert}@isima.fr
[2] Laboratoire d'Informatique - Université François-Rabelais - Tours. France
xin.tang@etu.univ-tours.fr

Mots-Clés : *Polyèdre, dominant, graphe, facettes, opérations de graphes*

1 Introduction

Les problèmes de conception de réseaux de communication s'expriment naturellement dans le cadre de la théorie des graphes. Les différents concepts de connexité permettent ainsi d'assurer que toutes les parties importantes du réseau seront toujours *suffisamment* reliées. Lorsqu'on aborde les questions de qualité de service, on est alors amené à restreindre la longueur des trajectoires suivies par les flots d'information entre les nœuds du réseau pour que les délais soient assez *raisonnables*. Ainsi, le problème des chaînes de longueur bornée consiste à rechercher, entre tout couple de sommets, k chaînes arêtes disjointes comportant au plus L arêtes. Cette problématique a déjà été étudiée par de nombreux auteurs. Itai, Perl et Shiloash [6] ont montré qu'excepté pour des faibles longueurs, la détermination du nombre maximum de chaînes arêtes (sommets) disjointes, de longueur bornée par L, entre deux sommets donnés, est NP-difficile. Dans [4] Huygens et alii. ont décrit le polytope des solutions pour $k = 2$ et $L = 3$ ou 4 et dans [5], pour k quelconque et $L = 2$. Ces résultats ont été généralisés au cas de k chaînes arêtes disjointes de longueur inférieure ou égale à 3 et k quelconque [1]. Dans cette communication, nous nous plaçons dans le cas où on ne requiert qu'une chaîne de longueur inférieure ou égale à L entre deux sommets s et t du réseau. En particulier, nous étudions le dominant de ces solutions. Dans [2], Dahl caractérise le système d'inéquations nécessaires à la description du dominant quand $L \leq 3$. Avec Gouveia, [3], ils montrent que le système déterminé par Dahl s'étend facilement au cas des graphes orientés. Nous abordons le cas où $L \geq 4$ en proposant des opérations simples de composition de graphes qui permettent d'obtenir le polyèdre du graphe composé à partir des polyèdres de ses composantes.

2 Présentation du problème

La question que nous examinons consiste à rechercher, entre deux sommets s and t, une chaîne de coût minimum contenant au plus L arêtes.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, L un entier positif, s et t deux sommets distincts de V. Une L-st-chaîne est une chaîne élémentaire entre s et t avec au plus L arêtes. Notons $\mathcal{F}_L(G)$

l'ensemble des sous ensembles d'arêtes F de E pour lesquels le sous graphe (V, F) contient au moins une L-st-chaîne. Soit $x^F \in \mathbb{R}^E$ un vecteur $0-1$, tel que $x^F(e) = 1$ si $e \in F$ et $x^F(e) = 0$ sinon. Le dominant des L-st-chaînes est le polyèdre $D_L(G)$ défini par l'ensemble convexe suivant :

$$Conv\{x^F : F \in \mathcal{F}_L(G)\} + \mathbb{R}_+^E.$$

Dans [2], Dahl a montré que $D_L(G)$, pour $L \leq 3$, est défini par les inéquations ci-dessous :

$$\begin{aligned} x(\delta(W)) &\geq 1 \quad \text{pour toute } st\text{-coupe } \delta(W), W \subset V, && (1)\\ x(T) &\geq 1 \quad \text{pour toute } L\text{-coupe-chaîne } T, && (2)\\ x(e) &\geq 0 \quad \text{pour tout arête } e \in E. && (3)\end{aligned}$$

La contrainte (1) représente les contraintes de coupe séparant le sommet s de t. La contrainte (2) est une contrainte de saut définie à partir d'une partition $V_0, V_1, \ldots, V_{L+1}$ des sommets du graphe telle que $s \in V_0, t \in V_{L+1}$ et T nommé *L-coupe-chaîne*, est l'ensemble des arêtes $[u, v]$ où $u \in V_i$ and $v \in V_j$ pour $|i-j| > 1, \forall i, j \in \{0, \ldots, L+1\}$.

Nous abordons l'étude des graphes G tels que $D_L(G)$ est défini par les contraintes (1)-(3), lorsque $L \geq 4$. Tout d'abord, en notant K_n le graphe complet sur n sommets, on a :

Théorème 1 $D_L(K_{L+1})$ *est décrit par les inéquations (1) et (3).*

Théorème 2 $D_L(K_{L+2})$ *est décrit par les inéquations (1)-(3).*

Cependant, pour un graphe complet K_n tel que $n \geq L+3$ avec $L \geq 4$, nous montrons que le système d'inéquations (1)-(3) n'est pas suffisant pour décrire $D_L(K_n)$. Nous proposons une structure de graphe qui induit l'existence d'une classe de contraintes supplémentaires nécessaires à la définition de ce polyèdre.

Enfin, nous réalisons des opérations de composition du type : ajout d'une arête (ou d'une chaîne) parallèle à une arête (ou une chaîne) existante ou encore collage de deux graphes, pour obtenir à partir du dominant originel un dominant pour le graphe transformé. On prouve aussi que si les graphes d'origine sont tels que le dominant de leurs chaînes est défini par le système (1)-(3) alors le dominant des chaînes du graphe obtenu vérifie aussi cette propriété.

Références

[1] I. Diarrassouba. Survivable network design problems with high connectivity requirement, *Thèse LIMOS-Clermont Ferrand 2009.*

[2] G. Dahl. Notes on polyhedra associated with hop-constrained paths, *Operation Research Letters*, 25 :97–100, 1999.

[3] G. Dahl, L. Gouveia. On the directed hop-constrained shortest path problem, *Operation Research Letters*, 32 :15–22,2004.

[4] D. Huygens, A.R.Mahjoub, P.Pesneau. Two edge-disjoint hop-constrained paths and polyhedra, *SIAM J. Discrete Math.*, 18(2) :287–312,2004.

[5] D.Huygens, A.Ridha Mahjoub. Integer programming formulations for the two 4-hop-constrained paths problem, *Networks* ,49 :135–144,2007.

[6] A. Itai, Y. Perl, Y. Shiloach . The complexity of finding maximum disjoint paths with length constraints, *Networks*, 12 :277–286,1982.