Solutions robustes pour le problème d'expansion de capacité dans les réseaux de télécommunication avec demandes incertaines

Frédéric Babonneau[1], Olivier Klopfenstein[2], Adam Ouorou[2], Jean-Philippe Vial[1]

[1] ORDECSYS ; 4 Place de l'Étrier, CH-1224 Chêne-Bougeries, Suisse
{fbabonneau,jpvial}@ordecsys.com
[2] Orange Labs ;38-40 rue du Général Leclerc, 92794 Issy-Les-Moulineaux , France
{adam.ouorou,olivier.klopfenstein}@orange-ftgroup.com

Mots-Clés : *Réseau de télécommunication, Optimisation robuste , Règles de décision linéaires.*

Le problème d'expansion de capacité consiste à installer au moindre coût des capacités sur un réseau avec l'objectif de satisfaire des demandes incertaines. Dans la formulation proposée, nous imposons également une limite sur le nombre de chemins pouvant être utilisés pour satisfaire la demande entre chaque paire origine-destination. Le problème à résoudre est alors un problème de programmation mixte à deux étapes. En première étape, des décisions d'expansion de capacité et de chemins sont fixées, et en seconde étape, l'utilisateur doit adapter les décisions de flots aux réalisations des demandes. Notre approche utilise les techniques de l'optimisation robuste pour traiter l'incertitude et les règles de décision linéaires pour modéliser la décision de seconde étape.

1 Formulation déterministe

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des arcs ; $\mathcal{K}$ l'ensemble des paires OD k (chaque paire OR étant caractérisée par un nœud origine et un nœud extrémité) avec demande d_k ; et $\mathcal{I}_k$ la liste des chemins disponibles pour l'acheminement des flots de la paire OD k. La version chemin-flot déterministe du problème d'expansion de capacité est alors le problème mixte suivant

$$\min_{f,c,y} \quad \sum_{a\in\mathcal{A}} l_a c_a \tag{1a}$$

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{i\in\mathcal{I}_k} f_{ik}\pi^a_{ik} \le c_a, \quad a \in \mathcal{A} \tag{1b}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_k} f_{ik} = d_k, \quad k \in \mathcal{K} \tag{1c}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_k} y_{ik} \le l_k, \quad k \in \mathcal{K} \tag{1d}$$

$$f_{ik} \le M_k y_{ik}, \quad k \in \mathcal{K},\ i \in \mathcal{I}_k. \tag{1e}$$

$$f \ge 0, c \ge 0, y \in \{0, 1\}. \tag{1f}$$

Dans cette formulation, l_a est le coût unitaire d'installation de capacité sur l'arc a. Le vecteur π_{ik} a pour composante $\pi_{ik}^a = 1$ si le chemin $i \in \mathcal{I}_k$ emprunte l'arc a et 0 autrement. La variable de décision f_{ik} représente le flot de la paire OD k circulant sur le chemin i et la variable c_a correspond à la capacité à installer sur l'arc a. Les variables binaires y indiquent si un chemin peut être emprunté ou non en seconde étape. Les contraintes (1d) limitent le nombre de chemins par paire OD et les contraintes (1e) représentent les bornes supérieures pour le flot sur les chemins. Le paramètre M_k est une borne supérieure sur la demande de la paire OD k. Ainsi quand y prend pour valeur 1, le flot n'est pas contraint supérieurement et quand $y = 0$ le flot est nul, en d'autres termes, le chemin ne peut être utilisé.

2 Incertitude, optimisation robuste et règles de décision

Dans le problème d'expansion de capacité les incertitudes interviennent directement au second membre des contraintes de demandes. Le modèle adopté est celui de demandes indépendantes, non corrélées et ayant une distribution symétrique

$$d_k = \bar{d}_k + \xi_k \hat{d}_k, \tag{2}$$

où $\bar{d}_k$ représente la demande moyenne et $\hat{d}_k$ la dispersion de la demande. Les incertitudes interviennent également, mais de manière indirecte, dans les contraintes de capacité et les contraintes de bornes, par le biais des ajustements de flots requis pour satisfaire les demandes. En effet les décisions de flots de seconde étape doivent s'adapter à la demande observée et donc à l'incertitude. Nous choisissons de modéliser ces ajustements par des règles de décision linéaires qui permettent de faire dépendre une variable de décision des réalisations de l'aléa. En l'occurrence, on introduit une règle de décision sur les flots sur les chemins, potentiellement comme une fonction linéaire de l'ensemble des demandes exprimées (i.e., des incertitudes). Théoriquement fondée, cette approche conduit à des modèles de très grandes tailles sans que cette richesse d'information conduise nécessairement à de meilleures décisions. Dans [2] la règle de décision pour le flot sur les chemins de la paire OD k avait été restreinte à la demande d_k et la somme de toutes les autres demandes. On se propose de raffiner l'approche en différentiant les demandes des paires OD « voisines » de la paire OD, qui auront certainement un impact non négligeable sur les décisions de flot de la paire OD en question, et les autres qui auront un impact très limité.

Chaque variable de flot de seconde étape présente dans les contraintes du modèle est alors remplacée par sa règle de décisions linéaire. L'incertitude, qui est ainsi diffusée dans l'ensemble du modèle par le biais des règles de décision, est prise en compte dans les techniques de l'optimisation robuste. Le problème à résoudre aboutit pour finir à une formulation en programmation mixte avec un accroissement raisonnable du nombre de variables et de contraintes. En d'autres termes, le problème reste traitable et la méthodologie est appliquée et testée avec succès sur des instances de taille réaliste. Enfin les solutions, dites robustes, sont validées par simulation.

Références

[1] F. Babonneau, J.-P. Vial, and R. Apparigliato. *Handbook on "Uncertainty and Environmental Decision Making"*, chapter Robust Optimization for environmental and energy planning. International Series in Operations Research and Management Science. Springer Verlag, 2009.

[2] A. Ouorou and J.-P. Vial A model for robust capacity planning for telecommunications networks under demand uncertainty. Working paper, France Télécom Division R&D, 38-40 rue du Général Leclerc, F-92794 Issy-Les-Moulineaux, CEDEX 9, France, 2007.