# Vote et recherche opérationnelle : autour de la procédure de Condorcet

Olivier Hudry

École nationale supérieure des télécommunications

25 février 2010

# Une petite histoire électorale…

- 1770 : le Chevalier Jean-Charles de Borda (1733-1799) critique le scrutin à un tour devant l'Académie des Sciences.

- Ex. (M. Balinski) : 5 candidats Véronique ($v$), Walter ($w$), Xavier ($x$), Yasmina ($y$) et Zoé ($z$) ; 100 votants, avec des préférences transitives (un votant préférant $a$ à $b$ et $b$ à $c$ préférera aussi $a$ à $c$, ce qu'on note : $a > b > c$).

  * 33 votants : $v > w > x > y > z$ ;
  * 16 votants : $w > y > x > z > v$ ;
  * 3 votants : $x > y > w > v > z$ ;
  * 8 votants : $x > z > w > y > v$ ;
  * 18 votants : $y > z > x > w > v$ ;
  * 22 votants : $z > x > w > y > v$.

# Scrutin uninominal à un tour

* 33 votants : $v > w > x > y > z$ ;
* 16 votants : $w > y > x > z > v$ ;
* 3 votants : $x > y > w > v > z$ ;
* 8 votants : $x > z > w > y > v$ ;
* 18 votants : $y > z > x > w > v$ ;
* 22 votants : $z > x > w > y > v$.

$\Longrightarrow$ $v$ : 33 voix, $w$ : 16 voix, $x$ : 11 voix, $y$ : 18 voix, $z$ : 22 voix

**Véronique est élue**

* 33 votants : $v > w > x > y > z$ ;
* 16 votants : $w > y > x > z > v$ ;
* 3 votants : $x > y > w > v > z$ ;
* 8 votants : $x > z > w > y > v$ ;
* 18 votants : $y > z > x > w > v$ ;
* 22 votants : $z > x > w > y > v$.

Scrutin à deux tours : $v$ et $z$ restent en lice

$\Longrightarrow$ $v$ : 33 + 3 = 36 voix $z$ : 16 + 8 + 18 + 22 = 64 voix

Zoé est élue

!! Et pourtant, une majorité de votants (70 %) préfèrent $y$ (*idem* avec $w$ ou $x$) à $z$...

# Vote préférentiel (ou alternatif)

- En l'absence d'un candidat ayant une majorité absolue, on élimine le candidat *c* classé premier par le plus petit nombre de votants.

- Les électeurs de *c* reportent leurs voix sur les autres candidats selon leurs préférences.

- On recommence avec les candidats restants.

- Ex. * 33 votants : $v > w > x > y > z$ ;
  * 16 votants : $w > y > x > z > v$ ;
  * 3 votants : $x > y > w > v > z$ ;
  * 8 votants : $x > z > w > y > v$ ;
  * 18 votants : $y > z > x > w > v$ ;
  * 22 votants : $z > x > w > y > v$.

1er tour : $v = 33$ ; $w = 16$ ; $x = 11$ ; $y = 18$ ; $z = 22$ : $x$ éliminé.

2e tour : $v = 33$ ; $w = 16$ ; $y = 21$ ; $z = 30$ : $w$ éliminé.

3e tour : $v = 33$ ; $y = 37$ ; $z = 30$ : $z$ éliminé.

4e tour : $v = 33$ ; $y = 67$.

$\Longrightarrow$ Yasmina est élue

! Et pourtant, une majorité de votants (79 %) préfèrent $w$ à $y$...

# Méthode de Borda

(ou de Nicolas de Cues = Nicolas Krebs, 1401-1464)

- Si $n$ candidats, on attribue $n$ points (ici 5) à un candidat placé en tête, $n - 1$ points au candidat suivant (ici 4), etc., jusqu'au dernier qui reçoit 1 point.

- Puis on fait la somme des points (*score de Borda*) pour chaque candidat.

- Enfin, on classe les candidats selon les sommes de points décroissantes.

- Ex. * 33 votants : $v > w > x > y > z$ ;
  * 16 votants : $w > y > x > z > v$ ;
  * 3 votants : $x > y > w > v > z$ ;
  * 8 votants : $x > z > w > y > v$ ;
  * 18 votants : $y > z > x > w > v$ ;
  * 22 votants : $z > x > w > y > v$.

score de $v = 33 \times 5 + 0 \times 4 + 0 \times 3 + 3 \times 2 + 64 \times 1 = 235$

score de $w = 16 \times 5 + 33 \times 4 + 33 \times 3 + 18 \times 2 + 0 \times 1 = 347$

score de $x = 11 \times 5 + 22 \times 4 + 67 \times 3 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = 344$

score de $y = 18 \times 5 + 19 \times 4 + 0 \times 3 + 63 \times 2 + 0 \times 1 = 292$

score de $z = 22 \times 5 + 26 \times 4 + 0 \times 3 + 16 \times 2 + 36 \times 1 = 282$

$\Longrightarrow$ **Walter est élu** (puis $x$, puis $y$, puis $z$, puis $v$)

! Et pourtant, une majorité de votants préfèrent $x$ à $w$...

# Méthode de Condorcet (1743-1794)

(ou de Ramon Llull, 1232-1316)

- Méthode de comparaison par paires : pour tout candidat $i$ et tout candidat $j$, on calcule

  $m(i, j)$ = nombre de votants qui préfèrent $i$ à $j$.

- Puis application de la règle majoritaire :

  $i$ est majoritairement préféré à $j$ si $m(i, j) > m(j, i)$.

- Un vainqueur de Condorcet est un candidat $C$ préféré à chaque autre candidat par une majorité de votants :

$$\forall j \neq C,\ m(C, j) > m(j, C).$$

- Ex.

* 33 votants : $v > w > x > y > z$ ;
* 16 votants : $w > y > x > z > v$ ;
* 3 votants : $x > y > w > v > z$ ;
* 8 votants : $x > z > w > y > v$ ;
* 18 votants : $y > z > x > w > v$ ;
* 22 votants : $z > x > w > y > v$.

| | $v$ | $w$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | | 33 | 33 | 33 | 36 |
| $w$ | 67 | | 49 | 79 | 52 |
| $x$ | 67 | 51 | | 66 | 60 |
| $y$ | 67 | 21 | 34 | | 70 |
| $z$ | 64 | 48 | 40 | 30 | |

$\Longrightarrow$ Xavier est élu (Xavier est vainqueur de Condorcet)

(ordre collectif majoritaire : $x > w > y > z > v$)

# « Paradoxe du vote » (ou « Effet Condorcet »)

- Mais : 4 candidats, 9 votants avec les préférences :

  * pour 3 votants : $x > y > z > t$ ;
  * pour 2 votants : $y > t > z > x$ ;
  * pour 1 votant : $t > z > x > y$ ;
  * pour 1 votant : $x > z > y > t$ ;
  * pour 1 votant : $t > y > x > z$ ;
  * pour 1 votant : $z > t > y > x$.

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{m(x, y) = 5}$ ; $m(y, x) = 4$ ;

$\boldsymbol{m(x, z) = 5}$ ; $m(z, x) = 4$ ;

$m(x, t) = 4$ ; $\boldsymbol{m(t, x) = 5}$ ;

$\boldsymbol{m(y, z) = 6}$ ; $m(z, y) = 3$ ;

$\boldsymbol{m(y, t) = 6}$ ; $m(t, y) = 3$ ;

$\boldsymbol{m(z, t) = 5}$ ; $m(t, z) = 4$.

! *x* est majoritairement préféré à *y*, *y* à *z*, *z* à *t* et *t* à *x* !

- Cinq méthodes : cinq résultats différents.

  *« C'est une opinion généralement reçue, et contre laquelle je ne sache pas qu'on ait jamais fait d'objection, que dans une élection au scrutin, la pluralité des voix indique toujours le vœu des électeurs, c'est-à-dire que le candidat qui a obtenu cette pluralité est nécessairement celui que les électeurs préfèrent à ses concurrents. Mais […] cette opinion, qui est vraie dans le cas où l'élection se fait entre deux sujets seulement, peut induire en erreur dans tous les autres cas »*. (J.-C. Borda)

- Paradoxe du vote (effet Condorcet) : l'agrégation d'ordres totaux par la règle majoritaire ne donne pas nécessairement un ordre total.

- Quand un vainqueur de Condorcet existe, il n'est pas nécessairement choisi.

# Sur la monotonie du scrutin majoritaire à deux tours. Paradoxe du vote « utile »

Une méthode *M* est dite *monotone* si un vainqueur pour *M* reste vainqueur quand il progresse dans les préférences des votants.

- Trois candidats $x$, $y$ et $z$ ; 17 votants.

- Premier tour :
  - * 6 votants : $x > y > z$ ;
  - * 5 votants : $z > x > y$ ;
  - * 4 votants : $y > z > x$ ;
  - * 2 votants : $y > x > z$.

$\Longrightarrow$ $x$ : 6 voix, $y$ : 6 voix, $z$ : 5 voix ; $x$ et $y$ restent en lice.

- Second tour :
  - * 11 votants : $x > y$ ;
  - * 6 votants : $y > x$.

$\Longrightarrow$ $x$ est élu.

- $x$ fait une campagne de « vote utile » au détriment de $y$ :
  - * 6 votants : $x > y > z$ ;
  - * 5 votants : $z > x > y$ ;
  - * 4 votants : $y > z > x$ ;
  - * 2 votants : $x > y > z$.

$\Longrightarrow$ $x$ : 8 voix, $y$ : 4 voix, $z$ : 5 voix ; $x$ et $z$ restent en lice.

- Second tour :
  - * 8 votants : $x > z$ ;
  - * 9 votants : $z > x$.

$\Longrightarrow$ $z$ est élu

! Et pourtant, $x$ a gagné des voix au premier tour :

absence de monotonie...

# Autre paradoxe : il vaut mieux voter pour celui qu'on aime le moins pour faire gagner celui qu'on préfère !

- Trois candidats $x$, $y$ et $z$ ; 17 votants :

  * 6 votants : $x > y > z$ ;
  * 2 votants : $x > z > y$ ;
  * 5 votants : $z > x > y$ ;
  * 4 votants : $y > z > x$.

$\Rightarrow$ $x$ : 8 voix, $y$ : 4 voix, $z$ : 5 voix ; $x$ et $z$ restent en lice.

- Second tour :
  * 8 votants : $x > z$ ;
  * 9 votants : $z > x$.

$\Rightarrow$ $z$ est élu.

- Deux votants ne votent pas de manière sincère :

  * 6 votants : $x > y > z$ ;
  * 2 votants : $x > z > y$ ;
  * 5 votants : $z > x > y$ ;
  * 4 votants : $y > z > x$.

Les 2 votants : $x > z > y$ votent pour $y$.

$\Longrightarrow$ $x$ : 6 voix, $y$ : 6 voix, $z$ : 5 voix ; $x$ et $y$ restent en lice.

- Second tour :
  * $x$ : au moins 11 (= 6 + 5) voix ;
  * $y$ : au plus 6 (= 4 + 2) voix.

$\Longrightarrow$ $x$ est élu

! Les deux votants ont fait élire leur candidat préféré

en votant pour leur ennemi !

# Sur la monotonie de la méthode de Borda itérée

- Deux places à un concours, trois candidats *x*, *y*, *z*.

| | Français | Anglais | Maths | Physique |
|---|---|---|---|---|
| Coef. | 20 | 20 | 35 | 25 |
| *x* | 15 | 5 | 10 | 10 |
| *y* | 10 | 15 | 5 | 15 |
| *z* | 5 | 10 | 15 | 5 |

- Score de *x* = 200, score de *y* = 210, score de *z* = 190.

$\Rightarrow$ *y* est reçu.

- On recommence avec les deux candidats restants.

| | Français | Anglais | Maths | Physique |
|---|---|---|---|---|
| Coef. | 20 | 20 | 35 | 25 |
| $x$ | 15 | 5 | 10 | 10 |
| $z$ | 5 | 10 | 15 | 5 |

- Score de $x$ = 145, score de $z$ = 155.

$\Rightarrow$ $z$ est reçu (en plus de $y$).

- Mêmes notes, sauf une :

| | Français | Anglais | Maths | Physique |
|---|---|---|---|---|
| Coef. | 0,2 | 0,2 | 0,35 | 0,25 |
| $x$ | 15 | 5 | 10 | 0 |
| $y$ | 10 | 15 | 5 | 15 |
| $z$ | 5 | 10 | 15 | 5 |

- Score de $x$ = 175, score de $y$ = 210, score de $z$ = 215.

$\Longrightarrow$ $z$ est reçu.

- On recommence avec les deux candidats restants.

| | Français | Anglais | Maths | Physique |
|---|---|---|---|---|
| Coef. | 20 | 20 | 35 | 25 |
| $x$ | 15 | 5 | 10 | 0 |
| $y$ | 10 | 15 | 5 | 15 |

- Score de $x$ = 155, score de $y$ = 145.

$\Longrightarrow$ $x$ est reçu (en plus de $z$).

! Et pourtant, $x$ a de moins bonnes notes :

absence de monotonie...

# Méthode de Borda et paradoxe de l'ordre inverse

* 7 votants, 4 candidats :

2 votants : $x > t > z > y$

2 votants : $y > x > t > z$

3 votants : $t > z > y > x$

$\Rightarrow$ score de $x = 17$, score de $y = 16$, score de $z = 15$, score de $t = 22$

$\Rightarrow$ ordre collectif : $t > x > y > z$

* Mais $t$ ne peut assumer sa charge d'élu ; qui le remplace ?

2 votants : $x > t > z > y$

2 votants : $y > x > t > z$

3 votants : $t > z > y > x$

$\Rightarrow$ score de $x = 13$, score de $y = 14$, score de $z = 15$

$\Rightarrow$ ordre collectif : $z > y > x$

**!** Non seulement $x$ ne remplace pas $t$, mais en plus il se retrouve à la fin !

# Une variante de la méthode de Borda

- Étant donné un entier $k$, on attribue $k$ points à un candidat placé en tête, puis $k - 1$ points au candidat suivant, etc., jusqu'au $k^{\text{e}}$ candidat, auquel on attribue 1 point ; on attribue 0 point aux autres.

- Y a-t-il stabilité du vainqueur quand $k$ varie ?

* 7 votants, 4 candidats :

3 votants : $x > y > z > t$
1 votant : $y > z > x > t$
1 votant : $y > z > t > x$
2 votants : $z > t > x > y$

* Pour $k = 1$ (scrutin uninominal à 1 tour) : $x$ vainqueur.

* Pour $k = 2$ : $y$ vainqueur ($s(x) = 6$, $s(y) = 7$, $s(z) = 6$, $s(t) = 2$).

* Pour $k \geq 3$ : $z$ vainqueur (pour $k = 3$, $s(x) = 12$, $s(y) = 12$, $s(z) = 13$, $s(t) = 5$).

! Pas de stabilité !

# Vote préférentiel et vote par collèges

* 2 collèges de 13 votants chacun, 3 candidats.

1er collège :

| | |
|---|---|
| 4 votants : $x > y > z$ | $x : 4, y : 3, z : 6$ |
| 3 votants : $y > x > z$ | $\Rightarrow y$ est éliminé |
| 3 votants : $z > x > y$ | $\Rightarrow x : 7, z : 6$ |
| 3 votants : $z > y > x$ | $\Rightarrow x$ est élu par le 1er collège |

2nd collège :

| | |
|---|---|
| 4 votants : $x > y > z$ | $x : 4, y : 6, z : 3$ |
| 3 votants : $y > x > z$ | $\Rightarrow z$ est éliminé |
| 3 votants : $z > x > y$ | $\Rightarrow x : 7, y : 6$ |
| 3 votants : $y > z > x$ | $\Rightarrow x$ est élu par le 2nd collège |

Fusion des deux collèges :

$$4 + 4 = 8 \text{ votants} : x > y > z$$
$$3 + 3 = 6 \text{ votants} : y > x > z$$
$$3 + 3 = 6 \text{ votants} : z > x > y$$
$$3 \text{ votants} : z > y > x$$
$$3 \text{ votants} : y > z > x$$

$\Rightarrow x : 8, y : 9, z : 9$

$\Rightarrow x$ est éliminé

$\Rightarrow y : 17, z : 9$

$\Rightarrow y$ est élu (puis $z$, puis $x$)

$\Rightarrow$ De premier dans chaque collège, $x$ est devenu dernier !

# De l'abstentionnisme

- Paradoxe du « pêcheur à la ligne » (D. Bouyssou, P. Perny)

  4 votants : $x > y > z$
  4 votants : $z > y > x$
  3 votants : $y > z > x$

Élection à deux tours : $z$ est vainqueur.

Mais deux des quatre premiers électeurs s'abstiennent :

  2 votants : $x > y > z$
  4 votants : $z > y > x$
  3 votants : $y > z > x$

Élection à deux tours : $y$ est vainqueur et les deux pêcheurs à la ligne sont bien contents…

- Les deux nouveaux votants auraient mieux fait de s’abstenir.

- Plus généralement, dans certains cas, il vaut mieux s’abstenir que voter.

# Un théorème d'Arrow (1951, 1963) :

On suppose que les préférences des votants sont des préordres totaux et de même la préférence collective doit être un préordre total.

Propriétés : :

1. Unanimité (principe de Pareto) : si chaque votant préfère $x$ à $y$, le classement collectif doit préférer $x$ à $y$.
2. Indépendance : le classement collectif de $x$ et $y$ ne dépend que des classements individuels de $x$ et de $y$ (tant qu'aucun votant ne change sa préférence entre $x$ et $y$, le classement collectif entre $x$ et $y$ ne doit pas changer).
3. Dictature : un individu (le dictateur) impose sa préférence.

Théorème d'Arrow (au moins trois candidats et trois votants)

Il n'existe pas de procédure de l'ensemble des préordres totaux dans l'ensemble des préordres totaux qui soit à la fois unanime, indépendante et non dictatoriale.

# Autres théorèmes

- Théorème (H. Moulin, 1988) :

  Pour au moins quatre candidats (et suffisamment de votants), tout mode de scrutin choisissant le vainqueur de Condorcet, quand il existe, comme vainqueur de l'élection est sujet au paradoxe de l'abstention.

- Théorème (A. Gibbard, M. Satterthwaite, 1973, 1975) :

  Pour au moins trois candidats (et suffisamment de votants), toute méthode sans dictateur est manipulable.

# Autres procédures liées au concept de vainqueur de Condorcet

* Méthode de Charles Lutwidge Dodgson (alias Lewis Carroll, 1832-1898)

Principe : :

1. Les préférences des votants sont des ordres totaux.
2. Si un vainqueur de Condorcet existe, il est élu.
3. Sinon, choisir comme vainqueur un candidat le « plus proche d'être vainqueur de Condorcet ».

- Pour cela, on définit le *score de Dodgson* $D(x)$ de tout candidat $x$ comme le nombre minimum d'échanges de candidats consécutifs dans les préférences des votants pour que $x$ devienne vainqueur de Condorcet.
- Le vainqueur de Dodgson est le candidat $x^*$ ayant le plus petit score de Dodgson : $D(x^*) = \min D(x)$.

## * Exemple

pour 3 votants : $x > y > z > t$ ;
pour 2 votants : $y > t > z > x$ ;
pour 1 votant : $t > z > x > y$ ;
pour 1 votant : $x > z > y > t$ ;
pour 1 votant : $t > y > x > z$ ;
pour 1 votant : $z > t > y > x$.

$\boldsymbol{m(x, y) = 5}$ ; $m(y, x) = 4$ ;
$\boldsymbol{m(x, z) = 5}$ ; $m(z, x) = 4$ ;
$m(x, t) = 4$ ; $\boldsymbol{m(t, x) = 5}$ ;
$\boldsymbol{m(y, z) = 6}$ ; $m(z, y) = 3$ ;
$\boldsymbol{m(y, t) = 6}$ ; $m(t, y) = 3$ ;
$\boldsymbol{m(z, t) = 5}$ ; $m(t, z) = 4$.

- $D(x) = 2$ : $x$ doit battre $t$ ; comme $t$ n'est jamais juste devant $x$, un échange ne suffit pas ; les deux échanges pour le dernier votant entre $y$ et $x$ puis entre $t$ et $x$ suffisent.
- $D(y) = 1$.
- $D(z) = 3$.
- $D(t) = 3$.

Ici, $y$ est le vainqueur de Dodgson.

# Autres procédures liées au concept de vainqueur de Condorcet

* Méthode de Peyton Young (1977)

Principe : :

1. Les préférences des votants sont des ordres totaux.
2. Si un vainqueur de Condorcet existe, il est élu.
3. Sinon, supprimer un nombre minimum de votants pour faire apparaître un vainqueur de Condorcet.

- Pour cela, on définit le *score de Young* $Y(x)$ de tout candidat $x$ comme le nombre minimum de votants à supprimer pour que $x$ devienne vainqueur de Condorcet.
- Le vainqueur de Young est le candidat $x^*$ ayant le plus petit score de Young : $Y(x^*) = \min Y(x)$.

## * Exemple

pour 3 votants ($a$, $b$, $c$) : $x > y > z > t$ ;
pour 2 votants ($d$, $e$) : $y > t > z > x$ ;
pour 1 votant ($f$) : $t > z > x > y$ ;
pour 1 votant ($g$) : $x > z > y > t$ ;
pour 1 votant ($h$) : $t > y > x > z$ ;
pour 1 votant ($i$) : $z > t > y > x$.

$\boldsymbol{m(x, y) = 5}$ ; $m(y, x) = 4$ ;
$\boldsymbol{m(x, z) = 5}$ ; $m(z, x) = 4$ ;
$m(x, t) = 4$ ; $\boldsymbol{m(t, x) = 5}$ ;
$\boldsymbol{m(y, z) = 6}$ ; $m(z, y) = 3$ ;
$\boldsymbol{m(y, t) = 6}$ ; $m(t, y) = 3$ ;
$\boldsymbol{m(z, t) = 5}$ ; $m(t, z) = 4$.

- $Y(x) = 2$.
- $Y(y) = 2$.
- $Y(z) = 4$ : $z$ doit battre $y$ ; l'écart majoritaire entre $y$ et $z$ $(6 - 3)$ fait qu'il faut retirer au moins 4 votants ; retirer $a$, $b$, $d$ et $h$ suffit.
- $Y(t) = 4$.

$c$ : $x > y > z > t$ ;
$e$ : $y > t > z > x$ ;
$f$ : $t > z > x > y$ ;
$g$ : $x > z > y > t$ ;
$i$ : $z > t > y > x$.

Ici, $x$ et $y$ sont les vainqueurs de Young.

# Autres procédures liées au concept de vainqueur de Condorcet

* Méthode de Condorcet-Kemeny (1959)

Principe : :

1. Les préférences des votants sont des ordres totaux.
2. Si un vainqueur de Condorcet existe, il est élu.
3. Sinon, déterminer les ordres totaux les plus proches (pour la distance de la différence symétrique) et considérer le premier candidat de chacun de ces ordres comme vainqueur.

# Modélisations de la procédure de Condorcet-Kemeny

Données : une collection $\Pi = (O_1, O_2, \ldots O_m)$ de $m$ ordres totaux définis sur un ensemble $X$ de $n$ candidats.

Pour chaque ordre $O_i$ ($1 \leq i \leq m$), on définit le vecteur caractéristique $(\omega^i_{xy})_{(x,\, y) \in X^2}$ par

$$\omega^i_{xy} = 1 \text{ si } xO_iy \text{ et } \omega^i_{xy} = 0 \text{ sinon.}$$

De même pour un ordre $O$, v.c. $(\omega_{xy})_{(x,\, y) \in X^2}$ déf. par

$$\omega_{xy} = 1 \text{ si } xOy \text{ et } \omega_{xy} = 0 \text{ sinon.}$$

Distance de la différence symétrique $\delta(O_i, O)$ :

$$\delta(O_i, O) = |O_i \,\Delta\, O| = \Sigma_{(x,\, y) \in X^2} |\omega^i_{xy} - \omega_{xy}|$$

$$= \text{nombre de désaccords entre } O_i \text{ et } O.$$

Comme $(\omega^i_{xy}, \omega_{xy}) \in \{0, 1\}^2$ :

$$|\omega^i_{xy} - \omega_{xy}| = (\omega^i_{xy} - \omega_{xy})^2 = \omega^i_{xy} - 2\omega^i_{xy}\omega_{xy} + \omega_{xy}$$

Éloignement $E(\Pi, O)$ = nbre total de désaccords entre $O$ et $\Pi$ :

$$E(\Pi, O) = \Sigma_{1 \leq i \leq m} \Sigma_{(x,\, y) \in X^2} |\omega^i_{xy} - \omega_{xy}|$$

$$= n(n-1)m/2 + \Sigma_{(x,\, y) \in X^2} (m - 2m_{xy})\omega_{xy}$$

avec, pour $(x, y) \in X^2$, $m_{xy} = \Sigma_{1 \leq i \leq m} \omega^i_{xy} = m(x, y)$.

Remarque : $(m - 2m_{xy}) + (m - 2m_{yx}) = 2m - 2(m_{xy} + m_{yx}) \neq 0$.

## Problème d'optimisation combinatoire :

déterminer un ordre total $O^*$ (= ordre médian de $\Pi$) vérifiant

$$E(\Pi, O^*) = \min\{E(\Pi, O) \text{ pour } O \text{ ordre total sur } X\}.$$

## Sous forme de PL-{0, 1} :

$$\text{minimiser } \Sigma_{(x,\, y) \in X^2} (1 - 2m_{xy})\omega_{xy}$$

ou

$$\text{maximiser } \Sigma_{(x,\, y) \in X^2} (2m_{xy} - 1)\omega_{xy}$$

avec :

$$\forall\, (x, y) \in X^2,\ x \neq y,\ \omega_{xy} + \omega_{yx} = 1$$

$$\forall\, (x, y, z) \in X^3,\ x \neq y \neq z \neq x,\ \omega_{xy} + \omega_{yz} - \omega_{xz} = 1$$

$$\forall\, (x, y) \in X^2,\ \omega_{xy} \in \{0, 1\}.$$

# Modélisations à l'aide de graphes orientés complets

On associe à $\Pi$ un graphe orienté $G = (X, U)$ complet et pondéré :

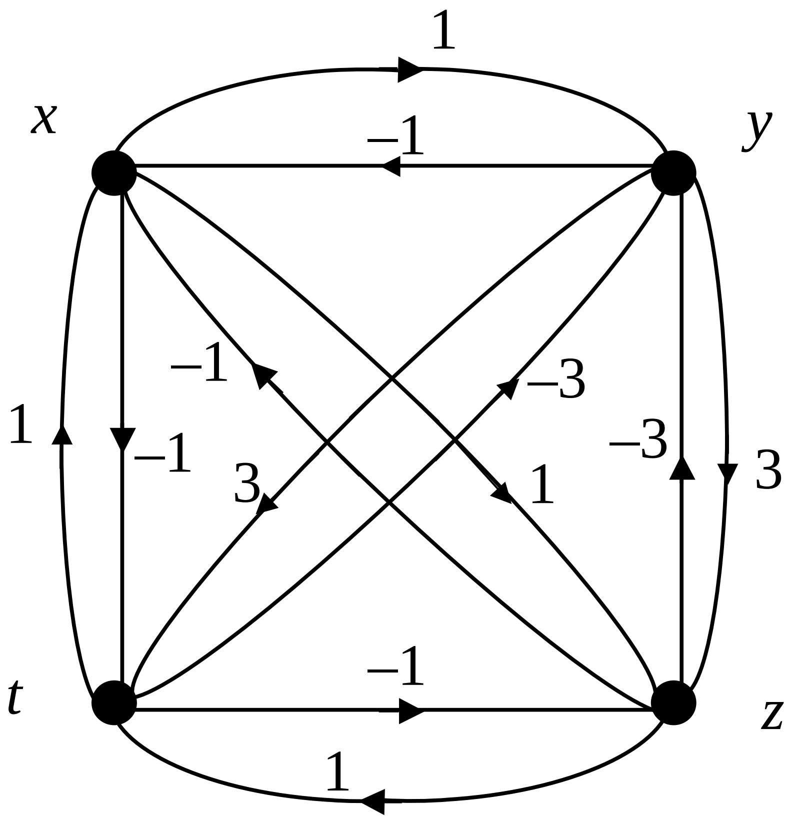
- $X$ = ensemble des candidats ;
- $U = X \times X - \{(x, x) \text{ pour } x \in X\}$ ;
- un arc $(x, y)$ est pondéré par $2m_{xy} - 1$.

On veut alors extraire de $G$ des arcs formant un ordre total et de poids total maximum.

## * Exemple : $n = 4$, $m = 9$

pour 3 votants : $x > y > z > t$ ;
pour 2 votants : $y > t > z > x$ ;
pour 1 votant : $t > z > x > y$ ;
pour 1 votant : $x > z > y > t$ ;
pour 1 votant : $t > y > x > z$ ;
pour 1 votant : $z > t > y > x$.

$\boldsymbol{m(x, y) = 5}$ ; $m(y, x) = 4$ ;
$\boldsymbol{m(x, z) = 5}$ ; $m(z, x) = 4$ ;
$m(x, t) = 4$ ; $\boldsymbol{m(t, x) = 5}$ ;
$\boldsymbol{m(y, z) = 6}$ ; $m(z, y) = 3$ ;
$\boldsymbol{m(y, t) = 6}$ ; $m(t, y) = 3$ ;
$\boldsymbol{m(z, t) = 5}$ ; $m(t, z) = 4$.




Vainqueur de Kemeny : $x$
et ordre de Kemeny :
$x > y > z > t$

# Modélisations à l’aide de tournois

- Information redondante :

$$\forall\ (x, y) \in X^2,\ m_{xy} + m_{xy} = m$$

ou, pour les graphes :

$$\forall\ \ (x, y) \in X^2,\ (m - 2m_{xy}) + (m - 2m_{yx}) = 0.$$

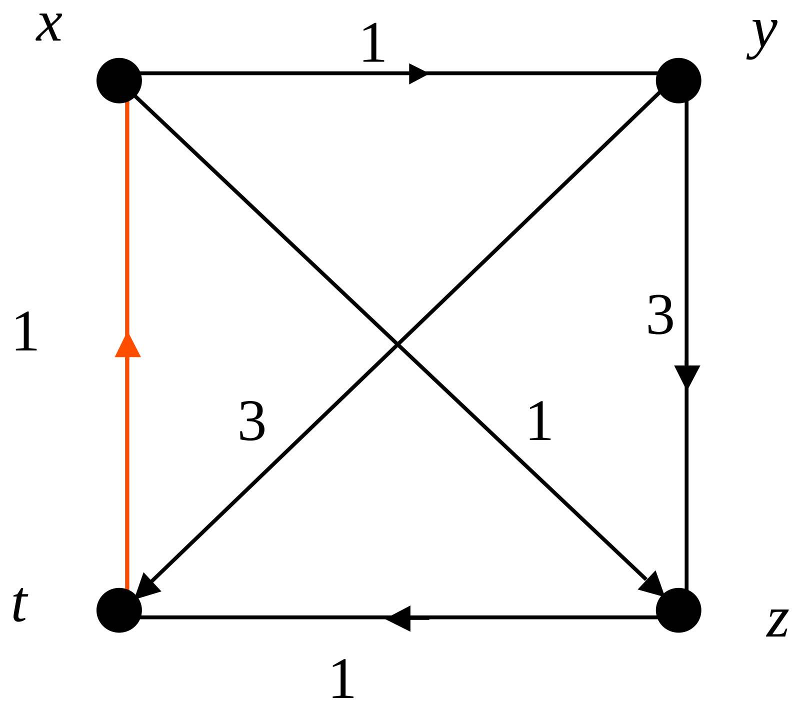
→ On ne garde que les arcs de poids positifs. On obtient un tournoi pondéré $T$ (tournoi majoritaire).

- Le problème devient : déterminer un ensemble d’arcs de poids minimum dont l’inversion rend $T$ transitif.

## * Exemple : $n = 4$, $m = 9$

pour 3 votants : $x > y > z > t$ ;
pour 2 votants : $y > t > z > x$ ;
pour 1 votant : $t > z > x > y$ ;
pour 1 votant : $x > z > y > t$ ;
pour 1 votant : $t > y > x > z$ ;
pour 1 votant : $z > t > y > x$.

$\boldsymbol{m(x, y) = 5}$ ; $m(y, x) = 4$ ;
$\boldsymbol{m(x, z) = 5}$ ; $m(z, x) = 4$ ;
$m(x, t) = 4$ ; $\boldsymbol{m(t, x) = 5}$ ;
$\boldsymbol{m(y, z) = 6}$ ; $m(z, y) = 3$ ;
$\boldsymbol{m(y, t) = 6}$ ; $m(t, y) = 3$ ;
$\boldsymbol{m(z, t) = 5}$ ; $m(t, z) = 4$.




Vainqueur de Kemeny : $x$
et ordre de Kemeny :
$x > y > z > t$
par inversion de l'arc $(t, x)$

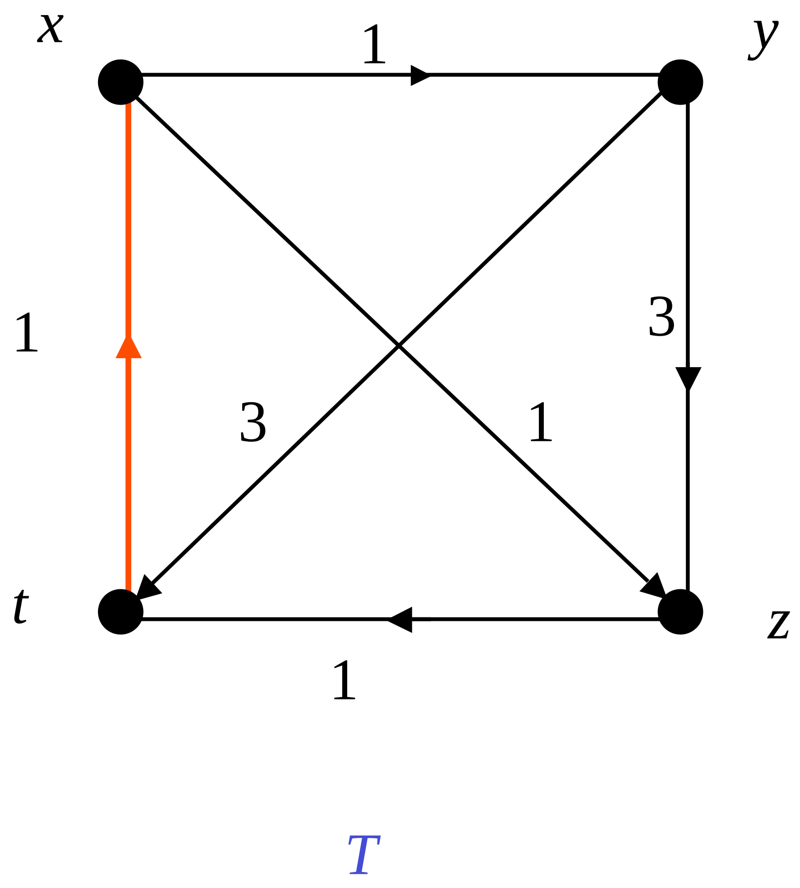
# Autres modélisations à l'aide de tournois

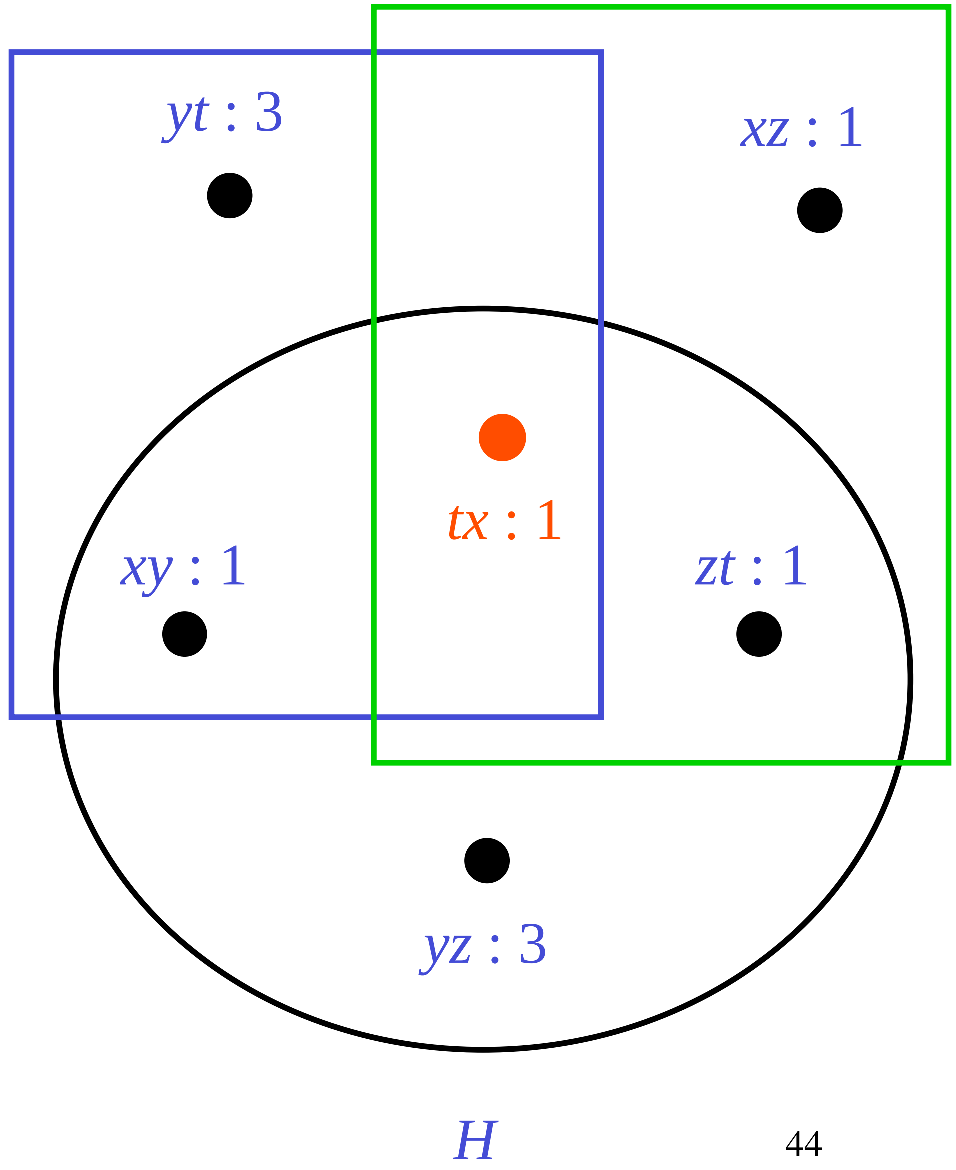
- Déterminer un ensemble d'arcs de poids minimum dont la suppression dans *T* détruit tous les circuits (*feedback arcset problem*).

- Déterminer un ensemble d'arcs de poids maximum engendrant un graphe partiel de *T* sans circuit (*maximum acyclic problem*).

- L'hypergraphe des circuits de *T* est l'hypergraphe *H* dont les sommets sont les arcs de *T* et les arêtes sont les circuits de *T*. On pondère les sommets de *H* par le poids des arcs associés. Déterminer un transversal (couverture des arêtes par des sommets) de *H* de poids minimum.

## * Exemple :



# Résultats de complexité

## Procédures polynomiales

**Théorème 1**

- Le mode de scrutin uninominal à un tour est polynomial en $O(n + m)$.
- Le mode de scrutin uninominal à un tour est polynomial en $O(n + m)$.
- Le vote préférentiel est polynomial en $O(nm + n^2)$.
- La procédure de Borda est en $O(nm)$.
- Quand il existe un vainqueur de Condorcet, sa détermination peut se faire en $O(n^2m)$.

# Résultats de complexité

## Procédures NP-difficiles

**Théorème 2**

- La détermination des scores et des vainqueurs de Dodgson est un problème NP-difficile (J.J. Bartholdi III, C.A. Tovey, A. Trick, 1989 ; E. Hemaspaandra, L. Hemaspaandra, J. Rothe 1997).

**Théorème 3**

- La détermination des scores et des vainqueurs de Young est un problème NP-difficile (J. Rothe, H. Spakowski, J. Vogel, 2003).

# Résultats de complexité

## Procédures NP-difficiles

**Théorème 4**

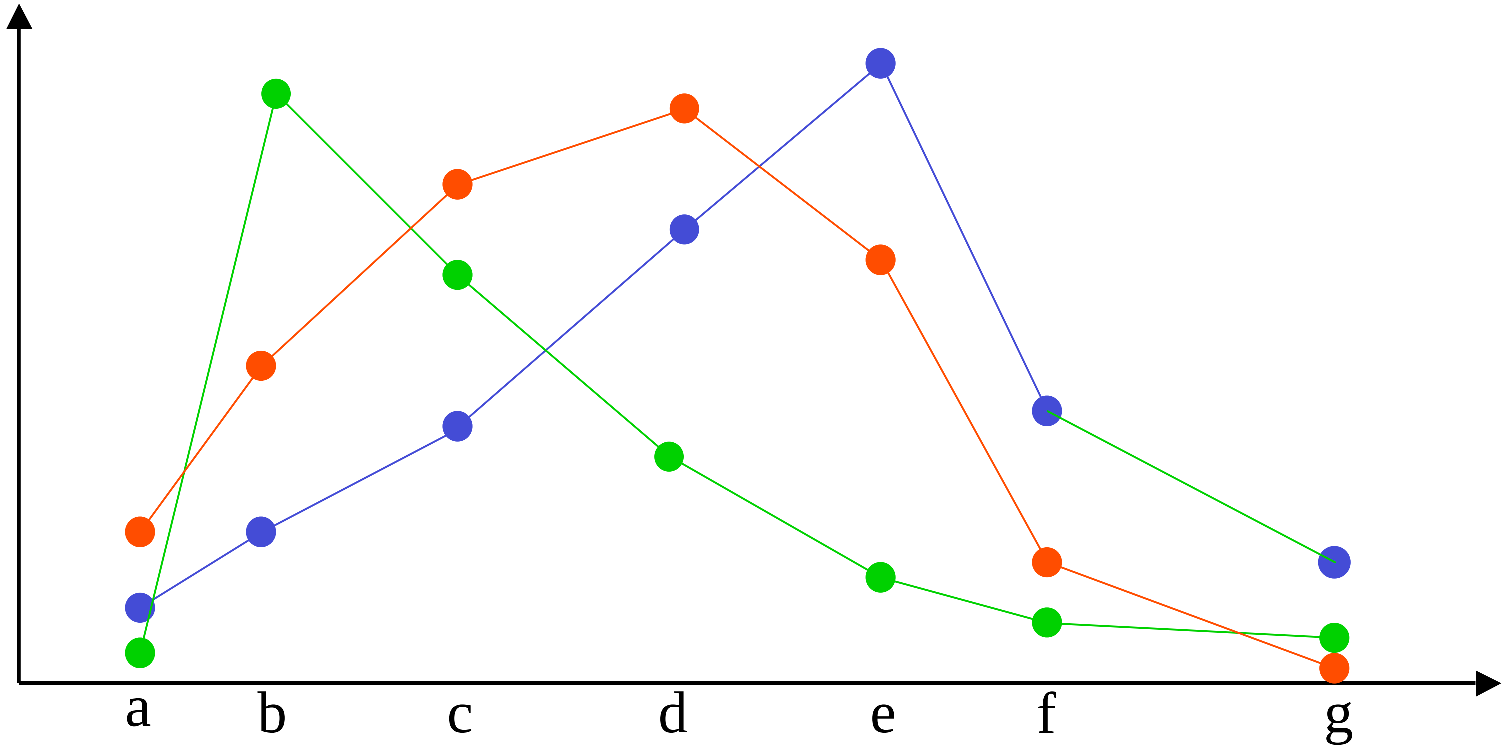
1. La détermination d'un ordre total médian (procédure de Condorcet-Kemeny) est un problème NP-difficile (J. Orlin, 1981 ; J.J. Bartholdi III, C.A. Tovey, M.A. Trick, 1989 ; O.H., 1989 ; E. Hemaspaandra, H. Spakowski, J. Vogel, 2005) et le reste pour tout $m$ fixé pair $\geq 4$ (C. Dwork, R. Kumar, M. Naor, D. Sivakumar, 2001).

2. L'extension à d'autres structures ordonnées (préordres totaux, ordres d'intervalles…) donne souvent des problèmes NP-difficiles (Y. Wakabayashi, 1986, 1998 ; O.H., 1989, 2008).

# Cas des ordres unimodaux

- On suppose que l'on peut répartir les candidats sur une échelle (indépendante des votants) allant de l'extrême gauche à l'extrême droite.
- Un ordre, représentant la préférence d'un votant *V*, est dit *unimodal* (pour cette échelle) s'il existe un candidat *x* préféré de *V* tel que, plus on s'éloigne de *x* à droite ou à gauche, plus la préférence de *V* devient faible.
- L'agrégation d'ordres unimodaux par la méthode de Condorcet est un ordre unimodal (D. Black, 1958).

# Ordres unimodaux : exemple




Vert : $b > c > d > e > f > g > a$

Rouge : $d > c > e > b > a > f > g$

Bleu : $e > d > f > c > g > b > a$

$\rightarrow$ $d > c > e > b > f > g > a$

# Élections régionales de 2010

- Deux tours.
- Listes régionales avec sections départementales.
- Principe : soit $L$ la liste régionale qui obtient la majorité des voix. Alors :

  - $L$ reçoit un quart des sièges régionaux ;

  - les autres sièges régionaux sont répartis entre les listes (y compris $L$) selon la proportionnelle à la plus forte moyenne ;

  - pour chaque liste régionale, la répartition des sièges départementaux est déterminée selon la proportionnelle à la plus forte moyenne.

# Scrutin de liste proportionnel à la plus forte moyenne (méthode de Jefferson ou d'Hondt)

- On attribue les sièges les uns après les autres.
- Pour chaque liste $L$, soit $n_L$ le nombre de voix de $L$.
- Quand on attribue le siège courant :

- pour chaque liste $L$, soit $s_L$ le nombre de sièges déjà attribués à $L$ ;

- on attribue le siège courant à la liste $L$ qui maximise le rapport $n_L / (s_L + 1)$.

- Ex. : 3 listes $A$, $B$, $C$ ; 5 sièges ;
  $v_A = 936$, $v_B = 623$, $v_C = 488$.

- 1$^{er}$ siège : A : 936 / 1 ; B : 623 / 1 ; C : 488 / 1
  1$^{er}$ siège attribué à A.

- 2$^{e}$ siège : A : 936 / 2 = 463 ; B : 623 / 1 ; C : 488 / 1
  2$^{e}$ siège attribué à B.

- 3$^{e}$ siège : A : 936 / 2 = 463 ; B : 623 / 2 = 311,5 ; C : 488 / 1
  3$^{e}$ siège attribué à C.

- 4$^{e}$ siège : A : 936 / 2 = 463 ; B : 623 / 2 = 311,5 ; C : 488 / 2 = 244
  4$^{e}$ siège attribué à A.

- 5$^{e}$ siège : A : 936 /3 = 312 ; B : 623 / 2 = 311,5 ; C : 488 / 2 = 244
  5$^{e}$ siège attribué à A.

*A* : 3 sièges, *B* : 1 siège, *C* : 1 siège.

# Règle des quotas pour les scrutins de liste proportionnels

* Un scrutin de liste respecte la règle des quotas s'il attribue à chaque liste $L$ un nombre de sièges égal à la partie entière par défaut ou par excès du quota de $L$.

* La méthode de la plus forte moyenne ne respecte pas la règle des quotas. Ex. : 2 sièges ; 6 listes $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ ; 9 votants ; $v_A = 4$ ; $v_B = v_C = v_D = v_E = v_F = 1$.

Répartition : 2 sièges à $A$, rien aux autres.

Et pourtant les quotas valent 0,89 pour $A$ et 0,22 pour les autres.

# Paradoxe du transfert de population

•Ex. : 3 listes $A$, $B$, $C$ ; 5 sièges ; $n_A = 936$, $n_B = 623$, $n_C = 488$.

$A$ : 3 sièges, $B$ : 1 siège, $C$ : 1 siège.

! Mais : si 3 votants migrent de $C$ vers $B$ :

$v_A = 936$, $v_B = 626$, $v_C = 485$.

$\Rightarrow$ $A$ : 2 sièges, $B$ : 2 sièges, $C$ : 1 siège.

!! *A* perd un siège, et pourtant son électorat n'a pas changé...

## Avons-nous tous le même poids dans une élection ?

* Pour une élection présidentielle : oui !

* Pour une élection législative : non ! Ex. (recensement de 1999) :
  - 2e circonscription de Lozère : 34 374 habitants ;
  - 2e circonscription du Val d'Oise : 188 200 habitants.
  - Rapport : 188 200/34 374 = 5,48 !

* Conseils généraux : encore moins ! Ex. :
  - canton de Fréjus (Var) : 50 536 habitants ;
  - canton de Comps-sur-Artuby (Var) : 1 109 habitants.
  - Rapport : 50536/1109 = 45,6 !

# Une mesure du pouvoir

- 6 partis dans une assemblée de 31 députés (majorité = 16) :

    * *A* : 10 députés
    * *B* : 9 députés
    * *C* : 7 députés
    * *D* : 3 députés
    * *E* : 1 député
    * *F* : 1 député.
- Quel pouvoir *E* possède-t-il pour une décision majoritaire ?

Aucun ! Les décisions ne dépendent que de *A*, *B* et *C* !

- 6 partis dans une assemblée de 33 députés (majorité = 17) :
  * $A$ : 10 députés
  * $B$ : 9 députés
  * $C$ : 7 députés
  * $D$ : 3 députés
  * $E$ : 3 députés
  * $F$ : 1 député.
- Le pouvoir de $E$ augmente : la coalition $\{A, D, E, F\}$ est majoritaire (17 voix) mais pas la coalition $\{A, D, F\}$ (14 voix).

$\Longrightarrow$ Indice de pouvoir de J. Banzhaf de $X$ :

$b(X)$ = nombre de coalitions que $X$ rend majoritaires

Ex. : $b(E) = 2$ : $\{A, D, E, F\}$ et $\{B, C, E\}$.

# Comment $E$ peut-il accroître son pouvoir ?

- En augmentant son nombre de députés.
- En faisant croître le nombre de députés d'autres formations afin d'augmenter le nombre de coalitions qu'il rend majoritaires.
- Ex. : 33 députés (majorité = 17) :

  * $A$ : 12 députés
  * $B$ : 9 députés
  * $C$ : 7 députés
  * $D$ : 3 députés
  * $E$ : 1 député
  * $F$ : 1 député.

$\Longrightarrow$ $b(E) = 2$ : $\{A, D, E, F\}$ et $\{B, C, E\}$.

! Le pouvoir de $E$ augmente, et pourtant sa représentativité diminue...

Merci de votre attention !

# Quelques références bibliographiques


Irène Charon, Olivier Hudry, « A survey on the linear ordering problem for weighted or unweighted tournaments », *4OR* 5 (1), 2007, 5-60.

Olivier Hudry, « Votes et paradoxes : les élections ne sont pas monotones ! », *Mathématiques et Sciences humaines - Mathematics and Social Sciences* 163, 9-39, 2003.

Olivier Hudry, « Complexity of voting procedures », in *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, sous la direction de R. Meyers, Springer, New York, 2009.

# Short bibliography

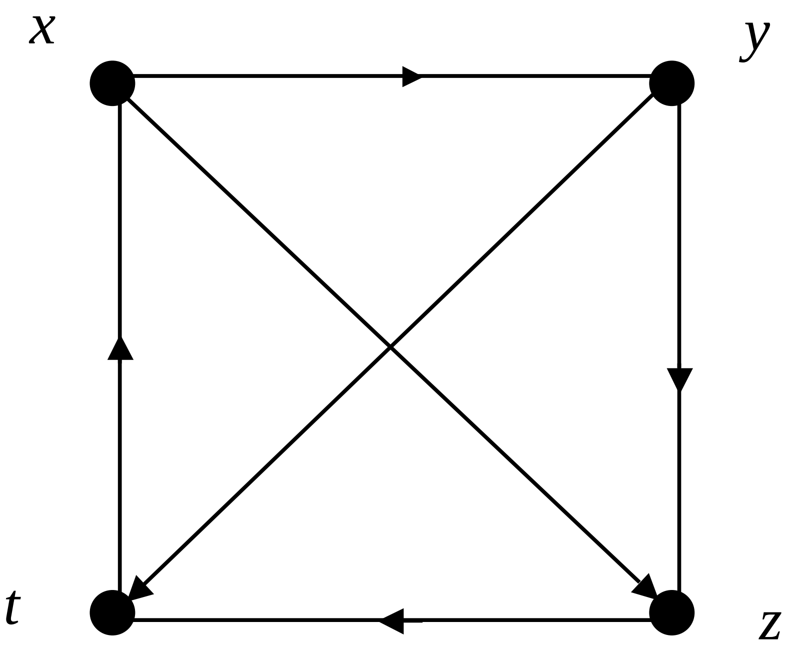

- P. Fishburn (1977) Condorcet social choice functions, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 33, 469-489.
- O. Hudry, A survey on the complexity of tournament solutions, to appear in *Mathematical Social Sciences*.
- J.-F. Laslier (1997) *Tournament Solutions and Majority Voting*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- J. W. Moon (1968) *Topics on tournaments,* Holt, Rinehart and Winston, New York.
- H. Moulin (1986) Choosing from a tournament, *Social Choice and Welfare* 3: 272-291.


Thank you for your attention!

# Tournoi majoritaire, solution de tournois

- On peut considérer le tournoi majoritaire non pondéré associé à $\Pi$.

- Ex. :




- Solution de tournoi

  Application $S$ qui associe à chaque tournoi $T = (X, U)$ un sous-ensemble non vide de $X$ (les vainqueurs) et qui est stable par isomorphisme : si $f$ est un isomorphisme de $T$ vers $R$, alors $S(R) = f(S(T))$.

# Propriétés des solutions de tournoi $S$

Soit $T = (X, A)$ un tournoi.

- Cohérence au sens de Condorcet :

  S'il existe un vainqueur de Condorcet $C$, alors $S$ sélectionne $C$:

  $$S(T) = \{C\}.$$

- Cohérence au sens de Smith :

  S'il existe $Y \subset X$ vérifiant $\forall\ y \in Y, \forall\ x \in X - Y$, $(y, x) \in A$, alors $S$ sélectionne les vainqueurs dans $Y$ : $S(T) \subseteq Y$.

  – Si $S$ est Smith-consistante, alors $S$ est Condorcet-consistante.

- Monotonie :

  Soient $x$ et $y$ deux sommets de $T = (X, A)$ avec $(y, x) \in A$. Soit $T'$ le tournoi obtenu à partir de $T$ en inversant $(y, x)$ (donc $(x, y)$ appartient à $T'$). On dit que $S$ est *monotone* si :

  $$x \in S(T) \Rightarrow x \in S(T').$$

  Autrement dit, un vainqueur reste vainqueur quand il progresse dans les préférences des votants.

- Indifférence par rapport aux non-vainqueurs (propriété du sur-ensemble fort, SSP) :

  $S$ vérifie (SSP) si l'ensemble des vainqueurs n'est pas modifié quand on élimine des candidats non vainqueurs :

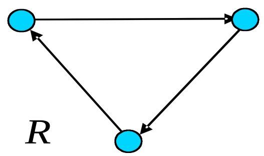
  $$\text{pour tout } Y \text{ avec } S(T) \subseteq Y,\ S(T_{/Y}) = S(T),$$

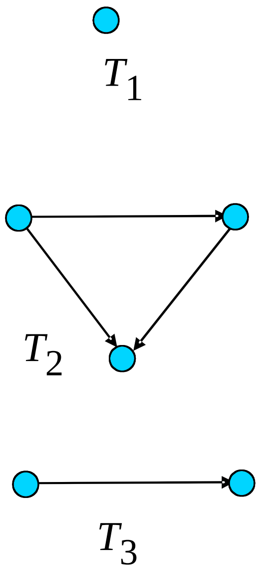
  où $T_{/Y}$ représente le sous-tournoi induit par $Y$.

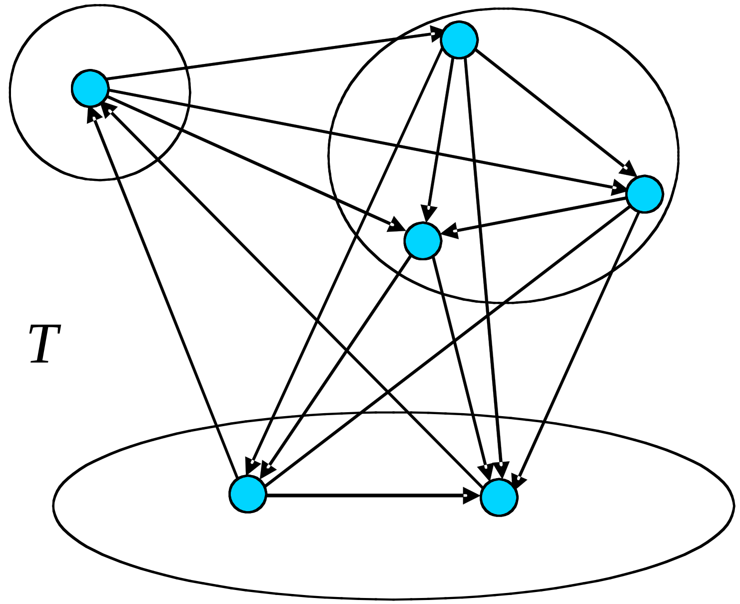
- Cohérence pour la composition :

Soit $R$ un tournoi à $k$ sommets et soient $T_1$, $T_2$, … $T_k$ $k$ tournois. La *composition* de $R$ avec $\{T_1, T_2, \dots T_k\}$ est le tournoi $T$ obtenu en substituant $T_i$ au $i^e$ sommet de $R$.

Ex.




$S$ est cohérente pour la *composition* si on a $S(T) = \bigcup_{i \in S(R)} S(T_i)$

- Transitivité des vainqueurs (Condorcet-transitivity) :
  Tout candidat qui bat un vainqueur est lui-même un vainqueur :
  $$[x \in S(T) \text{ et } (y, x) \in A] \Rightarrow y \in S(T).$$

- Regularité :
  $S$ est *régulière* si $S$ sélectionne tous les candidats ($S(T) = X$) quand tous les sommets ont le même demi-degré extérieur (le nombre de candidats doit être impair).

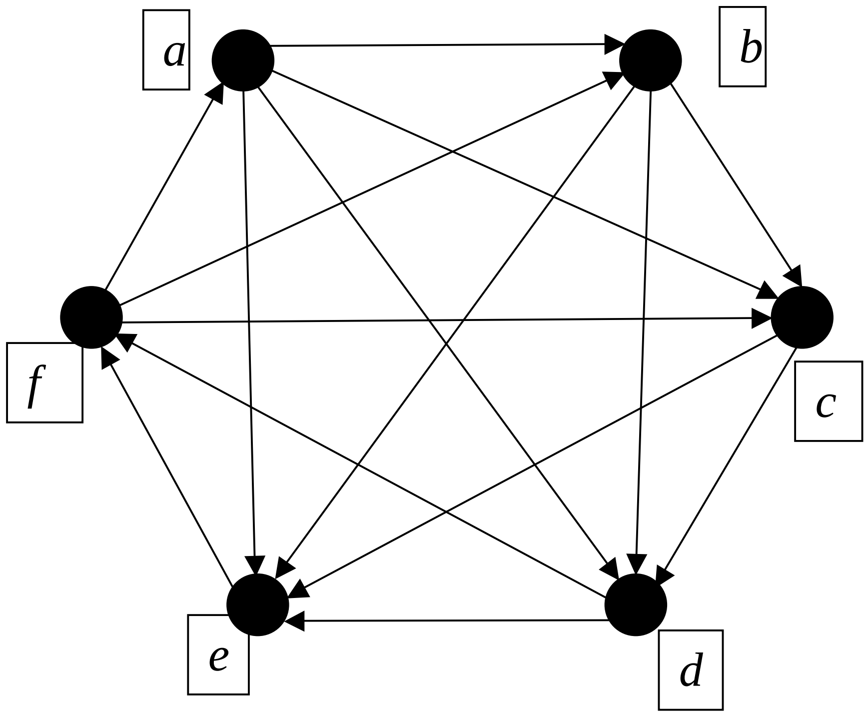
- Idempotence :
  $S$ est idempotente si on a : $S \text{ o } S = S^2 = S$.

- Complexité :
  $S$ est *polynomiale* s'il existe un algorithme polynomial pour calculer $S(T)$.
  $S$ est *NP-difficile* si le calcul de $S(T)$ est NP-difficile.

# Solution de Copeland *C* (1951)

- Un sommet $x$ est un vainqueur de *Copeland* si son demi-degré extérieur (appelé *score de Copeland* $s(x)$ of $x$) est maximum.

Ex.




Scores : $s(a) = 4$, $s(b) = 3$, $s(c) = 2$, $s(d) = 2$, $s(e) = 1$, $s(f) = 3$;

un seul vainqueur de Copeland : $a$ ; $C(T) = \{a\}$.

# Propriétés de *C*

- *C* est :
  - cohérente au sens de Condorcet ou de Smith
  - monotone
  - régulière
  - polynomiale (en $O(n^2)$).
- *C* n'est pas :
  - indépendante par rapport aux non-vainqueurs (SSP)
  - transitive pour les vainqueurs
  - idempotente
  - cohérente pour la composition

# Solution de Zermelo *Z* (1929) : maximum de vraisemblance

- Soit $p(x, y)$ la probabilité d'avoir $(x, y) \in A$. On suppose que :

  - les résultats observés $(x, y) \in A$ sont indépendants : l'existence de $(x, y)$ ne dit rien sur l'orientation des autres arcs ;

  - chaque sommet $x$ est caractérisé par une force $w_x$ avec :

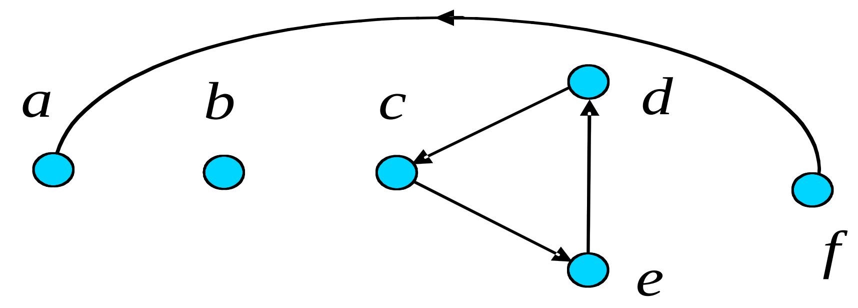
  $$p(x, y) = w_x/(w_x + w_y).$$

  La probabilité d'obtenir $T$ est :

  $$p(T / \{w_x\}) = \prod_{(x,y)\in A} \frac{w_x}{w_x + w_y}$$

- Étant donné $T$, la solution de Zermelo consiste à calculer les forces $w_x^*$ maximisant $p(T / \{w_x\})$ puis de classer les candidats selon les valeurs décroissantes des $w_x^*$.

- Ex. (les arcs manquants sont orientés de gauche à droite)




Maximiser $\displaystyle\prod_{(x,y)\in A} \frac{w_x}{w_x + w_y}$ with $\displaystyle\sum_x w_x = 1$

donne : $w_a = w_b = 0{,}38785$, $w_c = w_d = w_e = 0{,}06580$, $w_f = 0{,}02689$. Les vainqueurs de Zermelo sont $a$ et $b$ (on obtient le préordre total : $a \sim b > c \sim d \sim e > f$).

- Théorème (L.R. Ford Jr, 1957)

La solution de Copeland et celle de Zermelo donne les mêmes vainqueurs (plus précisément, les mêmes classements).

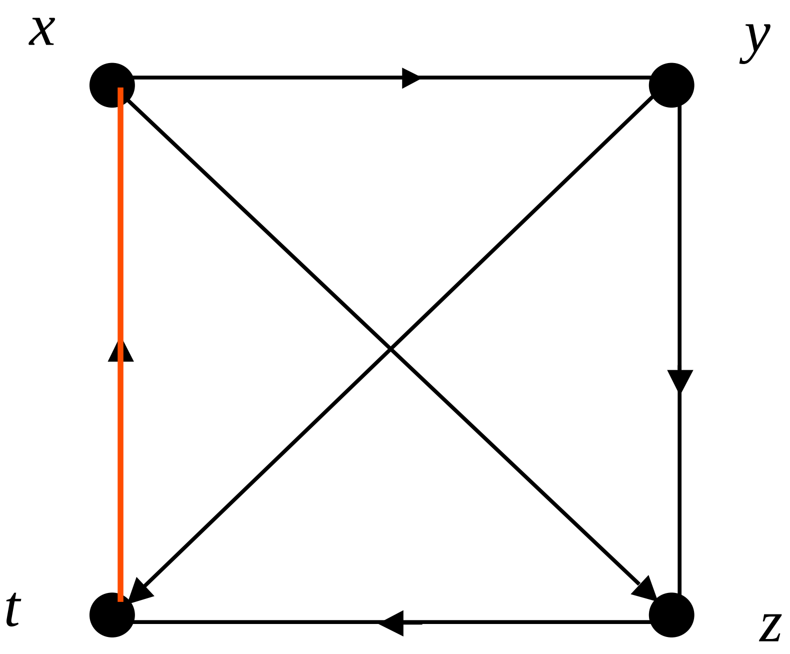
# Propriétés de *Z*

- *Z* est :
  - cohérente au sens de Condorcet ou de Smith
  - monotone
  - régulière
  - polynomiale (en O($n^2$)).
- *Z* n'est pas :
  - indépendante par rapport aux non-vainqueurs (SSP)
  - transitive pour les vainqueurs
  - idempotente
  - cohérente pour la composition

# Solution de P. Slater (1961)

1. Déterminer le nombre minimum d'arcs à inverser dans $T$ pour transformer $T$ en un ordre total $O_S$.
2. Le sommet placé en tête de $O_S$ est un vainqueur de Slater.

- Ex. :




Ici, inversion de l'arc ($t$, $x$) pour obtenir l'ordre $x > y > z > t$ :
$X$ est l'unique vainqueur de Slater.

# Scrutin de liste proportionnel au plus fort reste (méthode de Hamilton, 1792)

- $n$ votants, $m$ sièges à pourvoir, des listes de $m$ candidats. Chaque votant choisit une des listes.

- 1er temps : soit $L$ une liste et soit $l$ le nombre de votants qui ont choisi $L$. On calcule $q$ (le quota de $L$) et $r$ tels que :
$$l \times m = q \times n + r \, ;$$
$L$ se voit attribuer $q$ sièges (rq : $l$ / $n$ est proche de $q$ / $m$).

- 2nd temps : on complète les $m$ sièges en attribuant les sièges non pourvus aux listes ayant les plus forts restes, à raison d'un siège par liste.

- Ex. Trois listes $X$, $Y$, $Z$ ; $n = 102$ ; $m = 7$.
  * $X$ : $l_X = 20$ bulletins ;
  * $Y$ : $l_Y = 34$ bulletins ;
  * $Z$ : $l_Z = 48$ bulletins.

$\Longrightarrow$ $(l_X \times m) / n \approx 1{,}37$ ; $(l_Y \times m) / n \approx 2{,}33$ ; $(l_Z \times m) / n \approx 3{,}29$

- 1er temps : $X$ reçoit 1 siège, $Y$ reçoit 2 sièges, $Z$ reçoit 3 sièges.

- 2nd temps : $X$ reçoit un siège supplémentaire.

- Finalement :

  $X$ a 2 sièges, $Y$ a 2 sièges, $Z$ a 3 sièges.

! Mais : trois listes $X$, $Y$, $Z$ ; $n = 102$ ; $m = 8$.

* $X : l_X = 20$ bulletins ;
* $Y : l_Y = 34$ bulletins ;
* $Z : l_Z = 48$ bulletins.

$\Longrightarrow$ $(l_X \times m) / n \approx 1{,}57$ ; $(l_Y \times m) / n \approx 2{,}67$ ; $(l_Z \times m) / n \approx 3{,}76$

- Donc : $X$ reçoit 1 siège, $Y$ reçoit 3 sièges, $Z$ reçoit 4 sièges.

!! $X$ perd un siège, et pourtant il y a un siège de plus à pourvoir...

(paradoxe de l'Alabama : plus pour tous, moins pour un !)

! Mais : trois listes $X$, $Y$, $Z$ ; $n = 103$ ; $m = 8$.

* $X : l_X = 21$ bulletins ;
* $Y : l_Y = 34$ bulletins ;
* $Z : l_Z = 48$ bulletins.

$\Longrightarrow$ $(l_X \times m) / n \approx 1{,}631$ ; $(l_Y \times m) / n \approx 2{,}641$ ; $(l_Z \times m) / n \approx 3{,}728$

- Donc :

  *X* reçoit 1 siège, *Y* reçoit 3 sièges, *Z* reçoit 4 sièges.

! ! *X* perd un siège, et pourtant *X* a gagné une voix (mais ni *Y* ni Z) et il y a un siège de plus...

# Paradoxe de la population supplémentaire
## (paradoxe du Maine et de la Virginie)

* Trois listes $X$, $Y$, $Z$ ; $n = 3700$ ; $m = 20$.
$X : l_X = 1786$ voix ; $Y : l_Y = 1243$ voix ; $Z : l_Z = 671$ voix.

$\Longrightarrow$ $(l_X \times m) / n \approx 9{,}65$ ; $(l_Y \times m) / n \approx 6{,}72$ ; $(l_Z \times m) / n \approx 3{,}63$

$\Longrightarrow$ $X$ reçoit 10 sièges, $Y$ reçoit 7 sièges, $Z$ reçoit 3 sièges.

* Mais 65 nouveaux électeurs : 19 pour $X$, 40 pour $Y$, 6 pour $Z$, d'où des progressions de 1,06 % pour $X$ et de 0,89 % pour $Z$.

* Nouvelle répartition :
$(l_X \times m) / n \approx 9{,}588$ ; $(l_Y \times m) / n \approx 6{,}815$ ; $(l_Z \times m) / n \approx 3{,}596$

$\Longrightarrow$ $X$ reçoit 9 sièges, $Y$ reçoit 7 sièges, $Z$ reçoit 4 sièges.

! $X$ progresse plus que $Z$, mais $X$ perd un siège au profit de $Z$ !

# Paradoxe de l'Oklahoma (ou du nouvel état)

* Trois listes $X$, $Y$, $Z$ ; $n = 14913$ ; $m = 77$.
  * $X$ : $l_X = 694$ bulletins ;
  * $Y$ : $l_Y = 7280$ bulletins ;
  * $Z$ : $l_Z = 6939$ bulletins.

$\Longrightarrow$ $(l_X \times m) / n \approx 3{,}583$ ; $(l_Y \times m) / n \approx 37{,}589$ ; $(l_Z \times m) / n \approx 35{,}828$

$\Longrightarrow$ $X$ reçoit 3 sièges, $Y$ reçoit 38 sièges, $Z$ reçoit 36 sièges.

* Une nouvelle liste, $T$, est à prendre en compte ainsi que 197 nouveaux électeurs en faveur de $T$ $\Longrightarrow$ 1 siège de plus.

$\Longrightarrow$ $X \approx 3{,}5825$ ; $Y \approx 37{,}5804$ ; $Z \approx 35{,}82$ ; $T \approx 1{,}016$

$\Longrightarrow$ $X$ reçoit 4 sièges, $Y$ en reçoit 37, $Z$ en reçoit 36, $T$ en reçoit 1.

L'arrivée de $T$ s'accompagne d'un transfert d'un siège de $Y$ vers $X$ !

# Paradoxe du transfert de population

* Trois listes $X$, $Y$, $Z$ ; $n = 27$ ; $m = 5$.

$X : l_X = 14$ bulletins ; $Y : l_Y = 10$ bulletins ; $Z : l_Z = 3$ bulletins.

$\Longrightarrow$ $(l_X \times m) / n \approx 2{,}59$ ; $(l_Y \times m) / n \approx 1{,}85$ ; $(l_Z \times m) / n \approx 0{,}56$

$\Longrightarrow$ $X$ reçoit 3 sièges, $Y$ reçoit 2 sièges, $Z$ reçoit 0 siège.

* Un des électeurs de $Y$ vote pour $Z$ :

$\Longrightarrow$ $X \approx 2{,}59$ ; $Y \approx 1{,}67$ ; $Z \approx 0{,}74$

$\Longrightarrow$ $X$ reçoit 2 sièges, $Y$ reçoit 2 sièges, $Z$ reçoit 1 siège.

Le transfert d'un électeur de $Y$ vers $Z$ change le nombre de sièges attribués à $X$ (qui perd la majorité absolue alors qu'il représente plus de 50 % des votants) !

# Méthodes des diviseurs pour l'attribution des sièges aux circonscriptions (Jefferson, 1792)

- $n$ sièges à répartir sur $k$ circonscriptions, proportionnellement aux populations $p_1$, $p_2$, …, $p_k$ des circonscriptions.

- On choisit $d$ (= diviseur) tel que
$$\lfloor p_1 / d \rfloor + \lfloor p_2 / d \rfloor + \ldots + \lfloor p_k / d \rfloor = n,$$
où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x$ (ex. : $\lfloor 3{,}7 \rfloor = 3$).

- Le nombre de sièges de la $i^{e}$ circonscription vaut $\lfloor p_k / d \rfloor$.

- Rq. : la répartition des sièges est indépendante de $d$.

- Ex. $k = 3$ circonscriptions $A$, $B$, $C$ ;

  $n = 5$ sièges ;

  $p_A = 936$ habitants,

  $p_B = 623$ habitants,

  $p_C = 488$ habitants.

- $d = 312$ convient :

  $p_A / d = 3$ ; $p_B / d \approx 1{,}997$ ; $p_C / d = 1{,}564$.

$\Longrightarrow$ $A$ : 3 sièges, $B$ : 1 siège, $C$ : 1 siège.

1. Méthode d'Adams (utilisée en France pour la répartition des sièges aux législatives ; pour les régionales : variante de la méthode de Hamilton) : on arrondit à la partie entière par excès.
2. Méthode de Jefferson = d'Hondt = plus forte moyenne (utilisée aux États-Unis entre 1792 et 1842 puis entre 1901 et 1941) : on arrondit à la partie entière par défaut.
3. Méthode de Webster ou de Sainte-Laguë (utilisée aux États-Unis entre 1842 et 1852 puis entre 1901 et 1941) : on arrondit à l'entier le plus proche (autrement dit, on compare chaque quota à la moyenne arithmétique de l'intervalle entier le contenant).
4. Méthode de Dean (non utilisée) : idem avec la moyenne harmonique.
5. Méthode de Hill et Huntington (utilisée aux États-Unis depuis 1941) : idem avec la moyenne géométrique.

Exemple : répartition des sièges à l'Assemblée (recensement 1999)

| Dép$^t$ (quota) | Adams | Dean | Hill-H. | Webster | Jefferson |
|---|---|---|---|---|---|
| Nord (24,2) | 23 | 24 | 24 | 24 | 26 |
| Hauts-de-Seine (13,5) | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 |
| Val-de-Marne (11,6) | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 |
| Dordogne (3,7) | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 |
| Haute-Vienne (3,4) | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Aveyron (2,5) | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| Cantal (1,4) | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| (diviseurs | 115.070 | 106.920 | 106.770 | 105.419 | 97.409) |

$\Longrightarrow$ De façon générale, la méthode d'Adams est celle qui favorise le plus les petits départements et défavorise le plus les gros, puis la méthode de Dean, puis la méthode de Hill-Huntington. La méthode de Jefferson est celle qui favorise le plus les gros départements et défavorise le plus les petits. La méthode de Webster-Sainte Laguë est celle qui favorise ou défavorise le moins les uns ou les autres.

# Mesure du biais

Selon le recensement de 1999, les 33 plus grands départements français réunissent 37.019.943 habitants et les 33 plus petits 7.110.026.

La méthode d'Adams attribue 337 sièges aux 33 plus grands départements, soit 1 siège pour 109.851 hab., et 79 sièges aux 33 plus petits départements, soit 1 siège pour 90.000 hab. D'où un biais $b(33)$ de (109.851 – 90.000)/90.000 = 22 % en faveur des petits départements.

| | Adams | Dean | Hill-H. | Webster | Jefferson |
|---|---|---|---|---|---|
| $b(25)$ = | 30,84 % | 3,06 % | 0,43 % | – 5,02 % | – 24,02 % |
| $b(33)$ = | 22,06 % | 3,24 % | 1,45 % | – 2,14 % | – 18,17 % |
| $b(50)$ = | 14,33 % | 2,94 % | 1,94 % | – 0,06 % | – 13,25 % |

# Parlement européen et biproportionnalité

Objectifs de la réforme de 2003 pour les élections de 2004 :

- Rapprocher les élus des électeurs (décentralisation)
- Améliorer la représentation des grandes familles politiques

Projet de loi Sarkozy

- Création de 8 « grandes régions » : Nord-Ouest (NO), Ouest (O), Est (E), Sud-Ouest (SO), Sud-Est (SE), Massif central – Centre (MCC), Île-de-France (IdF), Outre-Mer (OM).
- 78 parlementaires (au lieu de 87).
- Répartition des 78 sièges dans les 8 grandes régions par la méthode d'Adams.
- Dans chaque grande région, répartition des sièges attribués à chaque région de la grande région par la méthode de Jefferson.
- Tout parti peut présenter une liste de candidats dans chaque région de chaque grande région.
- Les sièges sont répartis entre les partis recueillant au moins 5 % des suffrages selon la méthode de Hamilton en fonction du nombre total de voix obtenues par les listes régionales de chaque parti.

# Simulation à partir des résultats de 1999

Répartition des 78 sièges :

NO : 12 ; O : 10 ; E : 10 ; SO : 10 ; SE : 13, MCC : 6, IdF : 14, OM : 3

Exemple de MCC : 3 partis obtiennent plus de 5 % : UMP, PS, UDF

| | UMP | PS | UDF | sièges | UMP | PS | UDF |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Auvergne | 114.966 | 102.379 | 44.065 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| Centre | 204.631 | 162.983 | 67.535 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Limousin | 72.019 | 76.292 | 14.197 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Total | 391.616 | 341.654 | 125.797 | | | | |
| PFM | 3 sièges | 2 sièges | 1 siège | | | | |

⇒ On attribue son siège à l’UDF dans la région où elle est la moins représentée et alors qu’elle y est dernière !

**Avec ce mode de scrutin, un parti peut obtenir un siège dans une région où il a obtenu 0 voix !**

# Méthode biproportionnelle de Webster – Sainte-Laguë

(adoptée par le canton de Zürich en 2003 pour les élections de 2006)

Cas simple : l'application de la méthode de Webster pour répartir les sièges de chaque parti entre les différentes régions donne le bon nombre de sièges pour chaque région.

Exemple :

| | UMP | PS | UDF | sièges | UMP | PS | UDF |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Auvergne | 114.966 | 102.379 | 44.065 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| Centre | 204.631 | 162.983 | 67.535 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| Limousin | 72.019 | 76.292 | 14.197 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Total | 391.616 | 341.654 | 125.797 | | | | |
| PFM | | 3 sièges | 2 sièges | 1 siège | | | |

Mais, cas compliqué : on n’obtient pas ainsi le bon nombre de sièges pour chaque région.

Exemple :

| | UMP | PS | CPNT | FN | Vert | PCF | UDF | Ext.G. | dû |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nord-Pas de Calais | 260199 | 270363 | 107135 | 126035 | 93337 | 113743 | 88929 | 83333 | 5 |
| Basse-Normandie | 123383 | 92529 | 64131 | 32419 | 40955 | 19856 | 46632 | 23604 | 2 |
| Haute-Normandie | 129159 | 116964 | 36173 | 53566 | 48711 | 43467 | 42842 | 34182 | 2 |
| Picardie | 132969 | 114452 | 84787 | 67205 | 42570 | 44965 | 41781 | 37892 | 3 |
| Sièges dus | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 |

| | UMP | PS | CPNT | FN | Vert | PCF | UDF | Ext.G. | Total | sièges dus |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nord-Pas de Calais | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 8 | 5 |
| Basse-Normandie | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| Haute-Normandie | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| Picardie | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 |
| Sièges dus | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 12 |

Le Nord – Pas-de-Calais a trop de sièges, la Basse-Normandie et la Picardie pas assez : les voix du Nord – Pas-de-Calais ont un poids trop élevé, celles de la Basse-Normandie et de la Picardie pas assez. On apporte alors une correction grâce à des diviseurs propres à chaque région.

Exemple :

| | diviseur | UMP | PS | CPNT | FN | Vert | PCF | UDF | Ext.G. | dû |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NPC | 1,345 | 260199 | 270363 | 107135 | 126035 | 93337 | 113743 | 88929 | 83333 | 5 |
| BN | 0,661 | 123383 | 92529 | 64131 | 32419 | 40955 | 19856 | 46632 | 23604 | 2 |
| HN | 0,701 | 129159 | 116964 | 36173 | 53566 | 48711 | 43467 | 42842 | 34182 | 2 |
| P | 0,721 | 132969 | 114452 | 84787 | 67205 | 42570 | 44965 | 41781 | 37892 | 3 |
| Sièges dus | | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 |

| | UMP | PS | CPNT | FN | Vert | PCF | UDF | Ext.G. | Total | sièges dus |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nord-Pas de Calais | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 5 |
| Basse-Normandie | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 |
| Haute-Normandie | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| Picardie | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 |
| Sièges dus | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 12 |